



怎样解数学题



北京师范大学出版社

怎样解数学题

(苏) A. M. 弗里德曼

E. H. 图列茨基

B. Я. 斯捷岑科 著

丁家泰 赵素兰 译

北京师范大学出版社

怎样解数学题

〔苏〕A.M.弗里德曼

E.H.图列茨基 著

B.Я.斯捷岑科

丁家泰 赵素兰 译

*

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

中国科学院印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 7.375 字数: 150 千

1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷

印数: 1—48 000

ISBN7-303-00156-5/G·68

定价: 1.35元

序 言

解题教学在数学教学中占有极其重要的地位。所以，数学课对于解题教学，应予以高度重视。然而，截止到目前，数学教学的唯一方法，一般仍是向学生演示某类习题的求解方法，进行大量的，有时甚至是枯燥繁重的解题练习。因此，目前我们所见到的学生所用之解题参考书，都是以习题集一类的书（附答案和某些提示）。

近年来出版了一系列参考书，这些书一般都指出了解题的提示和求解的要点。这里，首先需要指出的是И. 波伊亚的著作和某些高等学校的升学指导。但是，这些参考书对所求解的数学题，阐述得尚不够全面，缺乏必要的系统性，也没有充分估计到学生在解题过程中经常遇到的实际困难。

数学解题教学的心理研究结果表明，学生不具有解题的一般技巧与能力，其基本的原因就在于没有对自己的解题过程进行不断的分析，不善于从中整理出最常用的演算方法以及缺乏必要的理论基础。

所以，有必要编写这样一类供学生用的解题参考书，阅读这些参考书，能够培养和训练学生的解题技巧和能力。

本书大概是编写这类参考书的第一次尝试，它是否成功，将由读者来鉴定。

作者深深感谢数学评论家Б. А. 维哥鲁，B. C. 克拉马尔和Т. К. 沙巴晓夫，他们的宝贵意见有助于提高本

书的质量。我们希望读者能将阅读本书的意见寄到出版社，作者将对读者深表谢意。

作 者

致 读 者

本书是为中学高年级学生以及中等技术学校和职业学校学生而编写的参考书。同时，对想学习数学解题的一切人员，一般也都适用。

解题能力的高低，是衡量学生精通数学知识的广度和掌握数学教材深度的主要标志之一。所以，任何一次数学考试，任何一次数学知识测验，都是最基本的，一般也是难度最大的一次数学解题。

但是，必须指出，有不少学生，解题能力还不够强。各类考试，无论是学校考试还是升大学和入中技的考试，常有这种情况：从学生试卷中看得出来，他们数学理论知识掌握得很好，各种必要的定义和定理也都很熟，但遇到很简单的题却常常不知所措。

在学校学习期间。每个学生都解过成千上万个计算问题。而且大家解的都是同一类题。结果，有些学生掌握了解题技巧，但还有不少学生遇到不熟悉或不常见类型的题目，却不知所措而无法着手解题。

出现这种情况的原因何在呢？

原因当然很多。但其中一个重要原因是有些学生确实深入理解解题的程序，深入研究问题，设法弄清寻找解题的手段和方法；但有些学生却不是这样，他们不去仔细考虑这些问题，而只想如何更快地解出所给的问题。这些学生不按要求分析解题，不去探求解题的一般手段和方法，只想尽快得

出答案。

多数学生对问题的概念常常模糊，甚至对解题实质也产生错误的理解。如果不知道从何处入手分析问题，怎么能解复杂的问题呢？如果不知道证明的含义是什么，怎么能解证明题呢？许多学生不知道解题的构成部分，不知道为什么应当对解进行检验，等等。

显然，这些概念不会在解题的实践中自觉、牢固地产生。确实，通过观察表明，许多学生做题，仅仅按课堂上见到的形式而模仿完成。所以，遇到不熟悉类型的题目就说：“这种题我不会解！”“我没有做过！”似乎非要做过所有形式的问题，才能下手解题。

那么，能够学会解任何问题吗？

显然，要想学会解任何问题，那是不可能的。即使你熟练地学会了解这些问题，也总会遇到你不会解的题目。要知道，数学家为了求解某些难题，往往要花费他毕生的精力。我们知道，数学上有些难题，世界各国数学家已经解了好多年，迄今仍未解出来！

当然，谈到学校教科书中的题目或者准备各类考试而遇到的问题，那么原则上每个学生都是能够解出来的！但是，这里还会有某个题，你反反复复多次运算，还是解不出来。在这种情况下，只要安下心来认真思考研究，就能解出题来。因为原则上，这里每一个题，其难度都与学生的解题能力相适应，学生都能解得出来。

要学会解题，就应当多下工夫。但是，这一点不能仅仅归结为做题量要大。简短地说，要想学会解题，就应当学会这样做：把问题作为你仔细研究的对象，把求它的解作为一

件设计和一项创造发明来看待。

本书写作的目的，就是想帮助你学会求解学习中的问题和大学、中技入学考试中的数学问题。如果你渴望学会解题，那就必须要有耐心，要有坚持不懈的精神。对这本书，不仅是要阅读它，更重要的是全面地研究它。就是说，备以纸笔、进行研读，边读边记、精心地考虑书中的全部内容，认真地思索所读过的重点。要有耐心，不要急于去完成书上的全部习题。看到题后，要回忆读过的内容，仔细地考虑后再去做题。这一点十分重要。

应当知道，只有在独立地、不断地学习以后，才能真正增强解数学题的能力，甚至能够求解各种复杂的数学问题。

本书由相互联系的两部分组成，第一部分是问题的总论，研究分析问题的一般方法和求解的一般方法。第二部分介绍某些常见类型问题的求解方法。书中所引问题，一般都取自学校教科书和某些试卷。每个部分的题目均以号码标出，号码分两部分——习题号码和例题号码，答案和提示在习题后直接给出。但是，我们希望读者不要急于查阅答案，先由自己反复思考、检查所求之解是否正确之后，才能核对所给的答案。

书中所用的数学符号体系，与现用学校教科书一样。

如果你耐心地、坚持不懈地研读完这本书，我们相信，你会觉得你具备足够的信心，遇到生疏的问题不致于束手无策。我们认为，你今后一定能满怀希望地、兴致勃勃地求解你所遇到的各种问题。

祝你成功！

作者

目 录

序言	(1)
致读者	(1)
第 I 篇 问题和解题	(1)
第 I 章 问题的构成	(1)
I · 1 解题从何入手?	(1)
I · 2 问题的条件和要求	(1)
I · 3 分析问题的方向	(6)
I · 4 怎样建立问题的条件	(10)
I · 5 问题的图解表示	(15)
I · 6 利用草图进行图解法表题	(19)
第 II 章 解数学题的要点和步骤	(28)
II · 1 解答数学问题的用意何在?	(28)
II · 2 解题步骤的结构	(32)
II · 3 标准化问题及其解法	(50)
II · 4 非标准化问题及其解法	(61)
第 III 章 探求解题思路	(68)
III · 1 鉴别问题的类型	(69)
III · 2 探求解题思路需要综合过去的解题经验	(74)
III · 3 如何从乱石堆里捉住老鼠?	(85)
III · 4 解题过程的模式	(96)
第 II 篇 解题方法	(105)
第 IV 章 表示式的变换	(105)

IV · 1	表示式的种类及其变换的实质	(105)
IV · 2	将表示式化为标准形式的问题	(119)
IV · 3	化简表示式的问题	(123)
IV · 4	因式分解	(134)
IV · 5	求函数的导数	(138)
第 V 章	方程、不等式和方程组、不等式组	(144)
V · 1	方程、不等式的解的实质	(144)
V · 2	有理方程	(151)
V · 3	有理不等式	(154)
V · 4	无理方程和无理不等式	(160)
V · 5	指数和对数方程及不等式	(166)
V · 6	三角方程和三角不等式	(170)
V · 7	方程组	(181)
V · 8	二元不等式和不等式组	(190)
第 VI 章	证明问题	(201)
VI · 1	证明的实质和方法	(201)
VI · 2	恒等式证明	(207)
VI · 3	不等式证明	(213)
VI · 4	完全数学归纳法	(217)
后记		(223)

第 I 篇 问题和解题

第 I 章 问题的构成

I·1 解题从何入手?

设想,我们着手解题,那么从何入手呢?

有些人可能认为,这个问题提得没有什么价值,因为很显然,解题总要从一步一步地试解开始。应当说,不少学生也确实如此:拿到题就马上开始一步一步地求解。人们的这种思维活动,苏联著名的心理学家П. Я. 加利佩林恰当地比喻为“布朗运动”,也就是杂乱无章的思维活动。这种人总是急于想解题,也就是急着试做。当发现第一次思路是错误时,便立即做第二次尝试;如果又错了,那就进行第三次尝试;……一直到把设想的所有解题思路都考虑完。通常情况下,采用这种方法是不能找到正确的解题思路的。

这里,解题所缺乏的最重要的手段,就是对问题进行深入而全面的分析。解题总是要从对问题的分析入手,这才是正确解题的开始。

因此,下面我们就来介绍,如何分析问题?

I·2 问题的条件和要求

给了题目以后,我们应当细心读题。例如,

例1 直角三角形内切圆在斜边上的切点，把斜边分成5cm和12cm两条线段。求这个直角三角形的两条直角边为多长？

当我们读了这道题后，首先总是说出本题由以下两部分组成：已知条件和要求。题目的已知条件是：“在直角三角形中，内切圆的切点分斜边为5cm和12cm两条线段。”题目的要求是：“直角三角形的两条直角边为多长？”

题目的要求，常常以问题形式出现。但是，任何问题都需要找到这个问题的答案，所以，任何一个问题都可以用上述两部分要求的形式来代替。

例2 一位旅行者顺河坐船90公里又沿河岸步行10公里，他步行的时间比坐船的时间少4小时。如果他坐船的时间改为步行，步行的时间改为坐船，行进了同样长的距离。问这位旅行者原来步行用了多少时间？坐船又用了多少时间？

这个例题所提出的问题可用以下的要求来代替：求旅行者的步行时间和坐船时间。

可以看出，任何问题都由几个断言和要求所组成。问题的断言部分，叫做问题所给的条件①。

由此可以看出，首先，应该对问题进行分析。即，把问题所陈述的内容分解为条件和要求。值得注意的是，题中常常不只是一个条件，而是把本来应该是独立的、基本的条件隔开很远，但却交织在一起。题中的要求也同样不只是一个，或同样出现上述情况。所以，把题中的所有断言和要求

①有时把问题所给出的全部内容统称为问题的条件，即将所有的条件和要求一起称作问题的条件。

分为独立的、基本的条件和要求。

上述例1可以分解为以下基本条件：

- 1) 题中所说的三角形是直角三角形；
- 2) 三角形中有一个内切圆；
- 3) 内切圆与斜边的切点把斜边分为两条线段；
- 4) 其中一条线段长5cm；
- 5) 另一线段长12cm。

这道题的要求可分解为两个基本的要求：

- 1) 求直角三角形的一条直角边的长；
- 2) 求其另一条直角边的长。

例2的论断可以分解为以下条件：

- 1) 旅行者坐船90公里；
- 2) 他步行10公里；
- 3) 他步行的时间比坐船时间少花4小时；
- 4) 如果坐船的时间用来步行，则步行距离为 S_1 ；
- 5) 如果步行的时间用来坐船，则坐船行进距离为 S_2 ；
- 6) 距离 S_1 和 S_2 相等。

从题中，可以分解出这样两个要求：

- 1) 求旅行者步行的时间；
- 2) 求他坐船的时间。

将问题分解成条件和要求，并非总是很容易的。在很多情况下，都需要对问题重新理解，才能表示出它的条件和要求。例如下述例3，便是如此。

例3 数 2^{100} 在十进制制下，含有多少位数字？

这个题目仅仅陈述了一个问题。但是，对这个问题进行仔细考虑，就能分解出下列二个条件：

1) 2^{100} 是自然数;

2) 在十进位制这个通常表示法下, 记 2^{100} 为多位数.

问题的要求可表示为: 求这个多位数含有多少位数字?

例4 解方程 $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$.

这个题只有一个要求. 但是, 分析这个要求, 就能分解出条件和 要求. 即, 条件: $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ 是个方程, 要求是解这个方程.

当然, 不能到此为止, 应当继续分析. 首先看这两个字母: 字母 a 是参数, 这个参数在给出问题后作常数; 字母 x 是变量, 它的变化区域是数的集合, 例如实数集 (一般书中都是这样约定的). 此外, 回忆方程的表示式也是很有好处的. 因此, 这个问题的条件可表示为:

1) a 是参数;

2) x 是变量, 它的变化区域是实数集;

3) $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ 是关于变量 x 的命题.

这个问题的要求, 可以这样表示: 求所有变量 x 的值, 这些值取于它的变化域; 对于这些值, 命题成立.

分析问题应该更深入一些. 这里可以这样追问: 要求的是给定条件时, 变量 x 的值是什么? 因而, 问题的要求更详细了. 这个要求可表示为: 找 x 关于 a 的表示式, 这个表示式对于参数 a 的所有容许的值都成立.

由此可见, 分析问题和计算问题都应从不同的深度去分析条件和要求. 分析的深度主要取决于我们对问题形式的熟悉程度和是否掌握解决这类问题的常用方法. 既然如此, 所给问题属于基本类型, 则只需简单的分析就够了; 否则, 欲

想求解，必须更加深入的分析才行。

习题1

试独立完成下列问题的分析，指出每个问题的所有基本条件和要求。

1.1 当 x 是什么值时，命题 $2^x > 4$ 成立？

1.2 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 之和，其中 $A(-1, 2), B(2, 3), C(1, 1), D(3, 5)$ 。

1.3 一列火车以72公里/小时的速度由A站开向B站，经过45分钟，另一列火车以75公里/小时的速度由B站开向A站。A、B两站之间的距离为348公里。问两列火车在离B站多远的地方相遇？

1.4 一个正方体，边长为 a 。求这正方体边与边之间的距离是多少？

从所给题目可以看出：

1.1的条件是(1) $2^x > 4$ 是关于变量 x 的命题；(2) 变量 x 的变化范围是实数集 R 。1.1的要求是，找 x 的这种集合 X ， $X \subset R$ 而且对于所有的 $x_0 \in X$ ，命题 $2^{x_0} > 4$ 总成立。

1.2的条件是：(1) 点A的坐标是 $(-1, 2)$ ；(2) 点B的坐标是 $(2, 3)$ ；(3) 点C的坐标是 $(1, 1)$ ；(4) 点D的坐标是 $(3, 5)$ ；(5) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点为A，终点为B；(6) 向量 $\overrightarrow{CD}$ 的始点为C，终点为D。1.2的要求是，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 之和。

1.3的条件是：(1) 第一列火车从A站开向B站的速度是72公里/小时；(2) 第二列火车从B站开向A站的速度是

75公里/小时；(3)第一列火车由A站开出45分钟时，第二列火车从B站开出；(4)A、B两站相距348公里。1.3的要求是，这两列火车的相遇点到B站的距离。

1.4的条件是：(1)给出了正方体；(2)正方体的边长为 a 。1.4的要求是：(1)求正方体某面上两条对边之间的距离；(2)求正方体上不在同一面上的两条互相平行的对边距离；(3)求正方体上互相交叉的两条边之间的距离。

I.3 分析问题的方向

回到例3中来。分析例3，我们得到这样的条件：(1) 2^{100} 是个自然数；(2) 2^{100} 能用通常的方法写成多位数。

所以，正是从问题的叙述中得到了这些条件。但是，还能得到其他条件。比如， 2^{100} 是数2本身作100次相乘、 2^{100} 是实数等等。可是，你知道为什么我们得到的不是这些条件，而是上面指出的条件吗？

总之，对问题进行分析，只能从问题的条件开始，而且这些分析始终应针对问题的要求。所以，必须始终围绕着问题要求来进行。换句话说，分析问题始终是朝着问题的要求这个方向进行。事实上，从题中我们应当知道数 2^{100} 含有多少位数字。当然，首先想到的是把这个数看成自然数（因为平常的记数中，若用其他形式写则不能断定它是自然数，而这里是从幂的定义得出结论的）；其次，这个自然数是按通常的形式——多位数记数方式——写出的。分析问题，我们就可以得到这两个条件。

下面我们再研究几个例子。

例5 汽艇顺水行进20公里。又逆水行进20公里。它花

在全程上的时间，比静水中行进40公里的时间是少一些还是相同？

首先，分析这个问题可得下列条件：（1）汽艇顺水行进20公里；（2）汽艇逆水又行进20公里；（3）汽艇还在静水中行进过40公里。

可是，把这些条件与问题的要求进行比较，我们发现，将汽艇花在第一次、第二次路程上的总时间与第三次进行比较，哪个大？哪个小？或者相同？这些条件不够充足。其不足之处在于，条件中没有给出时间，而问题的要求却归结为所花时间的比较上。所以必须对问题的要求继续进行分析。于是，我们比较汽艇在河水中运动的时间与在静水中运动的时间。那么，这个时间由什么来决定呢？显然，这一时间由汽艇本身的航速、河水的流速以及行进的距离来决定。可是，虽然行进的距离在题中已经给出，但汽艇的航速、水速却只字未提，这该怎么办呢？在这种情况下，这些值既然是解题所必需的，我们就把它们当作不确定的参数来处理。例如，我们从一开始就假设汽艇速度为 v 公里/小时，河水的流速为 a 公里/小时。这样，就可把题分解成以下条件了：

- 1) 汽艇速度为 v 公里/小时；
- 2) 河水流速为 a 公里/小时；
- 3) 汽艇顺水行进20公里；
- 4) 汽艇再逆水行进20公里；
- 5) 汽艇在顺水和逆水的全部行程中，用了 t_1 小时；
- 6) 在静水中汽艇又行进了40公里；
- 7) 静水中汽艇行进40公里用了 t_2 小时。

问题的要求是：比较 t_1 和 t_2 ，并且确定 t_1 、 t_2 相等还是