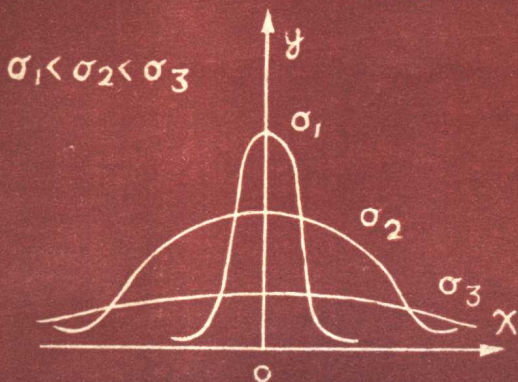


Zhongxue Kecheng
Fudao Congshu



✖ 中学课程辅导丛书

高中概率 疑难解析

陈伟侯 翟工拓

广西人民出版社



高中概率疑难解析

陈伟侯 翟工拓

广西人民出版社

封面设计：谢顺景

责任编辑：刘 恒

高中概率疑难解析

陈伟侯 翟工拓

☆

广西人民出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张4.375 字数86,000

1983年3月第1版 1983年3月第1次印刷

印 数 1—48,000册

书号：7113·447 定价：0.35元

出版说明

《中学课程辅导丛书》是我们中南五省(区)人民教育出版社继《中小学各科教学法丛书》协作出版之后,又一次协作出版供中学生学习用的丛书。丛书包括初、高中各科疑难解析共二十三种。初中部分有:语文、代数、几何、英语、物理化学、地理、历史、生物、政治,计九种。高中部分有:语文、代数、立体几何、解析几何、微积分、概率、三角、物理、化学、地理、历史、生物、政治、英语,计十四种。这套丛书计划在1983年二月底以前基本出齐。

《中学课程辅导丛书》紧扣中学各种教学大纲和统编教材,按照中学生的一般水平,围绕重点,解决疑难,培养兴趣,发展智力,以期加强基础知识,提高学习质量。

参加这套丛书编写的,都是执教多年,对本学科养之有素的教师和专门家。编辑方法,一般以教材为序,一个疑难点写一篇文章。有的用问答形式,有的用论证形式,各篇虽有些联系,但都可以独立成篇,篇幅长短不一,本着要言不烦的原则,当长则长,宜短则短,力求文字生动活泼,内容明白易懂,并富有启发性。

以上数端,只是我们编辑、作者的愿望,出书以后,成败利钝,还有待于在学习中检验。我们热切希望听到专家、老师和同学们的意见,以便再版时补充订正。

广东 广西
湖南 湖北 河南 人民教育出版社

目 录

怎样阅读本书?	(1)
---------------	-------

一、关于随机事件和随机试验

1. 事件这一名词为什么到 学习概率时才出现?	(2)
2. 在相同条件下, 不同的随机事件都 可能发生吗?	(3)
3. “随机”两字如何理解?	(3)
4. 在高中数学第三册(人民教育出版社1979年 4月第1版, 以后简称课本)第161页上, 将 “条件的一次实现”叫做一次试验, 别的书上 又叫做随机试验, 这两者有什么差别?	(4)
5. 举出几个随机试验的例子, 并指出其中的必然 事件, 不可能事件, 随机事件。	(6)
6. 不动手做上述随机试验, 根据什么来断定某个 事件属于哪一类?	(7)
7. 对前面所讲的例3、例1、例5、例8、例7, 能列举出它们各自的全部可能的 试验结果吗?	(8)
8. 对于一个给定的随机试验来说, 什么样的 随机事件才叫基本事件 (即试验的可能结果)呢?	(10)
9. “将一枚伍分硬币连掷三次”与“将三枚	

- 伍分硬币掷一次”，这两个随机试验的基本事件(即试验的可能结果)一样多吗?…………… (13)
10. 给定一个随机试验,相应的基本事件集总是由有限个基本事件组成的吗?…………… (15)
11. 给定一个随机试验,它的基本事件集和随机事件、必然事件、不可能事件之间有什么关系?…………… (16)
12. 如果一个随机试验的基本事件集由 n 个基本事件组成,那么,与这个随机试验相应的随机事件共有多少个?…………… (16)

二、概率的统计定义

1. 什么叫做随机事件 A 发生的频率?…………… (18)
2. 怎样理解随机事件的频率稳定性现象?…………… (19)
3. 为了观察随机事件的频率稳定性现象,你能设计几个简单易行的实验吗?…………… (21)
4. 怎样理解高中数学第三册162页上的概率定义?…………… (23)
5. 在什么条件下,可以用随机事件 A 的频率近似地表示它的概率?…………… (24)
6. 能否认为,当重复试验的次数 n 越大,事件 A 的频率 $\frac{m}{n}$ 就越接近于概率 $P(A)$,

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = P(A)? \dots\dots\dots (24)$$

7. 怎样理解当重复试验次数 n 越来越大时,频率与概率接近的可能性越来越大?…………… (25)
8. 高中数学第三册第163页上说,“概率从数量

上反映了随机事件发生的可能性大小”

这句话怎么理解?..... (25)

9. 某种肺病的死亡概率是0.3, 假如某人得了这种疾病, 应该如何来理解死亡概率是0.3?..... (26)

10. 试用概率的统计定义说明: 必然事件 U 的概率 $P(U) = 1$; 不可能事件 V 的概率 $P(V) = 0$; 随机事件 A 的概率 $P(A)$ 满足不等式 $0 \leq P(A) \leq 1$ (27)

11. 如果 $P(A) = 0$, $P(B) = 1$, 能分别由此断定: A 是不可能事件, B 是必然事件吗?..... (27)

12. 在每次随机试验中, 如果事件 A 发生, 那么事件 B 一定发生, 它们的概率 $P(A)$ 和 $P(B)$ 满足什么样的不等式? (28)

三、概率的等可能型定义 (即古典定义)

1. 等可能型随机试验是什么意思?..... (28)

2. 随机试验都是等可能型的吗?..... (30)

3. 概率的等可能型定义 (即古典定义) 是什么意思?..... (30)

4. 取一颗骰子, 将它抛掷一次, 朝上一面为奇数 (简称掷得奇数点) 的概率是多少? 将它连掷两次, 两次掷得的点数之和为 7 的概率是多少?..... (30)

5. 一个口袋内装有大小相同的 7 个白球和 3 个黑球, 从中任意摸出 2 个, 得到 1 个白球和 1 个黑球的概率是多少?..... (32)

6. 一套书共有上、中、下三册, 将它们任意列到书架的同一层上去, 各册自左至右

或自右至左恰好成上、中、下的

顺序的概率是多少?..... (33)

7. 从上述三题中, 对解等可能型概率问题
能得到哪些原则?..... (34)

8. 从一副扑克牌($4 \times 13 = 52$ 张)中, 任意抽出
两张, 这两张都是A的概率是多少?..... (35)

9. 8个篮球队中有2个强队, 先任意将这8个
队分成两组(每组4个队)进行比赛, 这两个
强队被分在一个组内的概率是多少?..... (36)

10. 将5个编了号的同样大小的球, 放入6个
编了号的盒内, 问第一个盒落进3个球的
概率是多少?将这个问题推广为一般形式,
并解决它. (40)

11. 在等可能型随机试验中, 如何说明 $P(U) = 1$,
 $P(V) = 0$, $0 \leq P(A) \leq 1$?..... (41)

12. 下面两个命题是否正确:

(1) 如果 $P(A) = P(B)$, 那么A和B
是同一随机事件;

(2) 如果A和B是同一随机事件, 那么 $P(A)$
 $= P(B)$ (41)

13. 在等可能型随机试验中, 若 $P(A) = 0$,
则A是不可能事件, 若 $P(A) = 1$, 则A
是必然事件, 试说明之. (42)

四、事件的运算

1. “事件A与事件B的和”是什么意思?..... (43)

2. “事件A与事件B的积”是什么意思?..... (44)

3. “事件A的对立事件”是什么意思?..... (45)

4. 在 1 号和 2 号培养皿中, 各种一粒玉米。
- (1) 列举可能的发芽情况 (即全体基本事件);
- (2) 用基本事件集的子集描述下列事件:
- $A =$ “1 号皿的玉米发芽”,
- $B =$ “2 号皿的玉米发芽”;
- (3) 描述 $A + B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 这四个事件。…………… (46)
5. 在每天上午 9 时到 10 时这一小时内, 统计某电话交换台所接到的呼唤次数 ω , 那么,
- $A =$ “ ω 在 100 以内”, $B =$ “ ω 在 50 到 200 之间” 都是随机事件。如何描述 $A + B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$? …………… (47)
6. “事件 B 包含事件 A ” 是什么意思? …………… (47)
7. “事件 A 等价于事件 B ” 是什么意思? …………… (47)
8. “事件 A 与事件 B 互斥” 是什么意思? …………… (48)
9. “事件 A 、 B 、 C 彼此互斥” 是什么意思? …………… (48)
10. 怎样区分两个事件的互斥关系和对立关系? …………… (49)
11. 用 Ω 表示必然事件 (即基本事件集), ϕ 表示不可能事件, A 表示给定的随机事件, 求下列事件的运算结果:
- (1) $A + \overline{A}$; (2) $A \cdot \overline{A}$;
- (3) $A + \Omega$; (4) $A \cdot \Omega$;
- (5) $A + \phi$; (6) $A \cdot \phi$;
- (7) $A + A$; (8) $A \cdot A$;
- (9) $\overline{A}$ 的对立事件。…………… (49)
12. 请说明两事件之间的关系: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;

$$A + B = \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})} \dots\dots\dots (50)$$

13. 请说明两事件之间的关系: $A + B = \overline{A \cdot B}$
 $+ \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$; $A + B = A + \overline{A} \cdot B$ 。…… (51)

五、有关互斥事件和对立事件的概率计算

1. 请用概率的统计定义说明: 如果 A 与 B 互斥,
 那么 $P(A + B) = P(A) + P(B)$ 。…… (53)
2. 请用概率的古典定义证明: 如果 A 与 B 互斥,
 那么 $P(A + B) = P(A) + P(B)$ 。…… (54)
3. 在上面的第一问中是说明, 第二问中是证明,
 这两者有差别吗?…… (54)
4. 15 台电视机中, 有 10 台是飞跃牌, 有 5 台是
 昆仑牌。从中任意选取两台, 问两台中至少
 有一台是飞跃牌的概率是多少?…… (55)
5. “如果 $A \cdot B \cdot C = \phi$,
 那么 $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$ ”,
 这个命题正确吗?…… (56)
6. 10 个外型一样的排球, 其中正品 6 个,
 副品 4 个, 从中任意取出 3 个。“三个中至多
 有 2 个是副品”的概率是多少?…… (57)
7. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 是如何推导出来的?…… (57)
8. 在概率计算中, 用 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 有时比较
 简便, 能举例说明吗?…… (57)
9. 试用公式 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ 解课本
 179 页第 5 题。…… (58)
10. 从一副扑克牌中抽出 1 张, 放回后重新洗牌,
 再抽出 1 张, 前后两次所抽的牌为同花的

概率是多少?..... (59)

11. 有10张人民币, 其中: 伍元的2张, 贰元的3张, 壹元的5张。从中任意抽取3张, 问:

(1) 3张中至少有2张的币值相同的概率是多少?

(2) 3张的币值之和不等于7元的概率是多少?..... (60)

12. 对前面学过的概率知识的综合应用题..... (62)

六、有关相互独立事件的概率计算

1. 怎样理解两事件相互独立?..... (65)

2. 对课本173页摸球问题中的“没有影响”四个字, 怎样用概率的等可能型定义来说明? (66)

3. 课本173页上说, “两个相互独立事件同时发生的概率, 等于每个事件发生的概率的积”, 这句话象一个定理, 但又没有证明, 请加以说明。..... (69)

4. 在解题过程中, 怎样判断事件A与事件B是否相互独立?..... (69)

5. 举出一个试验, 其中的事件A与事件B不相互独立。..... (70)

6. 如果A与B相互独立, 那么 $\bar{A}$ 与B相互独立, A与 $\bar{B}$ 相互独立, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。这个命题对吗?..... (72)

7. 某机械零件的加工由两道工序完成, 第一道工序的不合格率为0.015, 第二道工序的不合格率为0.02。假定这两道工序出不合格品是相互独立的, 求产品的合格率。..... (73)

8. 怎样用概率的统计定义说明事件A
和事件B的相互独立?..... (73)
9. 怎样区分“A、B互斥”
和“A、B相互独立”? (74)
10. 课本174页提到了n个事件的相互独立,
请给以说明。..... (76)
11. 如图6—1, 电路由电池A、B、C并联组成。
电池A、B、C损坏的概率分别是0.3、0.2、
0.2, 求电路断电的概率。..... (77)
12. 请说明课本174页例1(3)的两种解法, 能否
有比这两种解法更为简便的解法呢?..... (78)
13. 课本175页“至少有一个开关不出故障”
的概率
$$P(A+B+C) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$$

是如何推导出来的?这个问题还有别的
解法吗?..... (80)
14. 甲击中目标的概率是0.5, 乙击中目标的概率
是0.4, 丙击中目标的概率是0.05, 三人各
射击一次, 击中目标的概率是0.5 + 0.4
+ 0.05 = 0.95。这种说法对吗?..... (82)
15. 某种大炮击中目标的概率是0.3, 要用多少门
这样的大炮同时射击一次, 就可以使击中
目标的概率超过95%?..... (83)
16. 要制造一种机器零件, 甲机床的废品率是
0.04, 乙机床的废品率是0.05, 从它们制造
的产品中, 各任意抽取一件, 求:
(1) 其中至少有一件废品的概率;

- (2) 其中恰有一件废品的概率;
 - (3) 其中至多有一件废品的概率;
 - (4) 其中没有废品的概率;
 - (5) 其中都是废品的概率。…………… (84)
17. 一个通讯小组有两套设备, 只要其中有一套设备能正常工作, 就能进行通讯。每套设备由3个部件组成, 只要其中有一个部件出故障, 这套设备就不能正常工作。如果在某段时间内, 每个部件不出故障的概率都是 p , 计算在这段时间内能进行通讯的概率。…………… (86)

七、独立重复试验

1. 课本176页的独立重复试验与课本162页的重复试验是相同的吗?…………… (87)
2. 从课本176页的射击问题中, 似乎使人感到独立重复试验中, 每一次试验只有两种相互对立的试验结果。凡是独立重复试验都是这样的吗?…………… (87)
3. 请用基本事件集说明课本176页的射击问题的解法。…………… (88)
4. 课本177页的公式 $P_n(K) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$ 是怎样推导出来的?…………… (90)
5. 在解题时, 哪一类问题可以看作独立重复试验?…………… (93)
6. 课本182页第10题应如何进行分析?…………… (93)
7. 设随机事件 A 在一次试验中发生的概率为 $\varepsilon > 0$, 试证明: 不管 ε 多么小, 只要 n

- 足够大, 在 n 次独立重复试验中, A 至少发生一次的概率可以任意接近于 1。…………… (94)
8. 对某种药物的疗效进行研究, 假定这种药物对某种疾病的治愈率为 0.8, 从患此病的病人中任意选出 10 人同时服用此药, 求至少有 6 个病人被治愈的概率 P 。…………… (95)

八、进一步的问题

1. 概率的几何型定义。…………… (96)
2. 甲、乙两人约定于中午 12 时到下午 1 时在公园门口会面, 先到者等 t ($t \leq 60$) 分钟后离去, 求两人能会面的概率。…………… (98)
3. 平面上画有等距离为 a ($a > 0$) 的许多平行线, 向平面内任意投一长度为 l ($l < a$) 的针, 试求针与平行线相交的概率 P 。…………… (99)
4. 概率的统计定义, 古典定义, 几何定义有哪些共同的特点?…………… (100)
5. 请将高中数学第三册所讲的求事件的概率的方法作一个小结。…………… (101)
6. 说明广义加法公式: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, 并加以推广。…………… (105)
7. 有 3 个各不相同的螺栓和 3 个各不相同的螺母, 恰好只能配成 3 套。现在任意地将 3 个螺栓分别放到 3 个螺母旁边, 问至少配成一套的概率是多少?…………… (107)
8. 怎样定义条件概率?…………… (108)
9. $P(B)$ 与 $P(B/A)$ 有什么必然联系吗?…………… (109)
10. 怎样用条件概率定义两事件的

相互独立?.....	(109)
11. 两事件相互独立的一般定义如何规定?.....	(111)
12. 证明: 如果 A 与 B 相互独立, 那么, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 B , $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立。.....	(112)
13. 请说明 n ($n \geq 3$) 个事件相互独立的 一般定义。.....	(113)
14. 请举出三个事件, 它们不是相互独立的, 但其中的任意两个都是相互独立的。.....	(114)
15. 请介绍广义乘法公式。.....	(114)
16. 一批产品, 共100件, 其中有 5 件不合格。 收购站从中任意抽取5件进行检查, 如果 5件中至少有一件不合格, 那么, 收购站就 不收购这批产品。试问这批产品被收购的 概率是多少?.....	(115)
17. 请介绍全概率公式。.....	(116)
18. 请介绍全概率公式的应用。.....	(117)
19. 请介绍逆概率公式。.....	(119)
20. 请介绍逆概率公式的应用。.....	(121)
参考书目	(122)

怎样阅读本书？

本书以全国统编教材高中数学第三册（人民教育出版社1979年4月第1版，以后简称课本）的概率为依据，设置了八部分共107个疑难问题。

第一部分到第七部分的疑难问题中，绝大多数直接选自课本，不直接选自课本的只占一小部分，但为了解答课本中的疑难，这是必不可少的。第八部分的问题，是前面七部分内容的自然发展，有助于同学们比较系统、比较完整地了解中学概率的全部内容。

在编排疑难问题时，基本上以课本上的顺序为准，并遵循由浅入深、由具体到抽象、由模仿到创造的原则，引导读者发展自己的智力。

读者在阅读本书时，可以先根据自己在学习高中数学第三册时所遇到的疑难，查阅本书中有关的问题解答。第一遍先弄清一些比较容易的问题，第二遍再弄清比较困难的问题。在阅读时，不但要动笔计算，更要开动脑筋进行思考：为什么要这样分析而不是那样分析？为什么要这样定义而不是那样定义？这个概念和那个概念的联系是怎样的？这个公式与那个公式有什么区别，有什么联系？总之，要比较透彻地了解前人认识的逐步深化过程，才能更有效地发展自己的智力。

一、关于随机事件和随机试验

1. 事件这一名词为什么到学习概率时才出现？

在人类对客观世界的认识过程中，常用的名词是现象，事情。数学中的名词“事件”是从日常生活中的现象、事情等名词演化而来的。

一般来说，在概率论中，将事件分为三类：

在给定的条件下，一定发生的现象，叫做必然事件；

在给定的条件下，一定不发生的现象，叫做不可能事件；

在给定的条件下，可能发生也可能不发生的现象，叫做随机事件。

在学习概率以前，我们已经遇到过大量的必然事件和不可能事件了。如：在 $a > b$ 的条件下，必然发生 $a - b > 0$ ；将水加进生石灰中，必然产生氢氧化钙。“ $a - b > 0$ ”和“产生氢氧化钙”都是必然事件。在 $a > b$ 的条件下， $a - b < 0$ 不可能发生，将水加进生石灰中，不可能产生氢气。“ $a - b < 0$ ”和“产生氢气”都是不可能事件。至于随机事件，如：离家不远的早点铺，每天吃早点的人数是不确定的，多达二百来人，少则一百来人，这样，每天来吃早点的人数在150到180之间就是一个随机事件。

在学习概率以前，我们学过的数学所涉及的只是必然事件和不可能事件。在给定的条件下，凡必然事件总是发生的，凡不可能事件总是不发生的。这个必然事件和那个必然