



普通高等教育“十五”国家级规划教材

偏微分方程 数值解法

李荣华



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

偏微分方程数值解法

李荣华

高等教育出版社

内 容 提 要

本书根据教育部专业目录调整后的要求及计算数学的发展,在笔者修订版《微分方程数值解法》的基础上编写而成。全书包括六章,第一、二章是变分形式和 Galerkin 有限元法,第三、四章和第五章是有限差分法和有限体积法,第六章是离散化方程的解法。本书是为信息与计算科学专业本科生编写的教材,但也可作为应用数学、力学及某些工程科学专业的教学用书。本书介绍的求解偏微分方程的数值方法是基本的,对于从事科学技术及工程计算的专业人员也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法/李荣华. —北京:高等教育出版社,2005.5

ISBN 7-04-016626-7

I. 偏... II. 李... III. 偏微分方程-数值计算-高等学校-教材 IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 021426 号

策划编辑 王 强 责任编辑 李 陶 师钦贤 封面设计 王凌波
责任绘图 吴文信 版式设计 胡志萍 责任校对 杨凤玲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京泽明印刷有限责任公司		http://www.landaco.com.cn
开 本	787×960 1/16	版 次	2005 年 5 月第 1 版
印 张	14.75	印 次	2005 年 5 月第 1 次印刷
字 数	270 000	定 价	18.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16626-00

前 言

1980年,笔者与冯果忱合作为“计算数学及其应用软件”专业编写出版过教材:《微分方程数值解法》。1989年修改后出了第二版。1996年经笔者较大修改后又出了修订版(第三版)。据笔者所知,这是一本在同类书中使用较广的教材。自修订版问世以来,又过去八年了。在这期间,我国高等教育有了很大变化,专业目录作了很大调整,原计算数学专业更名为“信息与计算科学”专业,相应的课程设置及要求也变了。为此高校计算数学的一些同行建议由吉林大学编写这本教材:《偏微分方程数值解法》,并列入教育部教材建设十五规划,这是促使笔者编写本书的一个缘由。促使笔者编写本书的另一个也许更重要的因素是——考虑到过去十多年来计算数学有了很大发展,也有必要对原教材做一次修订。笔者编写此书的出发点是,本着少而精和可接受性原则,力求选材基本,对本学科的发展有重要影响,并适度反映近年来的新成果。

基于上述考虑,笔者在1996年修订版的基础上做了以下修改。第一,删去原书第一章常微分方程初值问题的数值解法,保留后六章关于有限元法和差分法的基本内容,并将书名改为《偏微分方程数值解法》。第二,增加近年兴起的有限体积法(即广义差分法)。应该指出,笔者在原书的第一版已首次介绍过有限体积法,当时称为三角网格的差分格式,现在它已是求解偏微分方程,特别是流体力学方程的主力方法之一了。有限体积法是介于有限元法和有限差分法之间的方法,它既可从广义 Galerkin 法出发也可从积分插值法出发建立。为便于读者容易接受,笔者从积分插值法出发,把它看成是差分法的推广,分别列入差分法的各章(第三至第五章)。第三,关于差分法,在第五章增加了拟线性双曲方程及 Godunov 格式、守恒型格式和单调格式,这有利于读者进一步学习激波计算的近代方法。在差分格式稳定性的代数准则部分(第四章),我们强调判别二阶增长矩阵稳定性的充要条件,因为该条件既通用又容易检验。第四,关于有限元法(第二章),删减了某些非基本内容,但加强了有限元法的误差估计。我们采用较为初等的带积分余项的 Taylor 展式得到一次元的最佳估计,这种证法可直接推广到高次元和高维区域的边值问题。第五,增加了有限元形式的多重网格法(第六章),并给出与网格步长无关的敛速估计。

本书共六章。第一章边值问题的变分形式。第二章椭圆和抛物方程的有限元法。第三章椭圆方程的有限差分法。第四章抛物方程的有限差分法。第五章双曲方程的有限差分法。第六章离散化方程的解法。由于各校的要求不同,学时也有差异,我们将本书的部分内容标上星号,作为选学部分,教师可酌情删减其中的一部或全部。本书第一、二章为 Galerkin 有限元法,第三、四、五章为有限差分法和有限体积法,这两部分有一定的相对独立性,教师讲授时可有所侧重。第六章是共同基础,不应完全省略。书中安排有习题和实习题,附在各节后面。有的实习题似乎超出本书范围,但对计算有启发性,理论上又不做要求,学生是能够完成的。习题是对正文的重要补充,应要求学生尽可能多做或选做。

笔者从教多年,深知一部好教材对保证教学质量,提高学习水平多么重要,但写好一部教材也并不容易,总会有这样或那样的缺点甚至错误,因此希望读者能对本书提出批评指正,笔者将感激不尽。高等教育出版社及编辑李蕊、王强同志对本书出版给予积极支持,责任编辑李陶同志为本书曾付出辛勤劳动,谨此向他们表示衷心感谢。

李荣华

2004年12月

目 录

第一章 边值问题的变分形式	1
§ 1 二次函数的极值	1
§ 2 两点边值问题	3
2.1 弦的平衡	3
2.2 Sobolev 空间 $H^m(I)$	4
2.3 极小位能原理	8
2.4 虚功原理	12
§ 3 二阶椭圆边值问题	14
3.1 Sobolev 空间 $H^m(G)$	14
3.2 极小位能原理	15
3.3 自然边值条件	18
3.4 虚功原理	20
§ 4 Ritz - Galerkin 方法	21
第二章 椭圆和抛物型方程的有限元法	29
§ 1 两点边值问题的有限元法	29
1.1 从 Ritz 法出发	30
1.2 从 Galerkin 法出发	35
§ 2 线性有限元法的误差估计	39
2.1 H^1 - 估计	39
2.2 L^2 - 估计 对偶论证法	41
§ 3 一维高次元	44
3.1 一次元(线性元)	44
3.2 二次元	45
3.3 三次元	47
§ 4 二维矩形元	51
4.1 Lagrange 型公式	51
4.2 Hermite 型公式	53
§ 5 三角形元	55
5.1 面积坐标及有关公式	56
5.2 Lagrange 型公式	57

5.3	Hermite 型公式	58
* § 6	曲边元和等参变换	60
§ 7	二阶椭圆方程的有限元法	65
7.1	有限元方程的形成	65
7.2	矩阵元素的计算	66
7.3	边值条件的处理	68
7.4	举例	70
* § 8	收敛阶的估计	75
§ 9	抛物方程的有限元法	78
第三章	椭圆型方程的有限差分法	82
§ 1	差分逼近的基本概念	82
§ 2	两点边值问题的差分格式	86
2.1	直接差分化	86
2.2	积分插值法	89
2.3	边值条件的处理	91
§ 3	二维椭圆边值问题的差分格式	93
3.1	五点差分格式	93
3.2	边值条件的处理	96
3.3	极坐标形式的差分格式	98
§ 4	极值定理 敛速估计	101
4.1	差分方程	101
4.2	极值定理	103
4.3	五点格式的敛速估计	104
* § 5	先验估计	106
5.1	差分公式	107
5.2	若干不等式	108
5.3	先验估计	110
5.4	解的存在惟一性及敛速估计	112
§ 6	有限体积法	113
6.1	三角网的差分格式	113
6.2	有限体积法	117
第四章	抛物型方程的有限差分法	124
§ 1	最简差分格式	124
§ 2	稳定性与收敛性	130
2.1	稳定性概念	130

2.2	判别稳定性的直接估计法	132
2.3	收敛性和误差估计	134
§ 3	Fourier 方法	136
§ 4	判别差分格式稳定性的代数准则	141
* § 5	变系数抛物方程	147
§ 6	分数步长法	151
6.1	ADI 法	151
6.2	预-校法	154
6.3	LOD 法	155
§ 7	有限体积法	156
第五章	双曲型方程的有限差分法	158
§ 1	波动方程的差分逼近	158
1.1	波动方程及其特征	158
1.2	显格式	159
1.3	稳定性分析	161
1.4	隐格式	164
1.5	强迫振动	165
§ 2	一阶双曲型方程组	166
2.1	双曲型方程组 特征概念	166
2.2	Cauchy 问题 依存域 影响域 决定域	169
2.3	其他定解问题	171
2.4	拟线性双曲方程组	173
* 2.5	一维不定常流	175
§ 3	双曲方程差分格式的构造	178
3.1	迎风格式	178
3.2	Lax 格式与 Box 格式	181
3.3	粘性差分格式 Lax-Wendroff 格式	183
* § 4	Godunov 格式 守恒型格式 单调格式	186
4.1	Godunov 格式	186
4.2	守恒型格式	189
4.3	单调格式	190
* § 5	有限体积法	192
第六章	离散化方程的解法	196
§ 1	基本迭代法	196
1.1	离散方程的基本特征	196

1.2 一般迭代法	199
1.3 超松弛法(SOR法)	201
1.4 预处理迭代法	202
§2 交替方向迭代法	204
2.1 二维交替方向迭代	205
2.2 三维交替方向迭代	208
§3 预处理共轭梯度法	210
3.1 共轭梯度法	210
3.2 预处理共轭梯度法	211
§4 多重网格法	215
4.1 二重网格法:差分形式	215
4.2 二重网格法:有限元形式	217
4.3 多重网格法和套迭代技术	220
4.4 推广到多维问题	221
主要参考文献	223

第一章 边值问题的变分形式

§ 1 二次函数的极值

数学物理中的变分原理,有重要的理论和实际意义,也是构造微分方程数值解法的基础.为了便于读者理解一般形式的变分原理,本节以二次函数的极值问题为例,介绍变分问题的基本概念和方法.

在 n 维欧氏空间 \mathbf{R}^n 中引进向量、矩阵记号:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$(\)^T$ 表示括号内向量或矩阵的转置.令 $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$, 定义 \mathbf{x}, \mathbf{y} 的内积为

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i.$$

考虑 n 个变量的二次函数:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j - \sum_{i=1}^n b_i \xi_i \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

它在 $\mathbf{x}_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})^T$ 取极值的必要条件是

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})}{\partial \xi_k} &= \sum_{i=1}^n (a_{ik} + a_{ki}) \xi_i^{(0)} - b_k = 0, \\ &k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

假定 $a_{ik} = a_{ki}$, 即 \mathbf{A} 为对称矩阵, 则

$$2 \sum_{i=1}^n a_{ki} \xi_i^{(0)} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

不难看出, 若令

$$(1.1.1) \quad J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$

则二次函数 $J(x)$ 于 x_0 取极值的必要条件是: x_0 是线性代数方程组

$$(1.1.2) \quad Ax = b$$

的解.

为了进一步研究 $J(x)$ 于 x_0 的极值性质, 考虑实变量 λ 的二次函数

$$\varphi(\lambda) = J(x_0 + \lambda x),$$

其中 x 是任一 n 维非零向量. 若 $J(x)$ 于 x_0 取极小值, 则对任何 $\lambda \neq 0$, $\varphi(\lambda) = J(x_0 + \lambda x) > J(x_0) = \varphi(0)$, 即 $\varphi(\lambda)$ 于 $\lambda = 0$ 取极小值. 反之, 若 $\varphi(\lambda)$ 于 $\lambda = 0$ 取极小值, 则对任何非零向量 x , $J(x_0 + x) = \varphi(1) > \varphi(0) = J(x_0)$, 即 $J(x)$ 于 x_0 取极小值. 这样, 我们就把多变量函数 $J(x)$ 的极值问题化成单变量函数 $\varphi(\lambda)$ 的极值问题.

现在研究 $J(x)$ 存在极小值的充分必要条件. 显然

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= J(x_0) + \frac{\lambda}{2} [(Ax_0, x) + (Ax, x_0) - 2(b, x)] + \\ &\quad \frac{\lambda^2}{2} (Ax, x). \end{aligned}$$

因为 A 是对称矩阵, 故

$$(1.1.3) \quad \varphi(\lambda) = J(x_0 + \lambda x) = J(x_0) + \lambda (Ax_0 - b, x) + \frac{\lambda^2}{2} (Ax, x).$$

若 $J(x)$ 于 x_0 取极小值, 则

$$\varphi'(0) = (Ax_0 - b, x) = 0, \quad \text{对任意 } x \in \mathbf{R}^n,$$

从而 $Ax_0 - b = 0$, 这说明 x_0 是 (1.1.2) 的解. 又

$$\varphi''(0) = (Ax, x) > 0, \quad \text{对任意非零向量 } x \in \mathbf{R}^n,$$

故 A 必为正定矩阵.

反之, 设 A 是对称正定矩阵, x_0 是方程组 (1.1.2) 的解, 即

$$Ax_0 - b = 0,$$

则由 (1.1.3) 得

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= J(x_0) + \frac{\lambda^2}{2} (Ax, x) \\ &= \varphi(0) + \frac{\lambda^2}{2} (Ax, x) > \varphi(0), \quad \lambda \neq 0, x \neq 0. \end{aligned}$$

这说明 $J(x)$ 于 x_0 取极小值. 于是我们得

定理 1.1 设矩阵 A 对称正定, 则下列两个问题等价:

(1) 求 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 使

$$(1.1.4) \quad J(x_0) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} J(x),$$

其中 $J(x)$ 是由(1.1.1)定义的二次函数.

(2) 求下列方程组的解:

$$(1.1.5) \quad Ax = b.$$

$J(x)$ 是定义在全空间 \mathbf{R}^n 上的二次函数, 称为 \mathbf{R}^n 上的二次泛函或简称泛函. 泛函数 $J(x)$ 由两部分组成: 第一部分是二次项 $\frac{1}{2}(Ax, x)$, 它由矩阵 A 决定; 第二部分是一次项 (b, x) , 它由向量 b 决定.

定理 1.1 表明, 在矩阵 A 为对称正定的条件下, 若 x_0 是极值问题(1.1.4)的解, 则它也是线性方程组(1.1.5)的解; 反之亦然. 因此为了确定并计算 x_0 , 可采取两种不同的途径: 一种是求方程组(1.1.5)的解, 另一种是求泛函数 $J(x)$ 的极小值. 我们更强调这后一途径. 因为许多数学物理问题, 其直接的数学形式就是求意义更广的“二次泛函”的极小值, 只是对解作了某些“光滑性”假设之后, 才归结到微分方程. 其次, 即便是熟知的微分方程边值问题, 我们也宁愿把它化为某一“二次泛函”的极小值问题, 因为从极值问题出发建立数值解法往往更灵活方便.

习题

如果 $\varphi'(0) = 0$, 则称 x_0 是 $J(x)$ 的驻点(或稳定点). 设矩阵 A 对称(不必正定), 求证 x_0 是 $J(x)$ 的驻点的充要条件是: x_0 是方程组 $Ax = b$ 的解.

§2 两点边值问题

2.1 弦的平衡

考察一根长为 l 的弦(见图 1-1), 其两端固定在点 $A(0, 0)$ 和 $B(l, 0)$. 当没有外力作用时, 它的位置沿水平方向与 x 轴重合. 设有强度为 $f(x)$ 的外荷载垂直向下作用在弦上, 于是弦发生形变. 假定荷载很小, 因而发生的形变也很小. 用 $u = u(x)$ 表示在荷载 $f(x)$ 作用下弦的平衡位置. 根据力的平衡条件, $u(x)$ 满足微分方程

$$(1.2.1) \quad -Tu'' = f(x), \quad 0 < x < l$$

和边值条件

$$(1.2.2) \quad u(0) = 0, u(l) = 0,$$

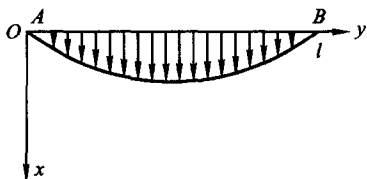


图 1-1

其中 T 是弦的张力(假定是常数). 这样, 求弦的平衡位置就归结为解两点边值问题(1.2.1), (1.2.2).

另一方面, 由力学的“极小位能原理”, 弦的平衡位置(记为 $u_* = u_*(x)$)是在满足边值条件(1.2.2)的一切可能位置中, 使位能取最小者. 设弦处于某一位置 $u = u(x)$, 我们计算它的位能. 此时应变能为

$$W_{\text{内}} = \frac{1}{2} \int_0^l T(u')^2 dx;$$

外力 $f(x)$ 所做的功为

$$W_{\text{外}} = - \int_0^l f \cdot u dx,$$

从而总位能为

$$(1.2.3) \quad J(u) = W_{\text{内}} + W_{\text{外}} = \frac{1}{2} \int_0^l [Tu'^2 - 2uf] dx.$$

据极小位能原理, $u_* = u_*(x)$ 是下列变分问题的解:

$$(1.2.4) \quad J(u_*) = \min_u J(u).$$

这样, 为了确定弦的平衡位置, 便导致两个不同形式的数学问题: 两点边值问题(1.2.1), (1.2.2) 和变分问题(1.2.4). 显然二者之间应具有某种等价关系, 这就是本章要建立的各种变分原理的最简模型.

为了精确地表述变分问题(1.2.4), 必须指出 $J(u)$ 在哪一个函数类里取极小, 就是说要给出 u 属于哪一个函数空间. 从位能的计算公式(1.2.3)看出, 为使积分有意义, 必须对 u 和 f 作必要的限制. 但又不能限制过严, 以致把取极小值的函数 $u_* = u_*(x)$ 排斥在外. 这样看来, 适当地选取函数空间就十分重要了. 下面我们引进这样的空间.

2.2 Sobolev 空间 $H^m(I)$ (参看[1,2])

设 $I = (a, b)$, $\bar{I} = [a, b]$. 像通常那样, 用 $L^2(I)$ 表示由定义在 I 上的平方可积的可测函数组成的空间, 内积和范数分别为

$$(f, g) = \int_a^b f \cdot g dx, \quad f, g \in L^2(I),$$

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left[\int_a^b |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L^2(I).$$

我们知道, $L^2(I)$ 关于“加法”及“数乘”运算是线性空间, 关于 $(,)$ 是完全内积空间, 因此 $L^2(I)$ 是 Hilbert 空间. 所谓完全, 是指 Cauchy 收敛定理在 $L^2(I)$ 中成立. 就是说, $L^2(I)$ 中任一函数列 $\{f_n\}$, 如果关于度量 $\|\cdot\|$ (即按 $L^2(I)$ 度量) 满足 Cauchy 条件:

$$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

(如此的 $\{f_n\}$ 称为基本序列), 则必有 $f \in L^2(I)$ 使

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

并记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. 我们提一下 $L^2(I)$ 空间的一个基本性质: 设 $f, g \in L^2(I)$, 则乘积 $f \cdot g \in L^1(I)$ (Lebesgue 可积空间), 且

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

这就是熟知的 Schwarz 不等式.

现在看二次泛函(1.2.3). 假定 $f \in L^2(I)$, 为使能量 $J(u)$ 有意义, 显然应要求 $u \in L^2(I)$, $u' \in L^2(I)$. 因此我们要找的空间应该包含如此的 measurable 函数 $u: u$ 及其导数 u' 皆属于 $L^2(I)$, 即

$$\int_a^b |u|^2 dx < \infty, \quad \int_a^b |u'|^2 dx < \infty.$$

然而仅限于这样的函数类还是不够的, 因为在研究物理、力学等许多自然现象中 (如集中荷载的平板弯曲、具不同介质的弹性体的平衡), 会遇到许多函数并不处处可微; 同时为使要找的空间完全 (即 Cauchy 定理成立), 也需要进一步扩充上述函数类. 为此, 我们引进广义导数 (广义微商) 的概念.

用 $C_0^\infty(I)$ 表示于 I 无穷次可微, 且在端点 a, b 的某一邻域内 (邻域大小与具体函数有关) 等于零的函数类. 对于任一于 $[a, b]$ 一次连续可微的函数 $f(x)$ 和任意 $\varphi \in C_0^\infty(I)$, 用分部积分法, 恒有

$$(1.2.5) \quad \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx.$$

今利用(1.2.5)推广导数的概念. 设 $f \in L^2(I)$, 若存在 $g \in L^2(I)$, 使等式

$$(1.2.6) \quad \int_a^b g(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx, \quad \text{对任意 } \varphi \in C_0^\infty(I)$$

恒成立, 则说 $f(x)$ 于 I 有广义导数 $g(x)$, 记为

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = g(x).$$

显然,若 $f(x)$ 在通常意义下有属于 $L^2(I)$ 的导数 $f'(x)$, 则 $f'(x)$ 也是 $f(x)$ 在广义意义下的导数. 相反的结论则不一定成立. 例如 $f(x) = |x|$, 在通常意义下于 $[-1, 1]$ 不可微, 但对任意 $\varphi \in C_0^\infty(I)$,

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx &= - \int_0^1 x \varphi'(x) dx + \int_{-1}^0 x \varphi'(x) dx \\ &= \int_0^1 \varphi(x) dx - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 g(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

其中

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

就是 $f(x)$ 的广义导数.

同一个函数 $f(x)$ 的广义导数并不惟一, 但不同的广义导数几乎处处相等. 其证明基于下列

引理 2.1 (变分法的基本引理) 设 $f \in L^2(I)$,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \text{对任意 } \varphi \in C_0^\infty(I),$$

则 $f(x)$ 几乎处处为 0.

证明 只就 $f \in C(\bar{I})$ (\bar{I} 上的连续函数空间) 证明引理. 这时还可推出更强的结论: $f(x) \equiv 0$. 事实上, 假若 $f(x) \not\equiv 0$, 不妨设 $f(x)$ 于 $x_0 \in (a, b)$ 不等于 0, 例如 $f(x_0) > 0$, 则由连续性, $f(x)$ 必在 x_0 充分小的邻域 $a < x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta < b$ 内也大于 0. 取

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\eta^2 - (x - x_0)^2}\right), & |x - x_0| < \eta, \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

则 $\varphi \in C_0^\infty(I)$, 且

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} f(x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\eta^2 - (x - x_0)^2}\right) dx > 0.$$

与假设矛盾.

利用变分法的基本引理可证明 $f(x)$ 的不同的广义导数几乎处处相等.

注意, 并非任何 $f \in L^2(I)$ 都有属于 $L^2(I)$ 的广义导数. 例如阶梯函数 ($a = -1, b = 1$)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

若 $f(x)$ 有广义导数 $g(x)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x)\varphi(x)dx &= - \int_{-1}^1 f(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^1 \varphi'(x)dx \\ &= \varphi(0), \quad \text{对任意 } \varphi \in C_0^\infty(I). \end{aligned}$$

从而 $g(x) = \delta(x)$ ——Dirac 函数, 称为 δ -函数. 今证 $g(x)$ 不属于 $L^2(I)$. 实际上, 若 $g \in L^2(I)$, 则由 Schwarz 不等式,

$$(1.2.7) \quad |\varphi(0)| = \left| \int_{-1}^1 g(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|g\| \cdot \|\varphi\|,$$

对任意 $\varphi \in C_0^\infty(I)$.

特别对 $0 < \varepsilon < 1$, 取

$$\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right), & \text{当 } |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

则 $\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(I)$, $\varphi_\varepsilon(0) = e^{-1}$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|^2 &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{2}{1-(x/\varepsilon)^2}\right)dx \\ &= 2\varepsilon \int_0^1 \exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)dt \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

以此代到(1.2.7)并令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就导致矛盾.

这个例子告诉我们, 阶梯函数没有广义导数, δ -函数不属于 $L^2(I)$.

现在定义

$$H^1(I) = \{f | f \in L^2(I), f' \in L^2(I)\},$$

其中 f' 是 f 的广义导数. 显然 $H^1(I)$ 是线性空间. 于 $H^1(I)$ 引进内积

$$(1.2.8) \quad (f, g)_1 = \int_a^b [fg + f'g']dx$$

和范数

$$(1.2.9) \quad \|f\|_1 = \sqrt{(f, f)_1} = \left[\int_a^b (f^2 + f'^2)dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

可以证明, $H^1(I)$ 是完全内积空间, 因此是 Hilbert 空间, 称之为 Sobolev 空间.

同样可定义 m 阶的 Sobolev 空间 $H^m(I)$ (参看习题 1), 其内积和范数分别为

$$(1.2.8)' \quad (f, g)_m = \sum_{k=0}^m \int_a^b f^{(k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)dx,$$

$$(1.2.9)' \quad \|f\|_m = \sqrt{(f, f)_m} = \left[\sum_{k=0}^m \int_a^b |f^{(k)}(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

当 $m=0$ 时, $H^0(I)$ 就是 $L^2(I)$ 空间,

$$(f, g)_0 = (f, g), \|f\|_0 = \|f\|.$$

2.3 极小位能原理

从位能的表达式(1.2.3)看出,当 $f \in H^0(I)$, $u \in H^1(I)$ 时,位能 $J(u)$ 恒有意义.此外, u 还应满足边值条件(1.2.2). $H^1(I)$ 中所有满足齐次边值条件(1.2.2)的函数类构成 $H^1(I)$ 的子空间,记为 $H_0^1(I)$ 或 H_0^1 . H_0^1 就是我们所要找的函数空间.现在我们将变分问题(1.2.4)精确地叙述为:求 $u_* \in H_0^1$ 使

$$(1.2.4)' \quad J(u_*) = \min_{u \in H_0^1} J(u).$$

我们进一步分析位能 $J(u)$ 的结构.引进微分算子

$$Lu = -T \frac{d^2 u}{dx^2},$$

则

$$\begin{aligned} W_{\text{内}} &= \frac{1}{2}(Lu, u) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(-T \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot u dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l T \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

$$W_{\text{外}} = -(f, u) = - \int_0^l f u dx.$$

于是

$$(1.2.10) \quad J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u).$$

与 §1(1.1.1)比较:

$$\begin{aligned} H_0^1 &\longleftrightarrow \mathbf{R}^n, \\ L &\longleftrightarrow \mathbf{A}, \\ f &\longleftrightarrow b, \end{aligned}$$

便知 $J(u)$ 和 §1 的 $J(x)$ 有相似的结构.我们亦称 $J(u)$ 为和边值问题(1.2.1), (1.2.2)相应的二次泛函或泛函数.记住这点,就可针对更一般的椭圆边值问题构造相应的泛函数了.

例如,对于两点边值问题:

$$(1.2.11) \quad Lu = -\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu = f, \quad x \in (a, b),$$

$$(1.2.12) \quad u(a) = 0, u'(b) = 0,$$

其中 $p \in C^1(\bar{I})$ (一次连续可微函数空间), $p(x) \geq \min_{x \in I} p(x) = p_{\min} > 0$, $q \in C(\bar{I})$, $q \geq 0$, $f \in H^0(I)$, $\bar{I} = [a, b]$, 可类似地构造泛函数

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u)$$