高等教育教材

经济管理数学

Jingji Guanli Shuxue

何良材　编著

重庆大学出版社

高等教育教材

经济管理数学

何良材　编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教育部高等教育有关经济、管理类专业《经济数学》教学大纲要求，集作者20余年"经济数学"课程教学经验与其所著《经济应用数学》教材（一、二、三版）实践运行，并结合当前教育实际及社会需求编写而成.

本书共5章：函数、极限与连续；微分学及其应用；积分学及其应用；矩阵方法及其应用；概率统计及其应用.

本书主要介绍经济数学的基本知识，特别强化其经济分析中的应用；对基本理念、法则充分阐明其来源背景、实质意义、做法步骤及应用去向.

本书专供高等院校财经、管理类各专科，高职高专财经、管理类各专业使用，也可作为工科少学时、文科有关专业及经济、管理实际工作者与兴趣爱好者选读参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济管理数学/何良材编著. —重庆：重庆大学出版社，2006.2

ISBN 7-5624-3587-1

Ⅰ.经… Ⅱ.何… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第003763号

高等教育教材

经济管理数学

何良材 编著

责任编辑：曾令维 穆安民 版式设计：曾令维

责任校对：任卓惠 责任印制：秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）

全国新华书店经销

重庆华林天美彩色报刊印务有限公司印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：21.75 字数：543千

2006年2月第1版 2006年2月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 7-5624-3587-1 定价：28.50元

编者的话

本书是根据国家教育部高等教育有关经济、管理类专业《经济数学》教学大纲要求，集作者20余年“经济数学”教学经验与其所编《经济应用数学》教材（一、二、三版）实践运行，并结合当前教育实际（特别是学生实际）和社会需要编写而成.

本书内容共计5章：第1章　函数、极限与连续；第2章　微分学及其应用；第3章　积分学及其应用；第4章　矩阵方法及其应用；第5章　概率统计及其应用.

本书专供高等院校财经、管理类各专科，高职高专财经、管理类各专业使用，也可作为工科少学时、文科有关专业以及经济、管理实际工作者与兴趣爱好者选读参考. 凡注有“ * ”号内容可酌情取舍.

本书具有以下特色：

（1）不片面追求数学理论的严密性、完整性，突出“以应用为目的，必须够用为尺度”的指导思想，力图构筑以“掌握基本知识、方法和使用技能，强化实际应用”为重点，把编写教材的立足点放在培养高级应用型人才的目标上.

（2）内容简明扼要，紧密联系经济实际，努力实现教学上的灵活性与实用性. 结构层次分明，重点显著突出，难点剖析透彻. 对基本理念、法则充分阐明其来源背景、实质意义、做法步骤及应用去向.

（3）文字叙述上力求浅出深入，形数结合，通俗易懂，渐进深化. 注重培养学生抽象思维，观察综合，应用计算、技能以及分析、解决问题的基本素质和创新能力.

（4）书中每章选有适量的练习题及综合自测题. 还编有与教材配套的学习指导与习题全解（含内容辅导与提要、范例分析、习题解答及概念思考题4部分）.

本书由知名数学家段虞荣（教授）审阅. 重庆大学何中市（教授、博士生导师）、王代先（副教授）、万象明（副教授）、王英仪（副教授）、侯勇之（副教授）、白任伦（副教授）、李新（副教授）、王新质（副教授）、王克金、钟小伟以及重庆师范大学陈忠友等老师提出了许多中肯有益的修正意见，同时还得到了重庆大学成人教育学院领导和有关同志的关怀支持，作者在此向他们深致谢意.

限于作者水平，不妥与错误在所难免，恳请读者批评指正.

编著者　何良材（教授）
2005年10月于重庆大学

目　录

引 言

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学,初等数学是常量为主的数学,而高等数学则是变数为主的数学,其中核心部分是微积分. 高等数学和其他科学一样,也是随着社会生产的不断发展而产生和发展起来的. 它是人们认识世界、改造世界不可缺少的有力工具,为了帮助读者对高等数学有一粗略了解,先谈谈下面两个问题,或许多少有所帮助.

0.1 微积分的产生和发展

追溯历史,无论在我国还是西方,任何一门科学都是在社会生产的推动下产生和发展起来的. 事实证明,微积分的产生和发展也是以生产劳动实践为基础,且与科学地继承和发展数学长期积累的研究成果是分不开的.

在我国古代,已孕育着微积分思想的萌芽,如西汉刘歆在《西京杂记》中提到的“记里车”,东汉张衡制造的“浑天仪”,蜀汉诸葛亮使用并改进的“木牛流马”,都要设计制造圆形的物件,要求更精确的圆周率,从而产生了魏晋时刘徽提出的“割圆术”. 他从圆内接的正多边形做起,令边数成倍地增加,即从 6 而 12,而 24,而 48,……而 384,……而 3 072. 用这个正 3 072 边形面积“近似代替”圆面积,就得 π 的更精确值 3. 141 6,“割之弥细,所失弥少;割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣”,这里就已包含着微积分中“无限细分,无限求和”的思想方法. 又如,隋代建造的跨度达 37 m 的大石拱桥——赵州桥,系用一条条长方形条石砌成,一段段直的条石却砌成了一整条弧形曲线的拱圈,这就是微积分“以直代曲”(或“以常代变”)这个基本思想的生动原型.

16 世纪的欧洲,处于资本主义萌芽时期,为适应资本积累的需要,生产力得到很大的发展. 当时,生产和技术中的大量问题迫切要求力学、天文学等基础科学的发展,这些科学是离不开数学的,因而也就推动了数学的发展. 航海事业(如美洲的发现)需要确定船只在海洋中的位置,这就要求精确地测定地球的经纬度和制造精确的时钟,于是促进了对天体运行的深入研究. 船舶形体的研制改进,需要探讨流体及物体在流体中运动的规律. 战争中用枪炮发射弹丸,要求炮弹打得准确,导致对抛物体运动的研究. 机械、建筑、水利等方面也都向数学提出了种种新课题. 在实际需要的基础上,通过大量观察和系统实验,人们逐步用新的数学方法帮助总结事物的运动规律. 例如,克卜莱根据长期天文观察资料运用数学推导,总结出行星三大运动规律;伽利略系统地研究了落体速度变化的规律,并提出了惯性定律,把物理实验与数学方法结合起来,精确地用数学公式描述了物理学规律. 以机械运动中的基本问题之一的速度、路程和时间三者关系为例,若在等速运动的条件下,用初等数学方法立即可获得解决:速度 = 路程 ÷ 时间;路程 = 速度 × 时间. 但是,在变速运动中,也就是在速度随时间变化的条件下,只用初等数学的方法就难以解决了. 究其原因,是因为在变速运动的条件下,路程除以时间,只能得到在这段时间内的平均速度,而不能得出所要知道的每一瞬时的速度. 同样地,由于速度随时间在变化,简单地用速度乘以时间也不能准确地计算出路程来. 这就要求数学必须突破研究常数的

范围，提供研究物体运动及变化过程的新工具——变数数学．微积分作为变数数学的主要部分，正是适应当时客观现实的需要，在有了变数的基础上产生的．正如恩格斯所指出的"数学的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学．有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了．而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发明的．"

0.2 微积分如何解决实际问题

这里来分析微积分中的两个典型问题，从中可以大致了解微积分解决实际问题的基本思想和求解方法．

问题 1 自由落体的速度问题．

由物理学可知，自由落体的运动规律为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

式中 s ——路程；

t ——时间。

$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$是重力加速度，从而上述问题成为：$s=4.9t^2$，求 $t=t_0$时的瞬时速度．为方便直观起见，不妨设 $t_0=1$ s 来进行讨论．

解 第一步 分析问题，提出矛盾

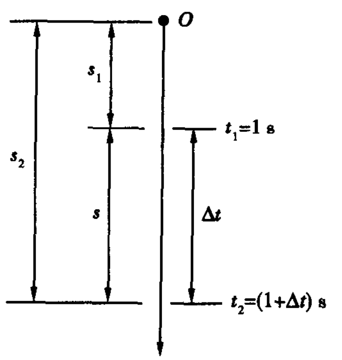


图 0.1

若物体做等速直线运动，显然，速度 = 路程/时间，记为

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

但对于自由落体来说，情况就大不相同了，由于自由落体的速度是随时间的变化而改变的，用上述公式只能得到落体在一段时间间隔内的平均速度，而不是物体的瞬时速度．因此，若要以计算等速运动速度的方法为基础，来解决变速运动的速度问题，这里就遇到速度的"变"与"不变"（即"变"与"常"）的矛盾．

第二步 寻求做法，解决问题

从自由落体运动的整个过程来看，速度的变化是显著的，但若在时刻 $t=1$ s 邻近的很短的一段时间内，比如 $t=1$ s 到 $t=1.1$ s 这段时间内，其速度变化的差异不大，因此在这段很短的时间内，可以把变速运动近似地视为等速运动，从而可得出落体在 $t=1$ s 到 $t=1.1$ s 这段时间内的平均速度（图 0.1）为

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4.9\times(1.1)^2\ \mathrm{m} - 4.9\times(1)^2\ \mathrm{m}}{1.1\ \mathrm{s} - 1\ \mathrm{s}} \\ &= \frac{1.029\ \mathrm{m}}{0.1\ \mathrm{s}} = 10.29\ \mathrm{m/s}\end{aligned}$$

若再将时间间隔缩短一些，落体速度的变化就更小，从而求得的平均速度就更接近于落体在时刻 $t=1$ s 时的瞬时速度，比如时刻 $t=1$ s 到 $t=1.01$ s 这段时间落体的平均速度为

$$\bar{v}_2=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4.9\times(1.01)^2\ \mathrm{m}-4.9\times(1)^2\ \mathrm{m}}{1.01\ \mathrm{s}-1\ \mathrm{s}}=9.849\ \mathrm{m/s}$$

$\bar{v}_2$ 就比$\bar{v}_1$ 更接近于落体在时刻 $t=1$ s 时的瞬时速度. 如此继续将时间间隔缩短下去,一般地,落在 $t=1$ s 到 $t=(1+\Delta t)$ s 这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{4.9\times(1+\Delta t)^2\ \mathrm{m}-4.9\times(1)^2\ \mathrm{m}}{(1+\Delta t)\ \mathrm{s}-1\ \mathrm{s}}=9.8\ \mathrm{m/s}+4.9\times\Delta t\ \mathrm{m/s}$$

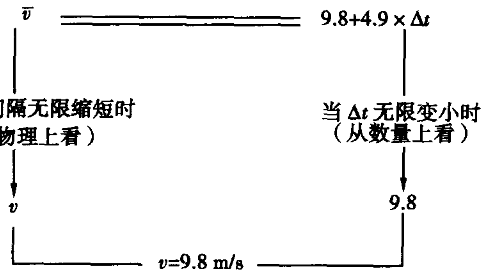
但无论这段时间的长度 Δt 多么短,总不是落体在时刻 $t=1$ s 时的瞬时速度,而只是落体的平均速度,即$\bar{v}\approx v$. 于是又产生了"近似"与"精确"的矛盾,但是已经看到这样一个事实:Δt 越小,平均速度就越接近于瞬时速度,当 Δt 无限变小时,平均速度就无限接近于瞬时速度. 这就是说,在时间间隔 Δt 无限变小的过程中,平均速度就向瞬时速度转化. 这里,转化的条件是 Δt"无限变小",因此,可以从 Δt"无限变小"的过程中,考察平均速度$\bar{v}$的"变化趋势",来寻求瞬时速度 v.

从平均速度的数学表达式

$$\bar{v}=9.8+4.9\Delta t$$

可以看出,当 Δt 无限变小时,$\bar{v}$就"无限接近"于常数值 9.8,因此,自由落体在 $t=1$ s 时的瞬时速度为 9.8 m/s,即 $v=9.8$ m/s.

上面由平均速度向瞬时速度转化的分析,可图示如下:



综合以上讨论,可得到求自由落体瞬时速度的方法如下:

第一步　以"不变代变"(或以常代变),求出 $t=1$ s 到 $t(1+\Delta t)$ s 这段时间内的平均速度$\bar{v}$.

第二步　在 Δt"无限变小"的过程中,考察平均速度$\bar{v}$的变化趋势,从而得出其自由落体在 $t=1$ s 时的瞬时速度.

问题 2　曲边三角形面积问题

在生产实际中,往往需要求由曲线所围成的平面图形的面积. 例如,为了控制流量,需要估算河道横断面面积;为了计算船舶的排水量,需要知道船体横截面面积等. 关于计算曲线围成图形面积的一般讨论,将在第 3 章中进行,这里先看一简单例子.

计算由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $x=1, y=0$ 所围成的曲边三角形的面积(图 0.2).

解　第一步　分析问题,提出矛盾

对于矩形来说,由于其底边上的各点处的高度始终保持不变,可由初等数学方法计算,即

$$\text{矩形面积}=\text{高}\times\text{底}$$

但对于曲边三角形来说,情况就不同. 它的底边上各点处的高度$y=x^2$是变化的,故不能直接应用上面的公式来计算曲边三角形的面积. 现在要以矩形面积的计算公式来解决此曲边三角形

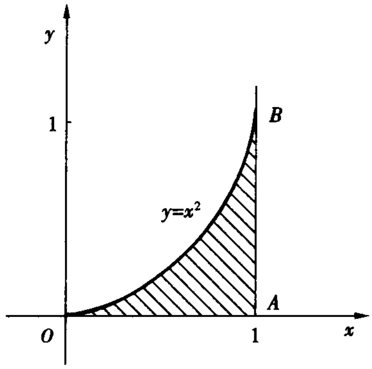


图 0.2

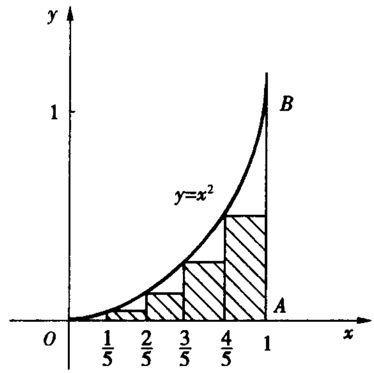


图 0.3

面积的计算问题，就遇到高度“变”与“不变”的矛盾.

第二步　寻求做法，解决问题

若从整个底边上来看，曲边三角形 OAB 的高度变化的差异自然比较大，但从底边上很小的局部来看，高度的变化就较小，可以近似地看做不变，从而求出曲边三角形面积的近似值.

例如，把曲边三角形 OAB 底边分为五等分，过每个分点引平行于 y 轴的直线，曲边三角形就被分成五个窄条，由于每个窄条上的高度变化差异不大，就可以用“不变代变”的方法算出台阶形（图 0.3 阴影部分）的面积为

$$A_5 = \left(\frac{0}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right] \times \frac{1}{5} = 0.24$$

把 $A_5 = 0.24$ 作为曲边三角形面积 A 的近似值，当分段的长度再短一些，高度的变化就更小，从而求得的台阶形面积更加接近于曲边三角形的面积. 例如，把曲边三角形底边十等分，相应台阶（图 0.4 的阴影部分）的面积为

$$A_{10} = \left[\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^2\right] \times \frac{1}{10} = 0.285$$

这里的 $A_{10} = 0.285$ 比 $A_5 = 0.24$ 更接近于曲边三角形面积 A. 如此继续下去，一般地，把曲边三角形底边 n 等分，相应的台阶形（图 0.5 的阴影部分）的面积为

$$A_n = \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \times \frac{1}{n} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

但无论分段的长度多么小，所求得的台阶形面积都只是曲边三角形面积的近似值，而不是它的精确值. 这就要求进一步解决“近似”与“精确”的矛盾.

把图 0.3、图 0.4、图 0.5 相比较，可直观地看出分段的个数 n 越多，台阶形的面积就越接近于曲边三角形的面积；在 n“无限增大”的过程中，台阶形的面积就“无限接近”曲边三角形面积. 这就是说，在 n“无限增大”（即分段长度“无限变小”）的过程中，台阶形面积就向曲边三角形面积转化. 因此，可以从 n 无限增大的过程中，考察台阶形面积 A_n 的变化趋势，来寻找曲边三角形的面积 A.

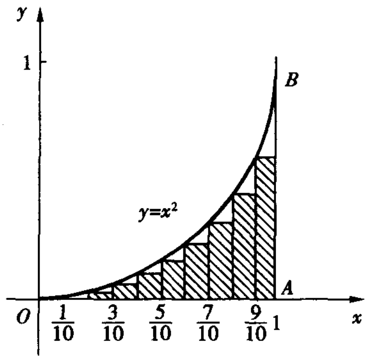


图 0.4

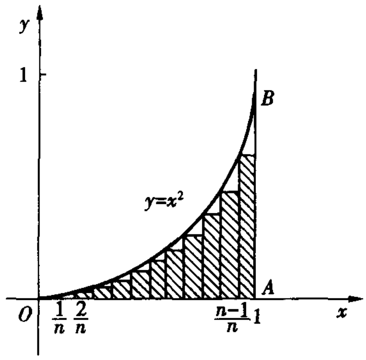


图 0.5

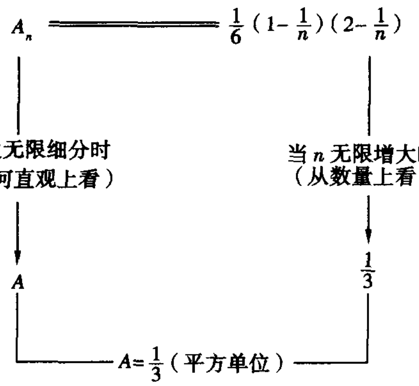
从 A_n 的数学表达式

$$A_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

可以看出,在 n 无限增大的过程中,A_n“无限趋近”于一个确定常数 $\frac{1}{3}$. 因此,可以认为曲边三角形 OAB 面积是 $\frac{1}{3}$,即

$$A=\frac{1}{3}(\text{平方单位})$$

以上关于台阶形面积向曲边三角形面积转化的分析,可图示如下:



综合以上讨论,可得求曲边三角形面积的步骤如下:

第一步 把曲边三角形分成底边相等的 n 个窄条曲边梯形,并对高度以“不变代变”,用窄矩形面积来近似代替相应窄条曲边梯形的面积,从而求得台阶形的面积 A_n.

第二步 在 n“无限增大”(在底边无限细分)的过程中,考察台阶形面积 A_n 的“变化趋势”,从而求得曲边三角形的面积 A.

问题 1 是求自由落体在某一时刻的速度,问题 2 是求曲边三角形的面积. 尽管这两个问题的实际意义各不相同,但在解决问题的过程中,所遇到的矛盾和解决矛盾的方法却有共同之处:

1)解决这两个问题所遇到的矛盾,都是有关量“变”与“不变”的矛盾.

2)解决矛盾的方法都是通过在很小的局部上以“不变代变”,得出所求量的近似值,然后通过考察一系列近似值的“变化趋势”,得到所求量的精确值.

问题1、问题2是微积分的两个典型问题,解决这两个问题的方法是微积分的基本分析方法.从中可以看到,局限于初等数学方法只能得出所求量的近似值,原因是这里都遇到了变化的量(即变量).变量和函数在数量关系上反映了客观世界的运动和变化,它是微积分研究的基本对象.而由一系列近似值的变化趋势来认识和确定所求量的精确值,是微积分解决问题的主要方法,这种方法叫做极限方法.因此,首先在第1章中讨论函数和极限.

第 1 章　函数、极限与连续

17 世纪笛卡尔把变量引入数学,对数学的发展产生了极大的影响,使数学由初等数学以研究常量为主进一步发展到研究变量,从而产生了一门崭新的学科——微积分学(或高等数学).函数是微积分学研究问题的基本对象,极限方法是微积分学解决问题的主要方法.本章主要讨论初等函数、函数的极限及其连续性等基本概念,以及有关性质与运算法则.函数与极限是本课程的核心基础,读者应予切实掌握.

1.1　函　数

一切客观事物都是在不断变化、不断运动、不断发展的,要认识它们的规律只有从“变化”中去考察研究.这就要求我们不仅要研究事物的数量变化,更重要的是要研究同一过程中各个变量之间的相互依存、相互制约的关系.正是变量之间这种相互依存的确定关系,反映到数学上面来就产生了“函数”概念,因此,函数概念成为高等数学一个极为重要的基本概念和研究的中心对象.

1.1.1　**变量**

(1)变量和常量

事物运动有两种状态:相对静止的状态与显著变化的状态.这两种状态表现在数量上,就有所谓常量与变量之分.具体地讲,当在观察自然现象或技术过程或经济活动时,会遇到很多不同的量,在某一变化过程中,始终保持一定数值而不变化的量叫做常量,通常以字母 a,b,c 等表示常量;可以取不同数值而变化的量叫做变量,通常以字母 x,y,z 等表示变量.例如,飞机在飞行过程中,乘客的数目、行李的重量等是常量,而飞机离起飞地或目的地的距离、离地面的高度、汽油的储存量、周围空气的压力和温度等则是变量.又例如,在充电过程中,电源电压是常量,时间、电流就是变量.

对一个量来说,是变量还是常量并不是绝对的,往往与具体问题有关.对于同一个量,在某一情况下可认为是常量,但在另一情况下则有可能是变量.如上面谈到的,飞机在飞行过程中,乘客数目、行李重量是常量,汽油储存量、飞机离起飞地的距离等是变量.但在飞机到达目的地停定后上、下乘客时,乘客数目、行李重量等又是变量了,而汽油储存量、飞机离起飞地的距离等量又是常量了.由此可见,一个量是常量还是变量,要根据具体情况进行分析,不能一概而论.

(2)区间

变量有时可毫无限制地任取实数值,有时又要受到某种限制,这要根据问题的具体性质来决定.例如温度的变化不能低于 -273 ℃,圆的内接正多边形的边数只能是不小于 3 的自然数……

通常用“区间”来表示变量 x 的变化范围.设 a,b 是两个给定的实数,满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数

的全体叫做闭区间,用记号[a,b]表示;满足 $a<x<b$ 的实数的全体叫做开区间,用记号(a,b)表示;满足 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数的区间叫做半开半闭区间,用记号(a,b]或[a,b)表示.

以上这些区间叫做有限区间.除了有限区间之外,还有无限区间.

$(a,+\infty)$表示全体大于 a 的实数;$[a,+\infty)$表示全体不小于 a 的实数;

$(-\infty,b)$表示全体小于 b 的实数;$(-\infty,b]$表示全体不大于 b 的实数;

$(-\infty,+\infty)$表示全体实数.

其中,$-\infty$,$+\infty$ 分别读成负无穷大,正无穷大.

(3)邻域

邻域是今后常用的一个概念,在数轴上,一个以 x_0 点为中心,半径为 δ 的对称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 叫做点 x_0 的 δ 邻域,记为 $N(x_0,\delta)$.很明显,该邻域内任一点 x 到 x_0 的距离都小于 δ,即 $|x-x_0|<\delta$.

1.1.2 函数概念

(1)引例

在观察自然现象、经济活动或技术过程中,常常会遇到各种不同的变量,它们之间往往不是孤立的,而是相互依赖、相互制约的.相互依赖的变量之间的确定关系,在数学上就称为函数关系.例如:

引例 1 圆的面积 A 与其半径 r 之间的相互关系为:$A=\pi r^2$,当 r 在$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时,就可由上式确定圆面积 A 的对应数值.

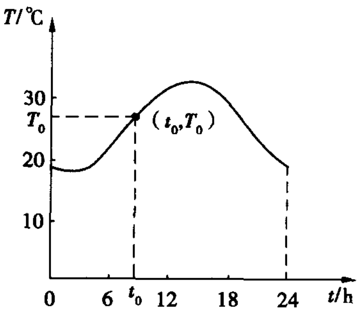


图 1.1

引例 2 某商品的销售单价为 k(元),销售数量 x 与销售收入 R(元)之间的相互关系为:$R=kx$,当 x 在自然数集 1,2,3,… 中任意取定一个数值时,就可由上式确定销售收入 R 的对应数值.

引例 3 某气象站用自动记录仪记下一昼夜气温的变化情况.图 1.1 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图,其中横坐标是时间 t,纵坐标是温度 T,它形象地表示出温度 T 随时间 t 变化而变化的规律:对于某一确定的时间 $t(0\leqslant t<24)$,就有一个确定的 T 值与之对应.例如,当 $t=t_0$ 时,由图 1.1 有 $T=T_0$.

引例 4 某百货商店记录了毛线历年来的月销售量(单位:百公斤),并将近 10 年来的平均月销售量列成表 1.1.

表 1.1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月销售量 S	81	84	45	49	9	5	6	17	94	161	144	123

表 1.1 表示了该商店毛线的销售量 S 与月份 t 之间的相互关系,且当 t 在 1,2,…,12 中任意取定一个数值时,从表中就可确定一个平均月销售量 S 的对应数值.

以上各例,虽其具体意义各不相同,但其共同特点是它们都表达了两个变量之间的相依关

系，并为这种相依关系给出了一种对应法则. 根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任取一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质. 于是，抽象成如下函数定义：

(2) 函数定义

定义 1.1　设有两个变量 x 与 y，若当变量 x 在其变化范围内任取一个数值时，变量 y 按照一定的法则，总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y=f(x)$$

其中，x 叫自变量，y 叫因变量，自变量 x 可取值的全体叫函数的定义域，常记为 D；对应 x 的函数值的全体叫函数的值域，常记为 E. 两者一般都用区间表示，有时也用不等式表示. 对于任意 $x\in Df$，若 y 只有一个值与之对应，则称 $y=f(x)$ 为单值函数. 若 $|f(x)|\leqslant M(>0)$ 对于任意 $x\in D(f)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 在 $D(f)$ 内有界.

函数的表示法通常用表格、图像或解析式（即公式）来表示.

两个函数相同：指的是定义域相同、对应法则相同. 因此函数中的变量与用什么字母表示无关. 如 $y=f(x)$ 与 $s=f(t)$ 表示同一个函数；又如，$f_1(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $f_2(x)=1$ 表示同一个函数，因为这两个函数的定义域相同、对应法则亦相同；再如，$y_1=x$ 与 $y_2=|x|$ 是不同的两个函数，因为它们的定义域虽然相同，但其对应法则不同.

(3) 函数定义域的求法

确定函数定义域 D 的一般原则：

对于反映实际问题的函数关系，其 D 由所研究的实际问题确定，如引例 3 中的 $D=[0,24)$.

对于纯数学上的函数关系，其 D 规定为使函数表达式保持有意义的一切 x 取值的全体.

例 1　求下列函数定义域：

1) $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$；　2) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

解　1) 当 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq1$ 时，即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq1$ 时，$y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 才能取得确定的实数值，故 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为

$$D=(\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$$

或

$$D=\{x\mid\frac{2}{3}<x<+\infty，且\ x\neq1\}$$

2) 当 $x\neq0$ 且 $1-x^2\geqslant0$ 时，即 $x\neq0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 才能取得确定的实数值，故 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为

$$D=[-1,0)\cup(0,1]$$

或

$$D=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 且 x \neq 0\}$$

3)当 $\left|\frac{x-1}{5}\right| \leqslant 1$ 且 $x^2<25$ 时,即 $|x-1| \leqslant 5$ 且 $|x|<5$,即 $-4 \leqslant x \leqslant 6$ 且 $-5<x<5$,亦即 $-4 \leqslant x<5$ 时,$y=\arcsin \frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 才能取得确定的实数值,故 $y=\arcsin \frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为

$$D=[-4,5) 或 D=\{x \mid -4 \leqslant x<5\}$$

(4)函数符号 $f(x)$ 的使用

函数 $y=f(x)$ 中的"$f(\ \ )$"表示函数关系中的对应法则,即对每一个 $x \in D(f)$,按法则 $f(\ \ )$ 有确定的 y 值与之相对应.

$f(x)$ 表示将法则 $f(\ \ )$ 施用于 x,如果把 $f(x)$ 中括号内的 x 转换成 $D(f)$ 中的某个具体数值 x_0 或表示数值的字母 a 以及某个数学式子 $\varphi(x)$,则表示将法则 $f(\ \ )$ 施用于那个具体数值 x_0 或表示数值的字母 a 以及那个数学式子 $\varphi(x)$. 具体做法见以下各例.

例 2 求函数 $f(x)=2x^2-1$ 在 $x=0, x=-2, x=x_0, x=-\frac{1}{t}, x=\sin \frac{\pi}{2}, x=x_0+h$ 处的函数值.

解 用符号表示出其函数的对应规律:

$$f(\ \ )=2(\ \ )^2-1$$

$$f(0)=2 \times 0^2-1=-1$$

$$f(-2)=2 \times(-2)^2-1=7$$

$$f(x_0)=2 \times x_0^2-1=2x_0^2-1$$

$$f\left(-\frac{1}{t}\right)=2 \times\left(-\frac{1}{t}\right)^2-1=\frac{2}{t^2}-1$$

$$f\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)=2 \times\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2-1=1$$

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &=2 \times(x_0+h)^2-1 \\ &=2x_0^2+4hx_0+2h^2-1 \end{aligned}$$

例 3 设 $\varphi(x)=\frac{1}{x}(x \neq 0)$,求函数增量 $\Delta \varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$;$\varphi[\varphi(x)]$.

解 用符号表示出其函数的对应规律:

$$\varphi(\ \ )=\frac{1}{(\ \ )}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x) &=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x) \\ &=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)} \end{aligned}$$

$$\varphi[\varphi(x)]=\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

例 4 设 $F(t)=\mathrm{e}^t$,求证:

1)$F(-t) \cdot F(t)-1=0$;

2) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$.

证　用符号表示出其函数的对应规律：

$F(\quad)=e^{(\quad)}$

1) $F(-t)\cdot F(t)-1=e^{(-t)}\cdot e^{(t)}-1=e^{-t+t}-1=e^{0}-1=1-1=0$

2) $F(x)\cdot F(y)=e^{x}\cdot e^{y}=e^{x+y}=F(x+y)$

例 5　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq1)$，求证：

1) $f(f(x))=x$；

2) $f(f(f(x)))=f(x)$，并求 $f(f(f(0)))$.

证　用符号表示出其函数的对应规律：

$$f(\quad)=\frac{(\quad)}{(\quad)-1}$$

$$1)f(f(x))=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{x}{x-1}\Big/\left(\frac{x}{x-1}-1\right)$$

$$=\frac{x}{x-1}\Big/\frac{1}{x-1}=x$$

所以　$f(f(x))=x$

$$2)f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{f(f(x))-1}$$

$$=\frac{f(x)}{f(x)-1}\Big/\left(\frac{f(x)}{f(x)-1}-1\right)$$

$$=\frac{f(x)}{f(x)-1}\Big/\frac{1}{f(x)-1}$$

$$=f(x)$$

所以　$f(f(f(x)))=f(x)$

于是　$f(f(f(x)))=\dfrac{x}{x-1}$

故　$f(f(f(0)))=\dfrac{0}{0-1}=0$

例 6　设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}(x\neq-1)$，$g(x)=e^{2x}$. 求：

1) $f(g(x))$；2) $g(f(x))$；3) $f(\dfrac{1}{g(x)})$.

解　用符号表示出其函数的对应规律：

$$f(\quad)=\frac{1}{1+(\quad)},g(\quad)=e^{2(\quad)}$$

$$1)f(g(x))=\frac{1}{1+g(x)}=\frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$2)g(f(x))=e^{2(f(x))}=e^{2\frac{1}{1+x}}=e^{\frac{2}{1+x}}$$

$$3)f\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}$$