高中数学复习指导

Gaozhong Shuxue Fuxi Zhidao

前　　言

为帮助高中学生复习已学课程，更好地巩固所学知识，我们根据全日制十年制学校中学各科教学大纲的要求，以通用课本为基础，结合教学实际编写了这套高中政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语和生物等九个科目的复习用书，编写中注意了指导学生使用科学方法进一步熟悉教材，抓住重点、难点进行系统的复习，以利于他们整理和巩固已学的知识，提高运用各科知识的能力。

《高中数学复习指导》包括复习方法、复习的基本内容和数学方法、范例以及练习题、复习思考题、自我测验题等内容。其中练习题、复习思考题、自我测验题的答案和题解汇编为《高中数学复习指导题解》一书，供读者使用。本书由王恩大、郭维亮、张维谐、李景宽四同志编写。

因水平所限，书中难免有缺点错误，恳请读者批评指正。

编　者

一九八一．十．

目　录

第一部分　复习方法指导

一、数学概念的复习

高考数学复习，首先要抓好数学概念的复习．因为，数学概念是数学基础知识的核心．所谓数学基础知识，包括数学概念以及数学的内在规律——定理、定律、公式、法则等等，而后者又是以概念为基础建立起来的，因此，正确理解概念是掌握数学基础知识的前提，是进行推理判断的依据．没有正确的概念就不会有正确的判断．例如，类似$\sin(A+B)=\sin A+\sin B$，$\lg(a+b)=\lg a+\lg b$之类的错误，主要是由于三角函数和对数函数的概念不清造成的．又如，求$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{4}{x}}$的值，有的解为

$$原式=\left[\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4}\right]^{\frac{1}{x}}=[(-1)^{4}]^{\frac{1}{x}}=1^{\frac{1}{x}}=1.$$

这显然是错误的．因为，首先，指数运算律$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$，当m、n为分数时，只有当a为正实数时才成立；其次，若x为正整数，则$1^{\frac{1}{x}}$在复数范围内应有x个根．

怎样复习好数学概念呢？主要应抓好以下几个方面：

1．深刻理解概念所反映的事物的本质属性

概念是反映事物所特有的本质特性的思维形式，因此，

首先要深刻理解概念所反映的事物的本质属性．例如，多面体中的棱柱这个概念，它的本质属性是“有两个面相互平行，而其余各面的交线互相平行”．不论是三棱柱还是儿棱柱，也不论是大棱柱还是小棱柱，都有这种属性，而其他的多面体便没有这种属性．没有这一属性便不是棱柱．那么，怎样才能深刻理解概念所反映的事物的本质属性呢？

（1）要抓住概念所反映的事物的主要性质．对一个概念进行分析时，一方面要力求全面，阐明其中所包含的各个方面，但更重要的是抓住概念所反映的事物的主要性质．例如，对三角函数这一概念，主要应理解“比”的含义．以正弦函数为例，定义是：设α是任意一个角，在角α的终边上任一点p的坐标是(x,y)，它和原点的距离是r（$r>0$），那么$\frac{y}{r}$叫角α的正弦，记作$\sin\alpha$，即$\sin\alpha=\frac{y}{r}$．对于这个概念应从以下几个方面加以认识：（i）正弦函数是用两条线段的比来定义的；（ii）这个比值随α的变化而变化，随α的确定而确定；（iii）α随它的终边的确定而确定，而点p必须且只须在α的终边上；(iv)这个比是$\frac{\text{角 }\alpha\text{的终边上一点的纵坐标}}{\text{该点到原点的距离}}=\frac{y}{r}$；（v）从以上分析知，角$\alpha$的集合与实数集之间存在着一个单值对应，这一对应关系确定了一种函数关系，其中α是自变量，$\sin\alpha$是自变量α的函数．

（2）切实理解概念的定义中每一字句的真实含义，切忌只看词句及文字的形式．例如，指数函数的定义是：函数$y=a^x$叫做指数函数．若只是形式地记住这句话是不够的，还必须着重弄清以下几点：（i）为什么这是一个函数关

系？（ii）a可以是任意实数吗？若$a=0$，$a=1$可以吗？为什么？（iii）谁是自变量？谁是函数？（iv）函数的定义域、值域各是什么？

（3）充分了解概念的定义中字母、符号的实质意义.有些概念的定义，为了形式简明，使用方便，是用数学式子或数学符号给出的．要深刻理解这一概念，就必须透过字母、符号的这种形式看到它的实质所在，弄清字母、符号的意义．例如，各种指数幂的定义，可分别表示为

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots a}_{n\text{个}};$$

$$a^0=1;$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

如果对式子所反映的内容理解不深，对式中的字母a、m、n分别表示什么弄不清，例如，在前三个式子中，a可以是实数、复数，但在$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$中，$a$只能是实数，对复数则不成立．即是记住了这些式子，也是无济于事的.再如，函数符号$y=f(x)$，其中f不表示任何量，而是表示x与y之间的一个对应关系．

2.弄清概念间的内在联系

每个概念都是在其他概念的基础上建立起来的．因此，弄清概念间的相互联系，是正确理解概念的关键．要弄清概念间的内在联系，特别要注意把同类概念的区别分析清楚，把不同类概念的联系分析透．在分析中，具有种属关系的概念可以列成系统表．例如，数的概念的系统表，四边形概念

的系统表等等；具有平行关系的概念可列成对比表．例如，指数函数和对数函数的对比表等等。

3.注意概念的发展变化

随着中学数学教学内容的不断深化，概念的含义和定义方法也在不断地发展变化．在概念复习中，应注意这种发展变化．例如，“角”的概念，先是平面内的正角，以后发展为平面内的正角和负角，以后又发展为空间两直线的夹角、二面角等．又如，指数幂的概念，当 n 为正整数时，a^n 可定义为 n 个 a 相乘，但当 n 为零、负整数、分数、无理数时，则 a^n 不能再定义为 n 个 a 相乘．

4.注意直接应用概念进行判断和推理论证的练习

直接应用概念进行判断和推理论证，一般说来是比较困难的，但它是学好基础知识的前提．例如，在学习数列和极限时，直接应用数列极限的定义（$\varepsilon—N$）去判断一个数列的极限，远比应用数列极限的运算法则去求一个数列的极限困难得多，但前者对于加深学生对极限概念的理解，考察学生对极限概念的掌握程度大有好处．又如，判断下列四个命题中哪个是正确的？哪个是错误的？

（1）如果一个圆的内接多边形是等边的，则它也是等角的；

（2）如果一个圆的内接多边形是等角的，则它也是等边的；

（3）如果一个圆的外切多边形是等边的，则它也是等角的；

（4）如果一个圆的外切多边形是等角的，则它也是等边的．

这要比直接问“什么是圆的内接正多边形？什么是圆的外接正多边形？”能更好地加深对这两个概念的理解.

二、数学公式的记忆和使用

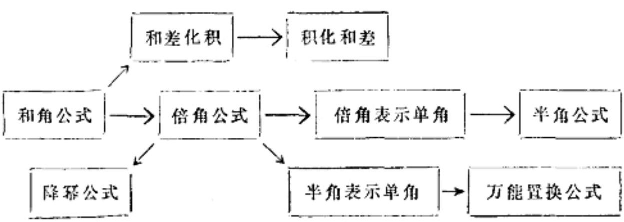
数学公式是客观事物中实际存在的某些数量关系的一种解析表达形式. 它是中学数学的重要组成部分，是解答各种数学问题的重要依据之一. 因此，要狠抓记忆和应用数学公式.

1.公式的记忆

要能熟练地应用公式，首先要牢固地记忆公式. 记忆数学公式的方法因人因公式而异，但也有一些共同的规律.

（1）理解记忆（或叫逻辑记忆）法

数学公式都是根据一定的逻辑关系推导出来的，只有掌握了公式的来龙去脉，才能更快更牢固地记住它，而且一旦忘记了，也能再根据逻辑关系把它推导出来. 例如，三角函数中的和、差、倍、半角公式及和差化积、积化和差等，公式很多，但它们之间存在着严密的逻辑关系，只要掌握了这种逻辑关系，便很容易记住. 它们之间的逻辑关系如下表所示：



此外，对于一些重要公式，不但要记住它，而且要掌握它的证明方法．因为，一些重要公式之所以重要，不仅是因为它在今后经常用到，而且还在于证明这些公式所用的数学方法本身就有一定的代表性．例如，勾股定理、正、余弦定理、万能置换公式、等差、等比数列前 n 项和的公式等．

（2）重点记忆法

古人说："少则得，多则惑"．数学公式很多，要想全部记住是很困难的，也是没有必要的．例如，在上表所列的诸公式中，主要应记住和角公式，其它公式都可由它推导出来．又如，多面体与旋转体的各种体积公式，只要重点记住棱台与圆台的体积公式，就可以根据多面体、旋转体与棱台、圆台的关系推导出其它体积公式．以旋转体为例：

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}h(S+S_1+\sqrt{SS_1})=\frac{1}{3}\pi h(R^2+R_1^2+RR_1).$$

显然，当上底面变为零时，S_1、R_1均变为零，此时公式变为

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}\pi hR^2.$$

此即圆锥的体积公式．

当上底面变得与下底面相同时，即$S=S_1$、$R=R_1$时，公式变为

$$V_{圆柱}=hS=\pi hR^2.$$

此即圆柱的体积公式．

类似地可以讨论多面体的体积公式．

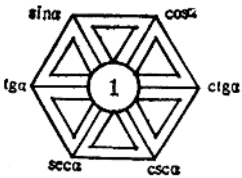
（3）简化记忆法

详细的资料是靠表达它的简化方法来保存在记忆里的．

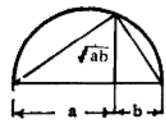
例如，全部诱导公式很多，若死记硬背就很困难．这些公式所表达的三角函数关系存在着一个共同的规律，抓住这个规律就可使全部诱导公式简化为“奇变偶不变，符号看象限”这一句话．而这句话是很容易记忆的．

（4）直观记忆法

直观性不仅是一个很好的教学原则，而且也是一个帮助记忆的好方法．例如，三角函数间基本关系的记忆，可以用如图1—1所示的形式帮助记忆．依图1—1，三角函数间



（图1—1）



（图1—2）

的基本关系可总结为：相间相乘（如 $tg\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$）；顺次相比（如 $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$）；对顶倒数（如$\sin\alpha=\dfrac{1}{\csc\alpha}$）；双边平方（$tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha$）．又如，公式$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，可用图1—2帮助理解和记忆．

（5）实践记忆法

在应用中记忆也是很重要的记忆方法．在应用中要向自己提出记忆公式的任务，且不可每次应用时都依赖于翻书和查数学手册．

2.公式的应用

能否正确、熟练地使用数学公式解决问题，是考察一个学生数学学得好坏的一个重要标志．对于数学公式的应用应

注意以下几点：

（1）准确掌握公式的使用范围

每一个数学公式都受一定条件的约束，都有一定的使用范围．对此，在使用中必须有清楚的了解．例如，公式

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$$

是限定在$M>0$，$N>0$的条件下才成立的，否则就会出现类似$\log_3[(-7)\times(-5)]=\log_3(-7)+\log_3(-5)$的错误．

（2）不仅要注意公式的正面使用，还应注意公式的反面使用

例如，不仅要会将$\lg 5^{\lg 3}$化为$\lg 3\cdot\lg 5$，还应会将$\lg 3\cdot\lg 5$化为$\lg 5^{\lg 3}$，进而也应知道为什么$\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\log_a c=\log_a c^{\log_a b}$．

（3）注意公式的变形

教材中的公式，只是给出了一个标准形式．在复习中，仅仅看到这种标准形式，而看不到它的变形是不够的．例如，正弦定理，教材所给出的标准形式是

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

但它的另一种形式是

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c.$$

利用这种形式解如下一类题显然方便得多：

已知在$\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$，求证$A$、$B$、$C$成等差数列．

（4）注意公式的多方面用途

一个数学公式，往往是在讲某一部分知识时给出的，但

它的应用却绝非仅仅是这一部分知识．例如，二次方程根的判别式$\triangle=b^2-4ac$，是在讲一元二次方程时给出的，但它的应用却远远超出一元二次方程的范围．比如，在讲二次函数时，可以用$\triangle=b^2-4ac$判定二次函数的图象与X轴交点的个数；在讲解析几何时，可以用它来判定直线与二次曲线相交、相离、相切的情况，还可以用来证明不等式……．又如，正、余弦定理是解三角形这部分内容讲的，但它不仅可以用来解三角形，也可以用来解决与三角形边角关系有关的证明题，也是布列含有三角形边角作为未知数或变量的方程和函数关系式的依据．

三、逻辑推理能力的训练

逻辑推理能力，就是运用形式逻辑和辩证逻辑的思维方法和规律来建立概念、进行判断推理等思维活动的能力．它是由数学本身的特点所决定的，是智能发展的核心．因此，在复习中，必须加强逻辑推理能力的训练．

1.要加强逻辑表达训练

数学逻辑表达主要有书面和口头两种形式.要作出正确、严谨、规范、简捷的表述，必须：

（1）正确理解和使用数学用词

数学用词都是具有逻辑意义的词．在中学数学里常用的词有："或"、"和"、"且"、"非"、"有，只有"、"有且只有"、"当、仅当"、"当且仅当"、"充分条件"、"必要条件""充要条件"、"不妨假设"、"任取"、"只须"、"互为"等等．例如求函数$y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\lg(2x+1)}$的定义域．

解： 要使函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\lg(2x+1)}$ 有意义，必须且只须

$$\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ 2x+1>0,\\ 2x+1\neq 1\end{cases}$$

成立．解此不等式组，得

$$-\frac{1}{2}<x\leqslant 2，且x\neq 0．$$

故函数的定义域为 $-\frac{1}{2}<x\leqslant 2$，且 $x\neq 0$．

这里的逻辑用词“要使”、“必须且只须”、“且”等定要使用准确，否则就会造成表述之误．

（2）正确运用数学语句

数学语句训练就是用数学语言说和写的训练．为此，首先要明确表达要求，其次要掌握表达模式．表达要求是表述目的的，表达模式是阐明目的的过程格式．例如，证明题的模式是：“已知——求证——证明——”；证明如果用综合法，其模式就是“因为——，所以——”；证明如果用分析法，其模式是“假定——，必须——，由可逆性（如果可逆的话），得——”．常用的数学语句有：步骤语句，比如“移项，得”、“整理，得”、“查表，得”、“两式相加，得”等等．关联语句，象“如果——，那么——”，“因为——，所以——”，“设——，则——”等等．转折、概括语句，象“因为——，又——，而——，所以——，即——，从而——，故——”等．能正确运用这些语句，表述才会清晰条理．

（3）认真读书，严格解题

数学书是运用数学语言和逻辑格式表述数学问题的样典.认真读书可以在潜移默化中掌握逻辑表述的知识和技能，提高表述能力.解题可以贯通所学知识、方法和技能，在运用知识中，提高表述能力.

2.要加强准确表述概念的训练

概念是掌握基本知识的前提，是判断推理的依据.因此在复习中，要加强准确表述概念的训练.只有形成正确、清晰的概念，才能进行正确的判断和推理.例如，

$$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{3}i=-\sqrt{6}.$$

如果复数概念及其运算规律不清，就会出现

$$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-3)\cdot(-2)}=\sqrt{6}$$

之类的错误.

又如，若概念不清，对于下面的推理就找不出错误所在：

$$\because\quad \frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \lg\sin\frac{\pi}{6}=\lg\sin\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad 2\lg\sin\frac{\pi}{6}>\lg\sin\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \lg\sin^2\frac{\pi}{6}>\lg\sin\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\pi}{6}>\sin\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{2},$$

即 $\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$.

3.要加强逻辑推理严谨性的训练

数学知识不是一个单纯的结论，而是一个分析、归纳、概括、抽象的思维过程.加强逻辑推理严谨性的训练，就是要在这个过程中，加强逻辑判断、逻辑推理及逻辑论证能力的训练.训练中应做到：

（1）判断要准确

判断是思维的一种形式.要判断准确，必须掌握必要的命题知识.

（i）数学命题　数学命题就是一个数学的判断.数学命题多属假设判断，它的一般形式是“如果……，那么……”或“若……，则……”.命题中给出的假设叫前提（条件），经判断得到的断案叫终结（结论）.

（ii）数学命题的条件

数学命题的条件有充分条件，必要条件和充分必要条件三种.

对于一个数学命题“若A则B”来说，如果有了条件A，就可以保证结论B成立，那么就说条件A对于结论B是充分的；如果没有条件A，必定没有结论B，那么就说条件A对结论B是必要的.

如果原命题“若A则B”成立，则A是B的充分条件；如果否命题“若不A则不B”成立，则A是B的必要条件.因此，要确定A是不是B的充分条件，只要看命题“若A则B”是否成立即可；要确定A是否是B的必要条件，只要看否命题“若不A则不B”是否成立，或看其等价命题——逆命题“若B则

A"是否成立即可．

由于原命题"若A则B"与其逆否命题"若不B则不A"等价，所以若A为B的充分条件，则B就为A的必要条件．

在复习中，除明确什么是充分条件，什么是必要条件以及它们之间的关系外，还必须分清以下三种类型的条件：

①充分而不必要的条件

若原命题"若A则B"成立，但其逆（或否）命题"若B则A"（或"若不A则不B"）不成立，就说条件A是B成立的充分而不必要的条件．例如命题，"若线段AB、$A'B'$是全等$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的对应边，则$AB=A'B'$"成立，但其逆命题"若$AB=A'B'$，则AB、$A'B'$是全等$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的对应边"不成立，所以，AB、$A'B'$为全等$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的对应边是$AB=A'B'$的充分而不必要的条件．

②必要而不充分的条件

若原命题"若A则B"不成立，但其逆(或否)命题成立，就说条件A是B成立的必要而不充分的条件．例如，命题"若$AB=A'B'$，则$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$"不成立，但其逆命题"若$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，则$AB=A'B'$"成立．所以，$AB=A'B'$是$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$成立的必要而不充分的条件．

③充分必要条件

若原命题"若A则B"成立，其逆（或否）命题也成立，则说条件A是B成立的充分必要条件．例如，"若$\triangle ABC$为直