



普通高等院校大学数学系列教材

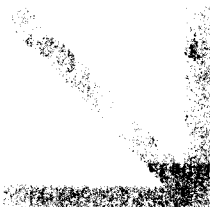
微积分 (上)

萧树铁 扈志明 编著

清华大学出版社



<http://www.tup.com.cn>



普通高等院校大学数学系列教材

微积分 (上)

萧树铁 扈志明 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

全书分上、下两册.上册包括函数、函数的极限、函数的导数、微分与不定积分、定积分、空间解析几何6章内容和一个附录,附录包括初等代数中的几个问题、平面解析几何、集合与逻辑符号等内容.书中每节都配有适量的习题,每章配有部分具有一定难度的复习题,书末对大部分题目都给出了答案或提示.

本书结构严谨、例题与插图丰富、叙述直观清晰、通俗易懂,可供一般工科院校非数学专业的学生使用.

版权所有,翻印必究.举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上)/萧树铁,扈志明编著. —北京:清华大学出版社,2006.4

(普通高等院校大学数学系列教材)

ISBN 7-302-12214-8

I. 微… II. ①萧… ②扈… III. 微积分—高等学校—教材 IV. O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第002065号

出 版 者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

组稿编辑:佟丽霞

文稿编辑:王海燕

印 装 者:北京市清华园胶印厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:170×230 印张:10.75 字数:196千字

版 次:2006年4月第1版 2006年4月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-12214-8/O·513

印 数:1~2500

定 价:13.00元

普通高等院校大学数学系列教材

编委会名单

主

任

萧树铁

编

委

王萼芳

龚光鲁

扈志明

计东海

陈冬

大学数学系列课程“微积分”、“线性代数”和“概率论与数理统计”是大学理工、管理等各专业的重要基础课程. 随着我国经济的高速发展, 高等教育的日益普及, 需要培养出大批应用型工程技术人员. 同重点大学相比, 以培养应用型人才为主的普通高校在教学目标、教学内容、教学方式等方面都有很大的不同. 而这类普通高校学生规模更大, 但师资力量和教学条件却相对较弱. 因此, 编写高质量的面向此类高校的教材, 对于促进教学改革, 提高我国高等教育的教学质量, 更具迫切性和非常重要的现实意义.

为此, 我们组织清华大学、北京大学、哈尔滨理工大学、北京联合大学等高校的老师, 编写了这套面向普通高校的“普通高等院校大学数学系列教材”, 包括“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”及与每门课程主教材配套的教师用书(习题详细解答)、电子教案和学习指导. 本套教材的作者均长期从事大学数学的教学工作, 学术水平高, 教学经验丰富, 并编写出版过相关的教材, 对大学数学系列课程的教学内容和课程体系改革有深入的研究. 同时, 来自于普通高校教师的参与使本套教材更有针对性, 更符合当前这类高校培养目标的要求和基础数学教学的实际情况.

本套教材编写的主要原则是: 强调各门课程整体的理念、基本方法和适当的应用. 由于这三门课都属于基础课程, 所以对其内容的改革应当慎重. 这套教材内容涵盖了教育部发布的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”. 在取材方面, 不是简单地对内容进行增删, 而是在努力深入的基础上尽量做到“浅出”.

本套教材的全部讲授时间大约为 260 学时, 其中微积分

140 学时、线性代数、概率论与数理统计各为 60 学时. 教师还可以根据本校的实际情况对课时作一定的增减, 重要的是: 每门课都应配置适当学时(例如, 总学时的 $1/3$ 左右)的习题课.

清华大学出版社对本套教材的编写和出版给予了各方面的支持, 佟丽霞编辑为本书做了大量的组织和文字工作.

尽管作者都有良好的愿望和多年的教学经验, 但由于这一工作的难度较大, 时间又比较仓促, 各方面的问题肯定不少. 欢迎广大师生和各方人士提出宝贵意见, 以便进一步修改.

萧树铁

2006 年 4 月

前言

微
积
分
(上)

本教材是为一般院校非数学专业的学生编写的. 考虑到这类院校学生的特点, 这本教材从内容上作了一些改动. 由于微积分这门课程已有近 300 年的历史, 经过长时期的锤炼, 对内容作重大精简的空间已经很小了. 故所作的改动主要是相对当前流行的教材而言的.

时下国内流行的教材基本上是在 20 世纪 50 年代前苏联各类“高等数学”教材的基础上加工精练而成的, 其内容大都包括两部分: 微积分及数学分析, 前者已被历史证明是一个强有力的工具, 后者主要为前者奠定一个坚实的理论基础, 其自身已发展为数学的一个强大的分支. 在一般情况下, 它们各有其重要性, 但从教学的角度来看, 作为教学内容, 对不同的学习者, 二者之间的分寸的确不易把握.

笛卡儿曾经说过, 只有两种方法使人们得到真正的知识: 清晰的直觉和必要的推理. 这句话对微积分的教学很有现实意义. 直觉必须尽可能“清晰”, 这是对微积分教材的基本要求, 尽管做到这一点的难度很大; 而推理则应根据不同的对象确定其“必要”的程度. 总的来说, 应该在教学内容的安排上, 尽可能使学者都能体会到这两者的作用. 通过学习, 能把微积分看成一个整体. 所谓必要的推理, 就是根据它们在整体中所处的地位给它一个合适的安排, 而不是使学生只知道一些名词、一些彼此孤立的定理及其证明.

本书力图按此原则来安排内容. 首先, 对本书的核心内容——微分和积分基本上使其“返璞归真”. 例如, 为了描述不均匀(非线性)变化和不规则几何图形的某些性质, 引入无穷小量及线性逼近的概念(微分)是很直观很自然的, 但它的合理性则需要大量的推理, 这就是极限理论. 本书强调了前

者,而对极限理论只作了我们认为起码必要的推理. 同样,在积分部分我们没有从黎曼-达布和出发而直接从微分的反运算入手引入了定积分并推出了牛顿-莱布尼茨公式,这样不仅节省了课时,而且突出了微积分的统一性,突出了微积分应用的有力工具——微元法.

对于微积分早期描述函数性态的一些直观性较强的命题,本书尽可能加以证明,以完成一个从直观到理性的认识过程,例如罗尔定理,微分和积分的中值定理,微积分基本定理,等等;有一些属于数学分析范畴的命题则只给出直观的描述而不加证明,例如闭区间上连续函数的某些性质等;还有少数直观性不强,但很有用的内容,例如洛必达法则,也给出了必要的推理说明. 此外,在进行推理前,应说明这种推理的必要性,例如极限的惟一性,泰勒公式等.

人们得到的知识还必须在使用中得到巩固和深化,尤其是像微积分这种基础性的知识,因此计算和应用应该是不可缺少的内容. 除了较多的例题之外,本书还附有大量的习题,这就需要有相应的习题课加以配合. 近年来基本上取消习题课的消极后果已经有所体现,应当很好总结一下.

书中带*号的小字部分是供学生阅读的,不必在课堂上讲授.

编写本书的目的,只是试图为一般院校的学生提供一本比较合适的教材. 由于我们自己在这方面的经验也很缺乏,因此特别需要广大师生的批评帮助,以期能不断改进.

编 者

2006年1月

目 录

微
积
分

(上)

第 1 章 函数 1

1.1 函数的概念与图形 1

1.1.1 函数的概念 1

1.1.2 函数的图形 2

1.1.3 分段函数 6

习题 1.1 7

1.2 三角函数、指数函数、对数函数 8

1.2.1 三角函数 8

1.2.2 指数函数 10

1.2.3 反函数 13

1.2.4 对数函数 14

1.3 函数运算 15

1.3.1 函数的四则运算 15

1.3.2 复合函数 16

1.3.3 函数图形的运算——平移 17

习题 1.3 18

1.4 函数的参数表示和极坐标表示 20

1.4.1 函数的参数表示 20

1.4.2 函数的极坐标表示 22

复习题 1 23

第 2 章 函数的极限 25

2.1 函数在一点附近的性态、无穷小量 25

2.1.1 无穷小量 25

2.1.2 无穷小量的运算和无穷小的阶 27

习题 2.1	28
2.2 函数在一点的极限及在一点的连续性	28
2.2.1 函数在一点的极限	28
2.2.2 函数极限的运算、函数在一点的连续性	31
2.2.3 连续函数的性质	32
习题 2.2	35
复习题 2	37
第 3 章 函数的导数	38
3.1 导数的概念	38
3.1.1 正比关系	38
3.1.2 函数在一点的导数	40
习题 3.1	41
3.2 导数的运算	41
习题 3.2	46
3.3 导函数与函数的高阶导数	47
习题 3.3	48
3.4 导数的应用	49
3.4.1 函数的图形	49
3.4.2 函数的极值和最值	53
3.4.3 函数不定式的极限	56
习题 3.4	60
复习题 3	62
第 4 章 微分与不定积分	64
4.1 微分的概念	64
4.2 微分的运算	67
习题 4.2	70
4.3 高阶微分和泰勒公式	70
4.3.1 函数在一点附近的泰勒展开式	70
4.3.2 微分中值定理	73
习题 4.3	75

4.4 不定积分	76
4.4.1 函数求导数的逆运算——不定积分	76
4.4.2 不定积分的性质	77
4.4.3 求不定积分举例	79
习题 4.4	83
复习题 4	85
第 5 章 定积分	87
5.1 定积分的定义	87
5.2 定积分的性质	90
习题 5.2	91
5.3 定积分的计算	92
习题 5.3	94
5.4 定积分的应用	95
5.4.1 极坐标表示下求曲线所围的面积	95
5.4.2 平面曲线的弧长及在一点的曲率	96
5.4.3 旋转曲面所围的体积和面积	99
5.4.4 平面图形的重心	101
5.4.5 变化的力所做的功	103
习题 5.4	104
复习题 5	105
第 6 章 空间解析几何	107
6.1 三维空间的直角坐标	107
习题 6.1	108
6.2 两点间的距离和方向	108
习题 6.2	110
6.3 向量代数	110
6.3.1 向量的加法与数乘向量	111
6.3.2 向量的坐标	113
6.3.3 向量的内积运算	113
6.3.4 向量的外积和混合积运算	114

习题 6.3	117
6.4 平面和空间直线方程	118
6.4.1 平面方程	118
6.4.2 空间直线方程	120
习题 6.4	121
6.5 二次曲面	122
习题 6.5	125
复习题 6	126
附录 A	128
A.1 初等代数中的几个问题	128
A.1.1 一元二次方程	128
A.1.2 代数不等式	129
A.1.3 复数	131
A.1.4 数列	133
A.1.5 二项式定理	134
A.2 平面解析几何	135
A.2.1 平面直线	135
A.2.2 简单二次曲线	136
A.3 集合与逻辑符号	139
A.3.1 集合	139
A.3.2 一些逻辑符号	140
习题答案	141

函 数

第 1 章

微
积
分

(上)

1.1 函数的概念与图形

1.1.1 函数的概念

在日常生活中,有两种常见的量:一种量的值是固定的,称为常量;一种量可以取不同的值,称为变量.函数研究的就是变量之间的对应关系.例如,圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 就给出了面积 S 与半径 r 之间的关系,而周长公式 $l=2\pi r$ 给出的则是周长 l 与半径 r 之间的关系.

* 这里我们假设所研究的对象只有两个变量,其中一个依赖另一个的变化,称之为一元函数.一般的情况是可以有 $m+n$ 个变量,其中 m 个变量依赖于另外 n 个变量的变化,而后 n 个变量中彼此则没有依赖的关系.这种函数称为 n 元向量值函数.

* 在以下的讨论中,只要不特别声明,变量都取值于实数,即有理数(有限或循环小数)和无理数(无穷非循环小数).

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集, f 是定义在 D 上的一个对应关系,若对于任意的实数 $x \in D$, 都有惟一的实数 $y \in \mathbb{R}$ 通过 f 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的一个函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域, 所有函数值构成的集合

$$\{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

现代意义上的函数概念是由德国数学家狄利克雷

(Dirichlet)给出的,而记号 $y=f(x)$, $x \in D$ 则是由瑞士数学家欧拉(Euler)首先使用的.

* 对于一元函数,它的定义域通常是一个有限或无穷的区间,例如开区间 $(-1,0)$, $(0,+\infty)$, 闭区间 $[0,5]$, $[-5,0]$, 半开半闭区间 $(-\infty, 2]$, 等等.

例1.1 求圆的面积作为半径的函数及周长作为半径的函数的定义域和值域.

解 由于圆最小可以收缩成一个点,所以半径最小可以为零.当圆越来越大时,其半径也越来越大,而且可以取到任何给定的正数,从而函数 $S=\pi r^2$ 及 $l=2\pi r$ 的定义域是无穷区间 $[0,+\infty)$,而值域也是无穷区间 $[0,+\infty)$.

例1.2 求函数 $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{1-x}$, $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域.

解 函数 $y=x^2$ 的定义域和值域分别是 $(-\infty,+\infty)$ 和 $[0,+\infty)$;

函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域和值域分别是 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$;

函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域和值域分别是 $[0,+\infty)$ 和 $[0,+\infty)$;

函数 $y=\sqrt{1-x}$ 的定义域和值域分别是 $(-\infty,1]$ 和 $[0,+\infty)$;

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域分别是 $[-1,1]$ 和 $[0,1]$.

例1.3 求狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

的定义域与值域.

解 定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是两个数的集合 $\{0,1\}$.

一般来说,求函数定义域的原则是,当自变量具有实际背景时,其实际变化范围就是函数的定义域,如当自变量表示的是长度、时间、绝对温度时,其值都是非负的,像圆的面积函数和周长函数的定义域就是这种情况;当自变量没有什么具体的实际意义时,函数的定义域就是使函数表达式中的运算都有意义的那些数的集合,这时又称函数的定义域为自然定义域.

1.1.2 函数的图形

最常用的表示函数的方法是数学表达式,除此之外,利用图形表示函数也是一种常用方法.事实上,在现代的函数概念出现之前,人们是将函数等同于

图形的. 那时, 所谓研究函数, 就是研究曲线. 函数 $y=f(x)$, $x \in D$ 的图形指的是 xOy 平面上的点集 $\{(x, y) | y=f(x), x \in D\}$. 图 1.1~图 1.10 是一些常见的幂函数的图形.

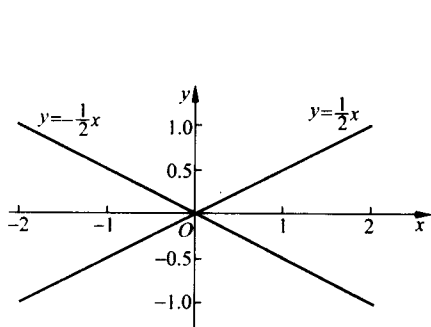


图 1.1

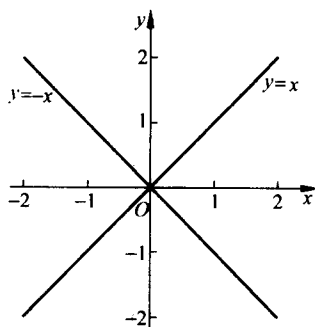


图 1.2

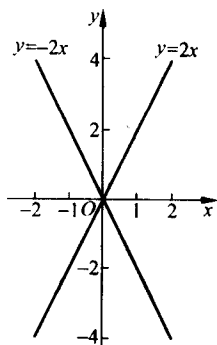


图 1.3

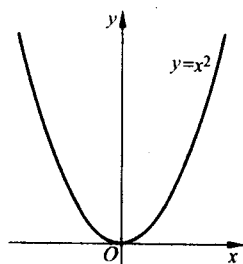


图 1.4

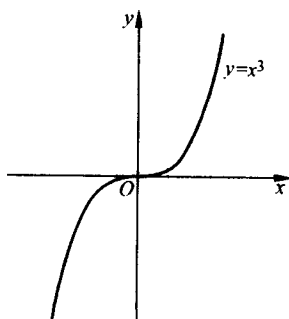


图 1.5

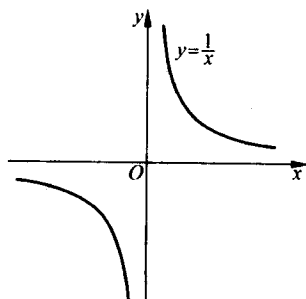


图 1.6

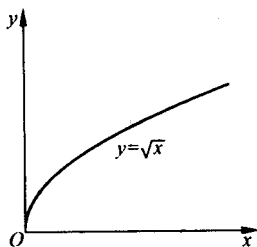


图 1.7

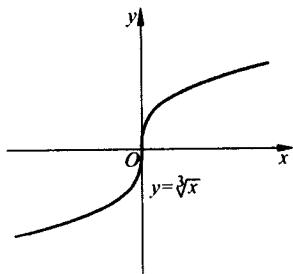


图 1.8

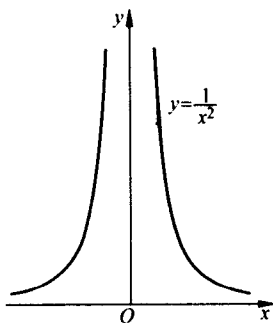


图 1.9

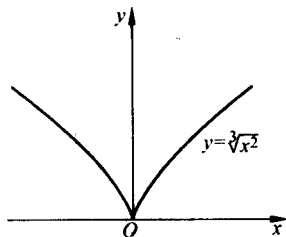


图 1.10

在以上的图形所表示的函数中,特别简单而重要的是以直线为图形的函数 $y=f(x)=kx$,它又叫做线性函数.其函数关系就是我们熟知的正比关系,即函数值 y 与自变量 x 成正比,比例常数为 k .例如,一辆汽车平均每小时行驶 40km,3 小时就行驶 120km,这里 x 是小时数, y 是公里数,而 k 就是一个表示平均速率的比例常数.一般来说,当人们对函数关系不太清楚,只从经验上感到自变量和因变量的变化趋势相同,即二者同时变大或同时变小,在这种情况下,往往容易假设它们之间的函数关系是正比关系.当然,如果没有更充分的理由,这种假设往往是错误的(例如古希腊人认为作用于质点上力的大小与质点的速度成正比).但奇怪的是,如果把这种变化关系限制在一个很小的范围内,再加上一点条件,就可以把它们看成是一种近似的线性(或正比)关系.这是本书将要讨论的一个重要问题.

从这些简单的函数图形能得到函数本身的一些信息:不难看出,图 1.4 所表示的二次函数不可能取负值,它有最小值 0(当 $x=0$ 时),它关于 y 轴对称,即 $f(-x)=f(x)$;当 $x<0$ 时, x 的增加导致 y 减少,直到 x 增加到 0 时 y 减少到 0,反过来, x 的减少导致 y 增加;对于 $x>0$ 的情形可进行类似的讨

论.从图 1.5 看,三次函数可以取任何值,但没有最大值也没有最小值;在整个定义域中, y 随着 x 的增大而增大,而且它与原点对称,即 $f(-x)=-f(x)$.图 1.6 表示的是反比例函数,它也与原点对称,但在 $x=0$ 没有定义;在定义域的两个部分 $x<0, x>0$, y 的值分别都随 x 值的增大而减少;与前面几个函数不同的是,当 x 沿正方向无限制地增加时,对应的 y 值将无限制地减少而接近于 0.

对其他几个函数的图形也可以进行类似的简单分析.注意图 1.10 有一个与其余函数图形不同的特点:它在 $x=0$ 处有一个“尖点”.

为了便于描述上面提到的一些现象,下面引进几个名词.

定义 1.3 对于函数 $f(x)$, 如果存在两个实数 m 和 M , 使对 $f(x)$ 定义域中所有的 x , 不等式

$$m \leq f(x) \leq M,$$

成立, 则称 $f(x)$ 是有界函数, m 叫做 $f(x)$ 的下界, M 叫做 $f(x)$ 的上界.

如果 m, M 中只有一个存在, 则称 $f(x)$ 是半有界的; 如果 m, M 都不存在, 则称 $f(x)$ 是一个无界函数.

在前面所列的函数图形中, 图 1.4, 图 1.7, 图 1.9, 图 1.10 是半有界函数(都是有下界而无上界), 其他都是无界函数. 狄利克雷函数是一个有界函数.

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若对于任意的 $x_1 < x_2$ 且 $x_1, x_2 \in D$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调增加. 这时也称 $f(x)$ 是 D 上的严格单调增加函数, D 又称为函数 $f(x)$ 的严格单调增加区间. 若对于任意的 $x_1 < x_2$ 且 $x_1, x_2 \in D$, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加, D 也称为函数 $f(x)$ 的单调增加区间.

类似地可以定义严格单调减少函数和单调减少区间. 根据定义, 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增加函数, 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上严格单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加.

从幂函数的图形中, 还可以发现函数的另外一个性质, 这就是函数 $y=x^2, y=\frac{1}{x^2}, y=\sqrt[3]{x^2}$ 的图形关于 y 轴对称, 而函数 $y=kx, y=x^3, y=\frac{1}{x}, y=\sqrt[3]{x}$ 的图形则关于坐标原点对称. 我们用“奇偶性”这个概念来描写函数图形的这种对称性质.

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 而且 D 关于坐标原点对称, 如果对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 是区间 D 上的奇函数; 如果对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 是区间 D 上的偶函数.