大学经济数学学习方法指导丛书

线性代数

张远征 编著

上海财经大学应用数学系 主编

复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

大学经济数学学习方法指导丛书

线性代数

上海财经大学应用数学系　　主编

张远征　编著

復旦大學出版社

内 容 提 要

本书从行列式入手，系统地介绍了线性代数这门学科的主要内容，其中包括：矩阵、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等. 本书配有大量不同层次的例题和习题，力求让读者在练习中做到对基本概念和基本理论融会贯通. 本书可作为非数学系学生学习线性代数的参考用书，也可作为报考硕士研究生的复习指导用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张远征编著. —上海：复旦大学出版社，
2005.10
(大学经济数学学习方法指导丛书)
ISBN 7-309-04763-X

Ⅰ. 线… Ⅱ. 张… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学
参考资料 Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 111430 号

线性代数

张远征 编著

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 上海崇明裕安印刷厂
开　　本 787×960 1/16
印　　张 10
字　　数 184 千
版　　次 2005 年 10 月第一版第一次印刷
印　　数 1—5 000

书　　号 ISBN 7-309-04763-X/O·350
定　　价 14.50 元

如有印装质量问题，请向复旦大学出版社发行部调换。
版权所有 侵权必究

前　言

线性代数以矩阵、向量、线性空间等作为主要研究对象，它所包含的理论知识是学生进一步学习和研究必要而且极为重要的基础. 这门课程的特点是比较抽象，内容纵横交错，知识前后联系紧密. 在教学过程中，我们经常发现一些学生对抽象的对象理解不透彻，他们能记住一些基本的定义和定理，却不能将这些定义和定理有机地融合在一起. 在解题时表现出缺少方法，以致一筹莫展. 编写本书的目的是为了读者进一步加深对基本概念和基本理论的理解，并提供解决各种问题的方法. 基于这一目的，本书归纳了线性代数所包含的基本内容，对重要概念、定理和公式进行了剖析. 在选材上力求具有典型性，我们根据问题的类型进行了分类讲解、分析，总结出解题思想、方法和技巧，以拓广读者的解题思路，提高解题速度和准确性. 在编写过程中，我们反复琢磨，并参照研究生入学考试的题型和难度认真选题. 所以，本书既可以供一般教学参考，也可以成为有志考研者的良师益友.

限于作者的水平和经验，错误和不当之处在所难免，恳请广大读者和同仁不吝赐教.

编者

2005 年 4 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章

行 列 式

§1.1 内容提要

1.1.1 行列式的概念

一、排列与逆序

1. n 阶排列的概念

将 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的一个全排列，或称一个 n 级排列，简称排列.

n 级排列的总数为 $n!$.

2. 逆序

在一个 n 级排列中，如果一个较大数排在一个较小数之前，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列的逆序总数，称为这个排列的逆序数. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

逆序数为奇数的排列，称为奇排列；逆序数为偶数的排列，称为偶排列. 所有 n 级排列中($n\geqslant 2$)，奇排列数与偶排列数各占一半.

3. 对换

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，交换任意两个数 j_s 与 j_t 的位置，称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性.

二、n 阶行列式的定义

n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示取遍所有 n 级排列时，对形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项求和.

n 阶行列式等于 $n!$ 项的和，每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积. 当行下标按自然顺序排列时，每一项的符号取决于该项中 n 个元素的列下标排列的奇偶性，即，当排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，该项取正号；当排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，该项取负号.

例 1 求下列排列的逆序数：

(1) $12\cdots(n-1)n$; $n(n-1)\cdots21$;

(2) 设 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=k$, 求 $\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1)$.

解 (1) $\tau(12\cdots(n-1)n)=0$,

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(2) 在 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，任取两个数共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 种取法. 由于每两个数要么构成逆序，要么构成顺序，因此在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，逆序总数与顺序总数之和等于 $\frac{n(n-1)}{2}$. 注意到排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 中的逆序总数正是 $j_1j_2\cdots j_n$ 中的顺序总数，所以

$$\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1)=\frac{n(n-1)}{2}-\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

例 2 决定 k,l，使 $a_{2k}a_{35}a_{5l}a_{44}a_{12}$ 成为五阶行列式符号为负的项.

解 适当调整该项元素的位置，使行下标(第一个下标）按自然顺序排列，即

$$a_{12}a_{2k}a_{35}a_{44}a_{5l},$$

则列下标(第二个下标）的排列为

$$2k54l.$$

若该排列为奇排列，则这一项的符号为负. 显然，k,l 只能取 1 或 3. 若 $k=1,l=3$，则列下标排列为 21543，其逆序数 $\tau(21543)=4$ 为偶数；作一对换，即 $k=3$, $l=1$，则列下标排列的为奇排列. 所以 $a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51}$ 是五阶行列式中符号为负的项.

例 3 填空题：

(1) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n 个，那么该行列式的值等于__________；

(2) 在多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 0 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中，x^3 的系数是__________.

解 (1) 0； (2) -1.

分析 (1) n 阶行列式由 n^2 个元素组成，如果等于零的元素个数大于 n^2-n 个，则不等于零的元素个数小于 n 个. 而 n 阶行列式的每一项都是 n 个不同元素的乘积，故必定为零，从而该行列式的值等于零.

(2) 由于行列式每一项都是取自不同行不同列的元素的乘积，所以仅有 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 四个元素相乘时才能出现 x^3 项，此时该项的列下标排列为 4231，其逆序数为 $\tau(4231)=5$，因此 $(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-x^3$，故 x^3 的系数等于 -1.

1.1.2 n 阶行列式的计算

一、三角形行列式、范德蒙行列式

1. 上、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 斜上、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

例 4 求行列式$\begin{vmatrix} a+b & x+b & x+a \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$的值.

解 $$\begin{vmatrix} a+b & x+b & x+a \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2}{=} \begin{vmatrix} x+a+b & x+a+b & x+a+b \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b)(b-a)(b-x)(a-x).$$

二、行列式的基本性质

性质 1.1-1　行列式的值与其转置行列式的值相等.

性质 1.1-2　互换行列式的两行(或列),行列式的值改变符号.

推论　若行列式中有两行(或列)对应元素相等,则此行列式的值为零.

性质 1.1-3　数乘行列式等于数乘行列式的某一行(或列).

推论　(1) 若行列式的某一行(或列)中的所有元素全为零,则该行列式的值为零.

(2) 行列式的某一行(列)中的所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

性质 1.1-4　若行列式中有两行(或列)对应元素成比例,则此行列式的值为零.

性质 1.1-5　若行列式的某一行(或列)中的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(或列)的元素分别是对应的两个加数中的第一个数和第二个数,而其余各行(或列)的元素与原行列式的相应的各行(或列)的元素相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1-6　把行列式某一行(或列)的 k 倍($k \neq 0$)加到另一行(或列),行列式的值不变.

三、行列式按行(列)展开

1. 余子式和代数余子式

将 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划掉,剩余的元素按原来的次序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}.

置 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 展开式

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的某一行(或列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 而 n 阶行列式 D 的任一行(或列)各元素与另一行(或列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, (i = j), \\ 0, (i \neq j); \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, (i = j), \\ 0, (i \neq j), \end{cases}$$

其中 A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

1.1.3　线性方程组的克莱姆法则

一、克莱姆法则(方程的个数等于变量的个数)

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 的第 j 列元素换成方程右端常数项 $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$,其余元素不变所得到的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ j=1,2,\cdots,n.$$

二、齐次线性方程组(方程的个数等于变量的个数)

若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组仅有零解;若该方程组有非零解,则其系数行列式 $D=0$.

例 5 已知实数 a,b,c 不全为零,则方程组

$$\begin{cases} ay+bz+cw=0, \\ ax+y=0, \\ bx+z=0, \\ cx+w=0 \end{cases}$$

的解为__________.

解 $x=y=z=w=0$.

分析 方程组的系数行列式为

$$
\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - ar_2, r_1 - br_3, r_1 - cr_4} \begin{vmatrix} -(a^2+b^2+c^2) & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= -(a^2+b^2+c^2).
$$

由于实数 a,b,c 不全为零，所以方程组的系数行列式不等于零. 根据克莱姆法则，齐次线性方程组只有零解.

例 6 设 a,b,c 是互不相等的数，则方程组

$$
\begin{cases} x+y+z = a+b+c, \\ ax+by+cz = a^2+b^2+c^2, \\ bcx+acy+abz = 3abc \end{cases}
$$

的解为__________.

解 $x=a,\ y=b,\ z=c.$

分析 因为 a,b,c 是互不相等的数，所以方程组的系数行列式 $(a-b)(a-c)(c-b)$ 不等于零，根据克莱姆法则，方程组存在唯一解. 直接观察可知这组唯一解为 $x=a,\ y=b,\ z=c.$

§1.2 典型例题分析

一、低阶行列式的计算

例 1 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$.

分析 计算行列式的基本方法有两种，一是利用行列式的性质化行列式为上、下三角形式，二是利用行列式的展开式定理降阶求解.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 2r_1, r_4 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+3r_2, r_4-2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+9r_3} -7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -70.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2, r_3-r_4} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2-c_1, c_4-c_3]{} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -b \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} a\begin{vmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2.$$

例 2 设 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=2$，其中 $a+b+c=2$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}$.

分析　要求第三列元素的代数余子式之和，只要将第三列元素都换成 1.

解　首先注意到 $1A_{13}+A_{23}+A_{33}=1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{33}=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}$.

又 $$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1, r_3+r_2} \begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ b & c & a+b+c \\ c & a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix},$$

由此利用条件 $D=2$，得 $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}=1$，于是 $A_{13}+A_{23}+A_{33}=1$.

例 3　求三次多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix}$ 的根.

分析　利用行列式的性质将多项式分解因式. 这是第 6 章中计算特征值的基础.

解　$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2+c_3]{} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -3 \\ -3 & x+2 & -3 \\ -6 & x+2 & x-4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -3 \\ -3 & x+2 & -3 \\ -3 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)^2(x-4).$$

因此,多项式的根为 -2(二重),4.

例 4　求 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

分析　结合第 2 章中矩阵的乘法运算求解,即利用 $|AB|=|A||B|$.

解　记 $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$,则有

$$AA^{\mathrm{T}}=(a^2+b^2+c^2+d^2)I,$$

其中 I 是四阶单位矩阵. 注意到 $|AA^{\mathrm{T}}|=|A||A^{\mathrm{T}}|=|A|^2$,两边取行列式,得

$$D^2=|A|^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4,$$

即

$$D=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

因为 D 中 a^4 的系数为 1,所以 $D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

二、n 阶行列式的计算

例 5　计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

分析　对于有较多元素为零的 n 阶行列式,可以按某行或某列展开. 选择展

开的行或列通常至多有两个非零元素.

解　按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} = a^n - (-b)^n.$$

例 6　求多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$ 的根.

分析　对于每行(或每列)之和相等的行列式，可以将其余各列(或各行)元素都加到第一列(或第一行).

解　将各列加到第一列，得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-2)a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-2)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-2)a] \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}.$$

所以多项式 $f(x)$ 的根为 $x_1 = -(n-2)a$，$x_2 = 2a$($n-1$ 重).

例 7　计算下列 n 阶行列式：

(1) $D_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$, $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \neq 0$;

(2) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, $(a_i - b \neq 0,\ i = 1, \cdots, n-1)$.

分析　(1) 如果 n 阶行列式的一个余子式是 $n-1$ 阶对角形行列式,则某行加上其余各行的适当倍数,可化为三角形行列式;

(2) 用第一列去减其余各列,则得到的行列式含有一个 $n-1$ 阶对角形的子式,因此继续施行(1) 中的方法可将行列式化成三角形.

解　(1) 本题中元素 a_0 的余子式是一个 $n-1$ 阶对角形行列式,第一行减去其余各行的适当倍数,即第一行 $+\left(-\frac{1}{a_1}\right)\times$ 第二行 $+\left(-\frac{1}{a_2}\right)\times$ 第三行 $+\cdots+\left(-\frac{1}{a_{n-1}}\right)\times$ 第 n 行,得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i}\right) a_1 a_2 \cdots a_{n-1};$$

(2) $$D = \begin{vmatrix} a_1 & -(a_1-b) & \cdots & -(a_1-b) \\ b & a_2 - b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - b) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - b} & -1 & \cdots & -1 \\ b & a_2 - b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com