普通高等教育“十五”国家级规划教材

偏微分方程数值解法

李荣华

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

偏微分方程数值解法

李荣华

高等教育出版社

内容提要

本书根据教育部专业目录调整后的要求及计算数学的发展，在笔者修订版《微分方程数值解法》的基础上编写而成。全书包括六章，第一、二章是变分形式和 Galerkin 有限元法，第三、四章和第五章是有限差分法和有限体积法，第六章是离散化方程的解法。本书是为信息与计算科学专业本科生编写的教材，但也可作为应用数学、力学及某些工程科学专业的教学用书。本书介绍的求解偏微分方程的数值方法是基本的，对于从事科学技术及工程计算的专业人员也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法/李荣华. —北京：高等教育出版社，2005.5

ISBN 7-04-016626-7

Ⅰ. 偏…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 偏微分方程-数值计算-高等学校-教材　Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 021426 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 李　陶　师钦贤　**封面设计** 王凌波
责任绘图 吴文信　**版式设计** 胡志萍　**责任校对** 杨凤玲
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京泽明印刷有限责任公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 5 月第 1 版
印　　张	14.75	印　　次	2005 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	270 000	定　　价	18.80 元

物料号 16626-00

前　言

1980年,笔者与冯果忱合作为"计算数学及其应用软件"专业编写出版过教材:《微分方程数值解法》。1989年修改后出了第二版。1996年经笔者较大修改后又出了修订版(第三版)。据笔者所知,这是一本在同类书中使用较广的教材。自修订版问世以来,又过去八年了。在这期间,我国高等教育有了很大变化,专业目录作了很大调整,原计算数学专业更名为"信息与计算科学"专业,相应的课程设置及要求也变了。为此高校计算数学的一些同行建议由吉林大学编写这本教材:《偏微分方程数值解法》,并列入教育部教材建设十五规划,这是促使笔者编写本书的一个缘由。促使笔者编写本书的另一个也许更重要的因素是——考虑到过去十多年来计算数学有了很大发展,也有必要对原教材做一次修订。笔者编写此书的出发点是,本着少而精和可接受性原则,力求选材基本,对本学科的发展有重要影响,并适度反映近年来的新成果。

基于上述考虑,笔者在1996年修订版的基础上做了以下修改。第一,删去原书第一章常微分方程初值问题的数值解法,保留后六章关于有限元法和差分法的基本内容,并将书名改为《偏微分方程数值解法》。第二,增加近年兴起的有限体积法(即广义差分法)。应该指出,笔者在原书的第一版已首次介绍过有限体积法,当时称为三角网格的差分格式,现在它已是求解偏微分方程,特别是流体力学方程的主力方法之一了。有限体积法是介于有限元法和有限差分法之间的方法,它既可从广义 Galerkin 法出发也可从积分插值法出发建立。为便于读者容易接受,笔者从积分插值法出发,把它看成是差分法的推广,分别列入差分法的各章(第三至第五章)。第三,关于差分法,在第五章增加了拟线性双曲方程及 Godunov 格式、守恒型格式和单调格式,这有利于读者进一步学习激波计算的近代方法。在差分格式稳定性的代数准则部分(第四章),我们强调判别二阶增长矩阵稳定性的充要条件,因为该条件既通用又容易检验。第四,关于有限元法(第二章),删减了某些非基本内容,但加强了有限元法的误差估计。我们采用较为初等的带积分余项的 Taylor 展式得到一次元的最佳估计,这种证法可直接推广到高次元和高维区域的边值问题。第五,增加了有限元形式的多重网格法(第六章),并给出与网格步长无关的敛速估计。

本书共六章。第一章边值问题的变分形式。第二章椭圆和抛物方程的有限元法。第三章椭圆方程的有限差分法。第四章抛物方程的有限差分法。第五章双曲方程的有限差分法。第六章离散化方程的解法。由于各校的要求不同，学时也有差异，我们将本书的部分内容标上星号，作为选学部分，教师可酌情删减其中的一部或全部。本书第一、二章为 Galerkin 有限元法，第三、四、五章为有限差分法和有限体积法，这两部分有一定的相对独立性，教师讲授时可有所侧重。第六章是共同基础，不应完全省略。书中安排有习题和实习题，附在各节后面。有的实习题似乎超出本书范围，但对计算有启发性，理论上又不做要求，学生是能够完成的。习题是对正文的重要补充，应要求学生尽可能多做或选做。

笔者从教多年，深知一部好教材对保证教学质量，提高学习水平多么重要，但写好一部教材也并不容易，总会有这样或那样的缺点甚至错误，因此希望读者能对本书提出批评指正，笔者将感激不尽。高等教育出版社及编辑李蕊、王强同志对本书出版给予积极支持，责任编辑李陶同志为本书曾付出辛勤劳动，谨此向他们表示衷心感谢。

李荣华

2004 年 12 月

目　　录

第一章　边值问题的变分形式

§1　二次函数的极值

数学物理中的变分原理,有重要的理论和实际意义,也是构造微分方程数值解法的基础.为了便于读者理解一般形式的变分原理,本节以二次函数的极值问题为例,介绍变分问题的基本概念和方法.

在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中引进向量、矩阵记号:

$$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$(\quad)^{\mathrm{T}}$ 表示括号内向量或矩阵的转置.令 $\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$,定义 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i .$$

考虑 n 个变量的二次函数:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x})=F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j-\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i \\ &=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

它在 $\boldsymbol{x}_0=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ 取极值的必要条件是

$$\frac{\partial F(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_n^{(0)})}{\partial \xi_k}=\sum_{i=1}^{n}(a_{ik}+a_{ki})\xi_i^{(0)}-b_k=0,$$

$$k=1,2,\cdots,n.$$

假定 $a_{ik}=a_{ki}$,即 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,则

$$2\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\xi_i^{(0)}=b_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

不难看出,若令

(1.1.1)
$$J(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}),$$
则二次函数 $J(\boldsymbol{x})$于 $\boldsymbol{x}_0$ 取极值的必要条件是:$\boldsymbol{x}_0$ 是线性代数方程组

(1.1.2)
$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$
的解.

为了进一步研究 $J(\boldsymbol{x})$于 $\boldsymbol{x}_0$ 的极值性质,考虑实变量 λ 的二次函数
$$\varphi(\lambda)=J(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{x}),$$
其中 $\boldsymbol{x}$ 是任一 n 维非零向量.若 $J(\boldsymbol{x})$于 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值,则对任何 $\lambda\neq0,\varphi(\lambda)=J(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{x})>J(\boldsymbol{x}_0)=\varphi(0)$,即 $\varphi(\lambda)$于 $\lambda=0$ 取极小值.反之,若 $\varphi(\lambda)$于 $\lambda=0$ 取极小值,则对任何非零向量 $\boldsymbol{x}$,$J(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x})=\varphi(1)>\varphi(0)=J(\boldsymbol{x}_0)$,即 $J(\boldsymbol{x})$于 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值.这样,我们就把多变量函数 $J(\boldsymbol{x})$的极值问题化成单变量函数 $\varphi(\lambda)$的极值问题.

现在研究 $J(\boldsymbol{x})$存在极小值的充分必要条件.显然
$$\varphi(\lambda)=J(\boldsymbol{x}_0)+\frac{\lambda}{2}[(\boldsymbol{Ax}_0,\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}_0)-2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})]+\frac{\lambda^2}{2}(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}).$$
因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,故

(1.1.3)
$$\varphi(\lambda)=J(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{x})=J(\boldsymbol{x}_0)+\lambda(\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})+\frac{\lambda^2}{2}(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}).$$
若 $J(\boldsymbol{x})$于 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值,则
$$\varphi'(0)=(\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})=0,\qquad 对任意\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,$$
从而 $\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}=0$,这说明 $\boldsymbol{x}_0$ 是(1.1.2)的解.又
$$\varphi''(0)=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})>0,\qquad 对任意非零向量\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,$$
故 $\boldsymbol{A}$ 必为正定矩阵.

反之,设 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵,$\boldsymbol{x}_0$ 是方程组(1.1.2)的解,即
$$\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}=0,$$
则由(1.1.3)得
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)&=J(\boldsymbol{x}_0)+\frac{\lambda^2}{2}(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})\\&=\varphi(0)+\frac{\lambda^2}{2}(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})>\varphi(0),\qquad \lambda\neq0,\boldsymbol{x}\neq0.\end{aligned}$$
这说明 $J(\boldsymbol{x})$于 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值.于是我们得

定理1.1　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定,则下列两个问题等价:

(1) 求 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 使

$$J(x_0) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} J(x), \tag{1.1.4}$$

其中 $J(x)$ 是由(1.1.1)定义的二次函数.

(2) 求下列方程组的解:

$$Ax = b. \tag{1.1.5}$$

$J(x)$ 是定义在全空间 $\mathbf{R}^n$ 上的二次函数,称为 $\mathbf{R}^n$ 上的**二次泛函**或简称**泛函数**.泛函数 $J(x)$ 由两部分组成:第一部分是二次项 $\frac{1}{2}(Ax, x)$,它由矩阵 A 决定;第二部分是一次项 (b, x),它由向量 b 决定.

定理 1.1 表明,在矩阵 A 为对称正定的条件下,若 x_0 是极值问题(1.1.4)的解,则它也是线性方程组(1.1.5)的解;反之亦然.因此为了确定并计算 x_0,可采取两种不同的途径:一种是求方程组(1.1.5)的解,另一种是求泛函数 $J(x)$ 的极小值.我们更强调这后一途径.因为许多数学物理问题,其直接的数学形式就是求意义更广的"二次泛函"的极小值,只是对解作了某些"光滑性"假设之后,才归结到微分方程.其次,即便是熟知的微分方程边值问题,我们也宁愿把它化为某一"二次泛函"的极小值问题,因为从极值问题出发建立数值解法往往更灵活方便.

习题

如果 $\varphi'(0) = 0$,则称 x_0 是 $J(x)$ 的**驻点(或稳定点)**.设矩阵 A 对称(不必正定),求证 x_0 是 $J(x)$ 的驻点的充要条件是:x_0 是方程组 $Ax = b$ 的解.

§2　两点边值问题

2.1　弦的平衡

考察一根长为 l 的弦(见图 1-1),其两端固定在点 $A(0,0)$ 和 $B(l,0)$.当没有外力作用时,它的位置沿水平方向与 x 轴重合.设有强度为 $f(x)$ 的外荷载垂直向下作用在弦上,于是弦发生形变.假定荷载很小,因而发生的形变也很小.用 $u = u(x)$ 表示在荷载 $f(x)$ 作用下弦的平衡位置.根据力的平衡条件,$u(x)$ 满足微分方程

$$-Tu'' = f(x), \quad 0 < x < l \tag{1.2.1}$$

和边值条件

$$u(0) = 0, u(l) = 0, \tag{1.2.2}$$

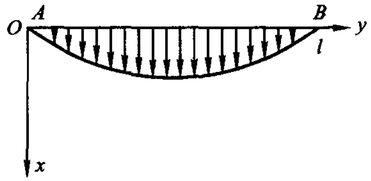

图 1 - 1

其中 T 是弦的张力(假定是常数). 这样,求弦的平衡位置就归结为解两点边值问题(1.2.1),(1.2.2).

另一方面,由力学的“极小位能原理”,弦的平衡位置(记为 $u_* = u_*(x)$)是在满足边值条件(1.2.2)的一切可能位置中,使位能取最小者. 设弦处于某一位置 $u = u(x)$,我们计算它的位能. 此时应变能为

$$W_{内} = \frac{1}{2}\int_0^l T(u')^2 \mathrm{d}x;$$

外力 $f(x)$所做的功为

$$W_{外} = -\int_0^l f\cdot u \mathrm{d}x,$$

从而总位能为

$$J(u) = W_{内} + W_{外} = \frac{1}{2}\int_0^l [Tu'^2 - 2uf]\mathrm{d}x. \tag{1.2.3}$$

据极小位能原理, $u_* = u_*(x)$是下列变分问题的解:

$$J(u_*) = \min_u J(u). \tag{1.2.4}$$

这样,为了确定弦的平衡位置,便导致两个不同形式的数学问题:两点边值问题(1.2.1),(1.2.2)和变分问题(1.2.4). 显然二者之间应具有某种等价关系,这就是本章要建立的各种变分原理的最简模型.

为了精确地表述变分问题(1.2.4),必须指出 $J(u)$在哪一个函数类里取极小,就是说要给出 u 属于哪一个函数空间. 从位能的计算公式(1.2.3)看出,为使积分有意义,必须对 u 和 f 作必要的限制. 但又不能限制过严,以致把取极小值的函数 $u_* = u_*(x)$ 排斥在外. 这样看来,适当地选取函数空间就十分重要了. 下面我们引进这样的空间.

2.2 Sobolev 空间 $H^m(I)$(参看[1,2])

设 $I = (a, b)$, $\bar{I} = [a, b]$. 像通常那样,用 $L^2(I)$表示由定义在 I 上的平方可积的可测函数组成的空间,内积和范数分别为

$$(f,g)=\int_a^b f\cdot g\mathrm{d}x,\qquad f,g\in L^2(I),$$

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\left[\int_a^b |f|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},\qquad f\in L^2(I).$$

我们知道，$L^2(I)$关于“加法”及“数乘”运算是线性空间，关于$(,)$是完全内积空间，因此 $L^2(I)$是 Hilbert 空间. 所谓完全，是指 Cauchy 收敛定理在 $L^2(I)$中成立. 就是说，$L^2(I)$中任一函数列$\{f_n\}$，如果关于度量$\|\cdot\|$(即按 $L^2(I)$度量)满足 Cauchy 条件：

$$\|f_n-f_m\|\to 0\ (n,m\to\infty)$$

(如此的$\{f_n\}$称为基本序列)，则必有 $f\in L^2(I)$使

$$\|f_n-f\|\to 0\ (n\to\infty),$$

并记为$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$. 我们提一下 $L^2(I)$空间的一个基本性质：设 $f,g\in L^2(I)$，则乘积 $f\cdot g\in L^1(I)$(Lebesgue 可积空间)，且

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|.$$

这就是熟知的 Schwarz 不等式.

现在看二次泛函(1.2.3). 假定 $f\in L^2(I)$，为使能量 $J(u)$有意义，显然应要求 $u\in L^2(I)$，$u'\in L^2(I)$. 因此我们要找的空间应该包含如此的可测函数 u：u及其导数u'皆属于$L^2(I)$，即

$$\int_a^b|u|^2\mathrm{d}x<\infty,\ \int_a^b|u'|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

然而仅限于这样的函数类还是不够的，因为在研究物理、力学等许多自然现象中(如集中荷载的平板弯曲、具不同介质的弹性体的平衡)，会遇到许多函数并不处处可微；同时为使要找的空间完全(即 Cauchy 定理成立)，也需要进一步扩充上述函数类. 为此，我们引进广义导数(广义微商)的概念.

用 $C_0^\infty(I)$表示于 I 无穷次可微，且在端点 a,b 的某一邻域内(邻域大小与具体函数有关)等于零的函数类. 对于任一于$[a,b]$一次连续可微的函数 $f(x)$和任意 $\varphi\in C_0^\infty(I)$，用分部积分法，恒有

$$(1.2.5)\qquad \int_a^b f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

今利用(1.2.5)推广导数的概念. 设 $f\in L^2(I)$，若存在$g\in L^2(I)$，使等式

$$(1.2.6)\qquad \int_a^b g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x,\qquad 对任意\ \varphi\in C_0^\infty(I)$$

恒成立，则说 $f(x)$于 I 有**广义导数**$g(x)$，记为

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=g(x).$$

显然,若 $f(x)$在通常意义下有属于 $L^2(I)$的导数 $f'(x)$,则$f'(x)$也是$f(x)$在广义意义下的导数.相反的结论则不一定成立.例如 $f(x)=|x|$,在通常意义下于$[-1,1]$不可微,但对任意 $\varphi\in C_0^\infty(I)$,

$$\begin{aligned}-\int_{-1}^{1}|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^1 x\varphi'(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x\varphi'(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_{-1}^{1}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

就是 $f(x)$的广义导数.

同一个函数 $f(x)$的广义导数并不惟一,但不同的广义导数几乎处处相等.其证明基于下列

引理2.1(变分法的基本引理) 设 $f\in L^2(I)$,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0,\qquad 对任意\ \varphi\in C_0^\infty(I),$$

则 $f(x)$几乎处处为 0.

证明 只就 $f\in C(\bar{I})$($\bar{I}$ 上的连续函数空间)证明引理.这时还可推出更强的结论:$f(x)\equiv 0$.事实上,假若 $f(x)\not\equiv 0$,不妨设$f(x)$于 $x_0\in(a,b)$不等于 0,例如 $f(x_0)>0$,则由连续性,$f(x)$必在 x_0 充分小的邻域 $a<x_0-\eta\leqslant x\leqslant x_0+\eta<b$ 内也大于 0.取

$$\varphi(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{\eta^2-(x-x_0)^2}\right), & |x-x_0|<\eta,\\ 0, & 在别处,\end{cases}$$

则 $\varphi\in C_0^\infty(I)$,且

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}f(x)\cdot\exp\left(-\frac{1}{\eta^2-(x-x_0)^2}\right)\mathrm{d}x>0.$$

与假设矛盾.

利用变分法的基本引理可证明 $f(x)$的不同的广义导数几乎处处相等.

注意,并非任何 $f\in L^2(I)$都有属于 $L^2(I)$的广义导数.例如阶梯函数($a=-1,b=1$)

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

若 $f(x)$有广义导数 $g(x)$,则

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)\mathrm{d}x$$
$$= \varphi(0), \quad 对任意\ \varphi \in C_0^\infty(I).$$

从而 $g(x)=\delta(x)$——Dirac 函数,称为 **δ-函数**. 今证$g(x)$不属于$L^2(I)$. 实际上,若 $g\in L^2(I)$,则由 Schwarz 不等式,

(1.2.7) $$|\varphi(0)| = \left|\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|g\|\cdot\|\varphi\|,$$

对任意 $\varphi\in C_0^\infty(I)$.

特别对 $0<\varepsilon<1$,取

$$\varphi(x)=\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right), & 当|x|<\varepsilon, \\ 0, & 在别处,\end{cases}$$

则 $\varphi_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(I)$, $\varphi_\varepsilon(0)=\mathrm{e}^{-1}$,

$$\|\varphi_\varepsilon\|^2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\left(-\frac{2}{1-(x/\varepsilon)^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= 2\varepsilon\int_0^1 \exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

以此代到(1.2.7)并令 $\varepsilon\to 0$,就导致矛盾.

这个例子告诉我们,阶梯函数没有广义导数,δ-函数不属于 $L^2(I)$.

现在定义

$$H^1(I)=\{f\mid f\in L^2(I), f'\in L^2(I)\},$$

其中 f'是f的广义导数. 显然 $H^1(I)$是线性空间. 于 $H^1(I)$引进内积

(1.2.8) $$(f,g)_1 = \int_a^b [fg+f'g']\mathrm{d}x$$

和范数

(1.2.9) $$\|f\|_1=\sqrt{(f,f)_1}=\left[\int_a^b (f^2+f'^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

可以证明,$H^1(I)$是完全内积空间,因此是 Hilkert 空间,称之为Sobolev**空间**.

同样可定义 m 阶的 Sobolev 空间 $H^m(I)$(参看习题 1),其内积和范数分别为

(1.2.8)′ $$(f,g)_m = \sum_{k=0}^{m}\int_a^b f^{(k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)\mathrm{d}x,$$

(1.2.9)′ $$\|f\|_m=\sqrt{(f,f)_m}=\left[\sum_{k=0}^{m}\int_a^b |f^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

当 $m=0$ 时,$H^0(I)$就是 $L^2(I)$空间,

$$(f,g)_0=(f,g),\ \|f\|_0=\|f\|.$$

2.3　极小位能原理

从位能的表达式(1.2.3)看出,当 $f\in H^0(I)$, $u\in H^1(I)$时,位能 $J(u)$恒有意义.此外,u 还应满足边值条件(1.2.2). $H^1(I)$中所有满足齐次边值条件(1.2.2)的函数类构成 $H^1(I)$的子空间,记为 $H_0^1(I)$或 H_0^1. H_0^1 就是我们所要找的函数空间.现在我们可将变分问题(1.2.4)精确地叙述为:求 $u_*\in H_0^1$ 使

(1.2.4)′
$$J(u_*)=\min_{u\in H_0^1}J(u).$$

我们进一步分析位能 $J(u)$的结构.引进微分算子

$$Lu=-T\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2},$$

则

$$W_{内}=\frac{1}{2}(Lu,u)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(-T\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\cdot u\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x,$$
$$W_{外}=-(f,u)=-\int_0^l fu\,\mathrm{d}x.$$

于是

(1.2.10)
$$J(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)-(f,u).$$

与§1(1.1.1)比较:

$$H_0^1\longleftrightarrow\mathbf{R}^n,$$
$$L\longleftrightarrow\boldsymbol{A},$$
$$f\longleftrightarrow b,$$

便知 $J(u)$和§1 的 $J(x)$有相似的结构.我们亦称 $J(u)$为和边值问题(1.2.1),(1.2.2)相应的二次泛函或泛函数.记住这点,就可针对更一般的椭圆边值问题构造相应的泛函数了.

例如,对于两点边值问题:

(1.2.11)
$$Lu=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+qu=f,\qquad x\in(a,b),$$

(1.2.12)
$$u(a)=0,\ u'(b)=0,$$

其中 $p\in C^1(\bar{I})$(一次连续可微函数空间), $p(x)\geqslant\min\limits_{x\in I}p(x)=p_{\min}>0$, $q\in C(\bar{I})$, $q\geqslant0$, $f\in H^0(I)$, $\bar{I}=[a,b]$,可类似地构造泛函数

$$J(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)-(f,u)$$