国家理科基地名牌课程建设项目教材

应用微积分

（供医药学、生命科学等专业使用）

杨静化　主编

科学出版社
www.sciencep.com

国家理科基地名牌课程建设项目教材

应用微积分

（供医药学、生命科学等专业使用）

杨静化　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是医药学、生命科学等专业大学生的高等数学教材，共分 11 章，包括一元函数微积分、微分方程、空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数.

本书作为国家教育部的“国家理科基地创建名牌课程项目”的教改教材，它的一个特点是调整了原来先讲微分学后讲积分学的传统讲授次序，重新架构教学内容体系时更加注重微积分学各部分的内在联系，力图使学生尽快掌握微积分的核心思想. 同时书中介绍了一种国际上流行的且易于掌握的数学软件，使学生学完微积分的基本概念后就能用此软件完成微积分的主要运算，避免了由于积分概念及计算方法讲得过晚而造成与其他专业基础课在配合上的脱节现象 本书注重从实际背景中抽象出数学概念，并且用大量生物数学的应用例子来展示数学理论的应用价值.

本书可作为医药学、生命科学等本科专业的“高等数学”课程的教材，也可供学生作参考之用

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分/杨静化主编 —北京:科学出版社,2005.6
国家理科基地名牌课程建设项目教材
ISBN 7-03-015352-9

Ⅰ. 应… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 微积分－高等学校－教材
Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 047264 号

责任编辑:李 君 吴茵杰 贺丕珍/责任校对:刘小梅
责任印制:刘士平/封面设计:黄华斌

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 6 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2005 年 6 月第一次印刷 印张:27
印数:1—3 000 字数:621 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

序　言

微积分学的核心思想和内容是朴素的、实用的，随着历史的演变和各种研究的深入，它变成了一个庞然大物. 然而面临这个庞然大物，本书尝试在较短的时间内将其核心的概念较为系统地展示给学生，再借助一种易于掌握的数学软件就可以完成微积分学的主要运算. 数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识，还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力，让学生学会用数学的思维方式观察周围事物，并分析和解决实际问题. 这些就是编写本书力图达到的目标.

1998 年至 2004 年，我在中国药科大学“理科基地班”讲授高等数学课程期间，针对医药院校的特点在课程内容体系上做了一些改革的尝试，在课程建设中作为“国家理科基地创建名牌课程项目”于 2003 年得到国家教育部的经费资助，所编写的教材几经修订形成了现在出版的这本《应用微积分》，它有以下 3 个特点：

本书的第 1 个特点是在讲授内容的次序上做了一些调整，并与每章的内容同步地介绍如何使用数学软件进行计算. 目前国内大学的药学专业一般都在第一学期同时开设高等数学、基础化学和普通物理学. 而多数高等数学的教材是先讲微分学，包括微分的运算和应用，然后讲积分学，这样做的好处是数学理论体系的分类清晰；其缺点则是积分概念讲得太晚，使初学者容易把微分学与积分学分割开来，不易掌握微积分的主要概念和理论的内在联系，从而事倍功半. 特别值得注意的是，由于积分概念出现过晚而使高等数学课程无法及时满足基础化学和普通物理学等课程的需求，这是一个长期没有解决的教学问题.

在本书中，第 1 章是讲极限理论，第 2 章是讲微积分的基本概念和微积分基本定理. 用 18 学时就可讲完前两章，使学生尽早地了解和掌握微积分的基本思想，并会用数学软件完成微积分学的主要计算. 几年的教学实践表明，这样做能有效地解决高等数学与其他课程在配合上的矛盾.

本书的第 2 个特点是注重从实际的背景知识抽象出数学概念，通过具体的计算结果解释抽象的概念. 在讲解一些重要概念时，往往从介绍实际问题的背景材料入手，通过类比、推理，然后进行数学抽象，使微积分中主要的概

念、理论和方法的引入符合认识规律和教学规律. 例如,极限概念的引入就是从分析具体问题入手,再抽象出数学概念,从$\sqrt{2}$的计算导出了数列及数列极限的概念. 这种数学的抽象能力正是每一位科学工作者必须具备的基本素质.

本书的第3个特点是注重实用性,作为微积分在医药学和生命科学中的应用,介绍了许多常用的数学方法和生物数学模型的范例. 通过这些应用案例的讲解可以指导学生如何把微积分的理论和方法应用到自己的专业上,增强解决实际问题的能力,从而能够加深对数学理论问题的理解,提高学习兴趣.

讲完本书的全部内容大约需要120学时,如果只讲一元微积分的内容(前6章)大约需要68学时. 每章后面所配的习题量较大,不要求全部完成,可根据各校的要求进行取舍.

由于作者水平有限,书中错误及不足之处在所难免,敬请同行、读者不吝指正.

杨静化

2005年4月

目　　录

第1章 极　限

客观世界的事物总是不断地运动和变化的. 研究事物的变化规律是认识和改造客观世界的需要. 函数关系表达了事物间量的变化,因此微积分学(calculus)以函数为主要研究对象. 极限反映函数在某一过程中的变化趋势,是微积分学的基本概念和理论基础.

第1节 函　数

一、函数定义

客观世界中存在着两种不同的量:一种是在所考虑的问题或过程中,始终保持某个数值不变的量,称为常量(constant);另一种是可以取不同数值的量,称为变量(variable).

例1 正在发育成长的球形细胞的体积 V 与半径 r 的关系为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

在这个问题中,V 与 r 是变量,圆周率 π 是常量.

在许多实际问题中,常用不等式表司变量的变化范围. 假如某天的最高气温为 b,最低气温为 a,用 x 表示当天的气温,则 x 的变化范围是 $a\leqslant x\leqslant b$. 这个不等式也可以记作 $[a,b]$,称为闭区间(closed interval). 如果不包含端点,则记作 (a,b),称为开区间(open interval). 类似地,可定义半开区间(half-closed interval)和无穷区间(infinite interval),即

$$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$(a,b)=\{x:a<x<b\},$$
$$(a,b]=\{x:a<x\leqslant b\},\quad [a,b)=\{x:a\leqslant x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x:-\infty<x<+\infty\}.$$

在例1中,细胞的半径 r 有一定的取值范围 $[0,b)$. 对于任意的 $r\in[0,b)$,都能求出与它对应的体积 V,这个 V 值由 r 值惟一确定. 当变量 r 与 V 之间存在着这种对应关系时,称它们之间存在函数关系.

定义1 对于给定的实数集 D 中的每一个值 x,通过确定的法则 f,都有一个惟一的实数 y 与其相对应,记为

$$y=f(x),\qquad x\in D,$$

则称法则 f 为 D 上的一个函数(function),集合 D 为函数的定义域(damain of definition),当 x 遍取 D 中一切值时,与 x 对应的 y 值组成的实数集 $M=\{f(x):x\in D\}$ 称为函数的值域(range of function).

由于 y 的值随 x 而定,故称 x 为自变量(independent variable),y 为因变量(dependent variable)，习惯上也称 y 为 x 的函数. 当定义域 D 和对应法则 f 确定后，值域 M 也随之确定，因此 D 上的函数也可以看做从 D 到 M 的一个映射，并称 y 为 x 的像，x 为 y 的原像.

例 2 一物体从距离地面为 h 处落下，若不考虑空气阻力，则下落路程 S 与时间 t 之间的关系可表示为

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

此函数的定义域为 $[0,\sqrt{2h/g}]$，值域为 $[0,h]$.

例 3 给一糖尿病患者按每公斤体重口服葡萄糖 1.75 克后，测定其血糖含量数据如下表：

口服葡萄糖后的时间 t(小时)	0	0.5	1	2	3
患者的血糖水平 y(毫克%)	115	150	175	165	120

由表中数据可知，患者的血糖水平 y 是时间 t 的函数，其定义域为 $\{0,0.5,1,2,3\}$，值域为 $\{115,150,175,165,120\}$.

例 4 图 1-1 取自某蒸馏塔顶部的温度自动记录仪，为 8 时至 16 时塔内温度的变化曲线. 从图中曲线可以直观地看到，自 8 时开始到 16 时任何时刻的塔内温度. 它形象地表示了温度 T 随时间 t 而改变的变化规律.

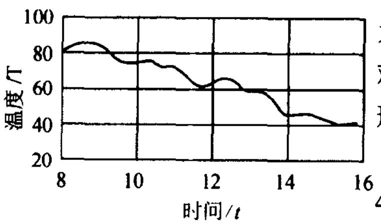

图 1-1

解析法(如例 1，例 2)，列表法(如例 3)，图示法(如例 4)是 3 种常用的函数表示法. 它们具有不同的特点，用于不同的情形. 今后我们在研究变量间的关系时，主要应用解析法.

例 5 当函数关系由等式 $y^2=x$ 表示时，函数的定义域为 $x>0$. 但是与每一个可取的 x 值对应的 y 值有两个：$y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$. 例如，当 $x=4$ 时，$y=2$ 和 $y=-2$，等等.

根据函数的定义，$y=f(x)$ 对定义域内每一个确定的 x 值，只有惟一的 y 值与其相对应，称为单值函数(one-valued function). 而例 5 中的函数，对于定义域中的一个 x 值，却能得到两个不同的 y 值. 这类由定义域中的一个 x 值，能得到两个以上不同的 y 值的函数，称为多值函数(multiple-valued function). 本书若无特别说明，所用的函数均指单值函数.

在平面上取定一个直角坐标系 xOy 之后，每一个函数 $f:D\to M$ 都在平面上有它的图形. 更确切地说，在平面上坐标为 $(x,f(x))$ $(\forall x\in D)$ 的全体点集称作 f 的图形或图像.

例 6 函数 $y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $M=\{-1,0,1\}$. 这种在定义域的不同部分，采用不同表达式表示的函数，称为分段函数(piecewise function).

分段函数的图形由几段不同的曲线组成，例 6 中的分段函数称为符号函数，记为

sgn$x$. 图形见图 1-2.

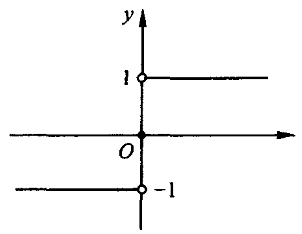

图 1-2

例 7 $|x| = x\operatorname{sgn}x$ 称为 x 的绝对值. 函数 $y = |x|$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$. 图形见图 1-3.

例 8 对于任意实数 x, 取不超过 x 的最大整数值, 称为对 x 取整, 记作 $[x]$. 例如 $[0.36] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-\pi] = -4$ 等等. 如果以 x 为自变量, 则函数 $y = [x]$ 称为**取整函数**. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为整数集 $\mathbb{Z}$. 图形见图 1-4.

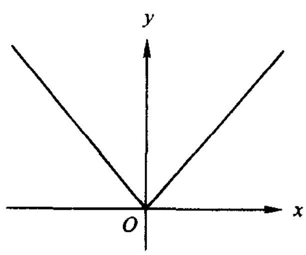

图 1-3

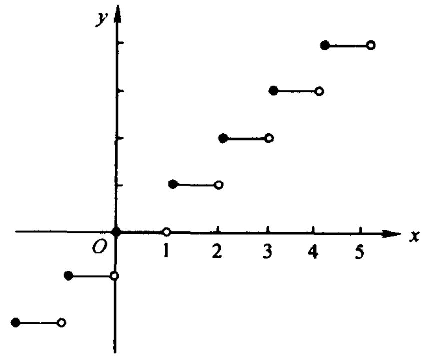

图 1-4

二、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义. 若存在一个正数 M, 对于所有的 $x \in (a, b)$, 恒有 $|f(x)| \leqslant M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内**有界**(bounded), 如果不存在这样的正数 M, 则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内**无界**(unbounded).

例如, 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ 为实数集), 恒有 $|\sin x| \leqslant 1 = M$, 因此函数 $y = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 而函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 内无界, 在 $[1, +\infty)$ 上有界.

2. 函数的单调性

如果函数 $y = f(x)$ 对区间 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调递增的; 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调递减的. 单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**(tone function).

单调递增函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐上升的曲线(图 1-5); 单调递减函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐下降的曲线(图 1-6).

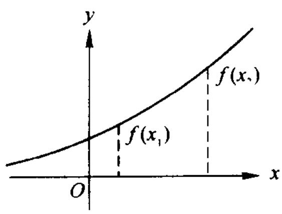

图 1-5

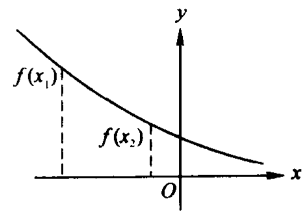

图 1-6

3. 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$对其定义域内的每一个 x,都有 $f(-x)=f(x)$成立,则称 $f(x)$为偶函数(even function).如果函数 $y=f(x)$对其定义域内的每一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$成立,则称 $f(x)$为奇函数(odd function).

在中学数学里已经知道,奇函数的图形关于原点对称;偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)(x\in D)$,若存在一个不等于零的常数 T,使得对每一个 $x\in D$,只要 $x+T\in D$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为周期函数(periodic function),称常数 T 为这个函数的周期.周期函数的周期不是惟一的,通常所讲的周期指它的最小正周期.例如,$2k\pi(k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$都是函数 $y=\sin x$ 的周期,而最小正周期为 2π.

三、复合函数和反函数

为了求出竖直上抛物体的动能 E 对于时间 t 的函数,应用公式

$$E=\frac{1}{2}mv^2, \tag{1.1}$$

式中 m 为物体的质量,v 为竖直上抛物体在时间 t 的速度.若上抛时的初速度为 v_0,则竖直上抛物体在时间 t 的速度由

$$v=v_0-gt \tag{1.2}$$

惟一确定.将此惟一确定的 v 代入(1.1)式,得到竖直上抛物体的动能 E 对于时间 t 的函数关系:

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2. \tag{1.3}$$

(1.3)式所表示的函数关系是由(1.2)式代入(1.1)式后“复合”而成.在微积分学中经常会遇到这类函数.

定义 2 设 $y=f(u)$是数集 E 上的函数,$u=\varphi(x)$是从数集 D 到数集 E 的函数,对于每一个 $x\in D$,经过中间变量 u,都有惟一的 y 与之对应,从而得到 D 上的一个新函数,记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

称为数集 D 上的复合函数(compound function). 其中 u 称为中间变量(intermediate variable), 显然 $u=\varphi(x)$ 的值域含在 $y=f(u)$ 的定义域中.

例 9 设 $y=\lg u, u=1-x^2$, 则有复合函数 $y=\lg(1-x^2)$. 由于 $\lg u$ 的定义域为 $u>0$, 只有 $1-x^2>0$, 即 $x\in(-1,1)$ 时, 复合函数 $y=\lg(1-x^2)$ 才有意义, 故这个函数的定义域为 $(-1,1)$.

例 10 复合函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 由 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 复合而成. 但是函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$, 与函数 $u=2+x^2$ 的值域 $u\geqslant 2$ 无公共部分, 因此这个复合函数不存在.

例 11 函数 $y=\sqrt{\lg(x^2-1)}$ 由 $y=\sqrt{u}, u=\lg v, v=x^2-1$ 复合而成, 它的定义域为 $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$.

在微积分的计算中, 经常遇到复合函数, 并且需要分析它由哪几个函数复合而成.

定义 3 对于函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$, 如果满足条件:

(1) $y=f(x)$ 的值域包含在 $x=g(y)$ 的定义域内, 并且

$$g[f(x)]=x; \tag{1.4}$$

(2) $x=g(y)$ 的值域包含在 $y=f(x)$ 的定义域内, 并且

$$f[g(y)]=y; \tag{1.5}$$

则称函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 互为反函数(inverse function), 习惯上将 $x=g(y)$ 改写成 $y=g(x)$ 后, 记作 $y=g(x)=f^{-1}(x)$, 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

事实上, 要验证函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 是否互为反函数, 根据(1.4)和(1.5)式, 只要验证等式 $g[f(x)]=x$ 和 $f[g(y)]=y$ 即可.

例 12 对于函数 $f(x)=2x+3, g(x)=\dfrac{x-3}{2}$ 有

$$f[g(x)]=2\,\frac{x-3}{2}+3=x;\quad g[f(x)]=\frac{(2x+3)-3}{2}=x,$$

因此 $f(x)=2x+3$ 和 $g(x)=\dfrac{x-3}{2}$ 互为反函数.

例 13 对于函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\sqrt{x}$, 当 $x=2$ 时, $g[f(2)]=2$, 等式 $g[f(x)]=x$ 成立; 当 $x=-2$ 时, $g[f(-2)]=2$, 等式 $g[f(x)]=x$ 不成立. 产生这种情形的原因, 是由于函数 $f(x)=x^2$ 在大于零的每一个函数值, 对应着两个不同的自变量值.

定义 4 设 $y=f(x)$ 是数集 D 上的函数, 如果对 D 中任意两点 x_1 和 x_2, 当且仅当 $x_1=x_2$ 时才有 $f(x_1)=f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是一一对应的, 或称 $y=f(x)$ 为1-1 函数.

定理 1 若 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数, 则 $y=f(x)$ 为 1-1 函数.

证 设函数 $f(x)$ 单调递增. 对于 D 中的任意两点 x_1 和 x_2, 当 $x_1>x_2$ 时, $f(x_1)>f(x_2)$; 当 $x_1<x_2$ 时, $f(x_1)<f(x_2)$. 所以只有当 $x_1=x_2$ 时, 才有 $f(x_1)=f(x_2)$, 因此 $y=f(x)$ 为 1-1 函数. 同样可证, 当 $f(x)$ 为单调递减函数时, $y=f(x)$ 为 1-1 函数.

若 $y=f(x)$ 是 1-1 函数, 则每一个函数值 y 与惟一的 x 值相对应. 如果以 y 为自变量, x 为 y 的函数, 这个新函数就是 $y=f(x)$ 的反函数. 因此得到下面的定理:

定理 2 每一个 1-1 函数都有反函数存在.

由定理 1 和 2 可得到下面的

定理 3 若 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数,则一定存在反函数.

对于一些不存在反函数的函数,限制它的定义域,使之成为单调函数后,就可以有反函数.例如函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增,因此将它的定义域限制为 $[0,+\infty)$ 后,就存在反函数 $f(x)=\sqrt{x}$.

在研究一个函数时,必须掌握它的"三要素",即函数关系、定义域和值域.虽然由函数关系与定义域就可以确定值域,但值域为其反函数的定义域.此外,熟悉函数的图形,有助于函数的理论分析和实际应用,因此,在研究函数时,可先作出它的图形,以利于分析.

四、初 等 函 数

(一) 基本初等函数

中学数学学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数都是经常遇到的简单函数,将它们与常量合在一起,统称为基本初等函数(basic elementary function).现在扼要地复习如下:

1. 常量

$y=C$ (C 为常量)

定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{C\}$,图形为平行于 x 轴,截距等于 C 的直线.

2. 幂函数

$y=x^{\alpha}$(α 为实数)

定义域、值域与图形随 α 值不同而异,但不论 α 为何值,x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义,所有图形都通过点 $(1,1)$(图 1-7).

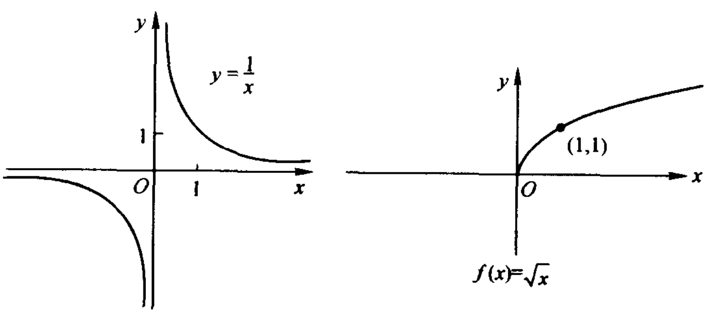

图 1-7

3. 指数函数

$y=a^x(a>0,a\neq1)$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$,图形通过点 $(0,1)$.当 $a>1$ 时,函数单调递增,当 $0<a<1$ 时,函数单调递减(图 1-8).

4. 对数函数

$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，图形通过点$(1,0)$．当 $a>1$ 时，函数单调递增，当 $0<a<1$ 时，函数单调递减（图 1-9）．对数函数与指数函数互为反函数．

5．三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$

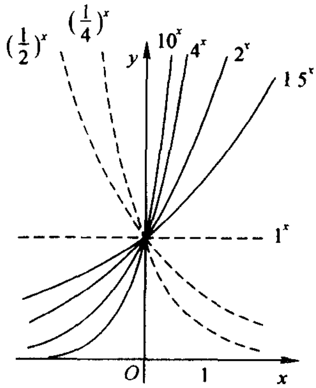

图 1-8

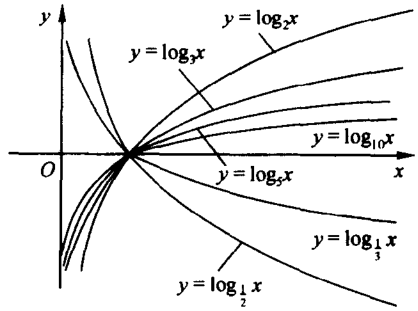

图 1-9

它们的定义域、值域及有关性态列表说明如下：

函数名称	正弦	余弦	正切	余切
函数记号	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$x\neq\frac{(2k+1)}{2}\pi$	$x\neq k\pi$
值　域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
周　期	2π	2π	π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
图　形	图 1-10(a)	图 1-10(b)	图 1-10(c)	图 1-10(d)

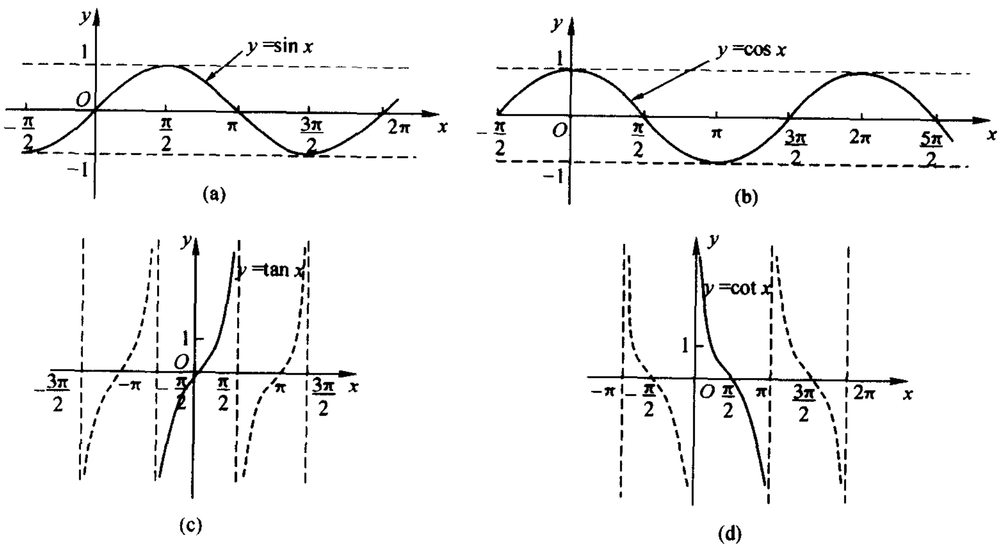

图 1-10

除此外还有正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 与余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6. 反三角函数

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$

三角函数不是 1-1 函数，为了得到它的反函数，需要限制它的定义域. 由三角函数的讨论可知：将 $y=\sin x$ 的定义域限制为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，将 $y=\cos x$ 的定义域限制为 $[0,\pi]$ 后，便成为单调函数，故存在反三角函数，其值域分别为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 和 $[0,\pi]$. 可类似地讨论 $\tan x$ 和 $\cot x$.

它们的定义域、值域及有关性态列表说明如下：

函数名称	反正弦	反余弦	反正切	反余切
函数记号	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
主值区间	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
图形	图 1-11(a)	图 1-11(b)	图 1-11(c)	图 1-11(d)

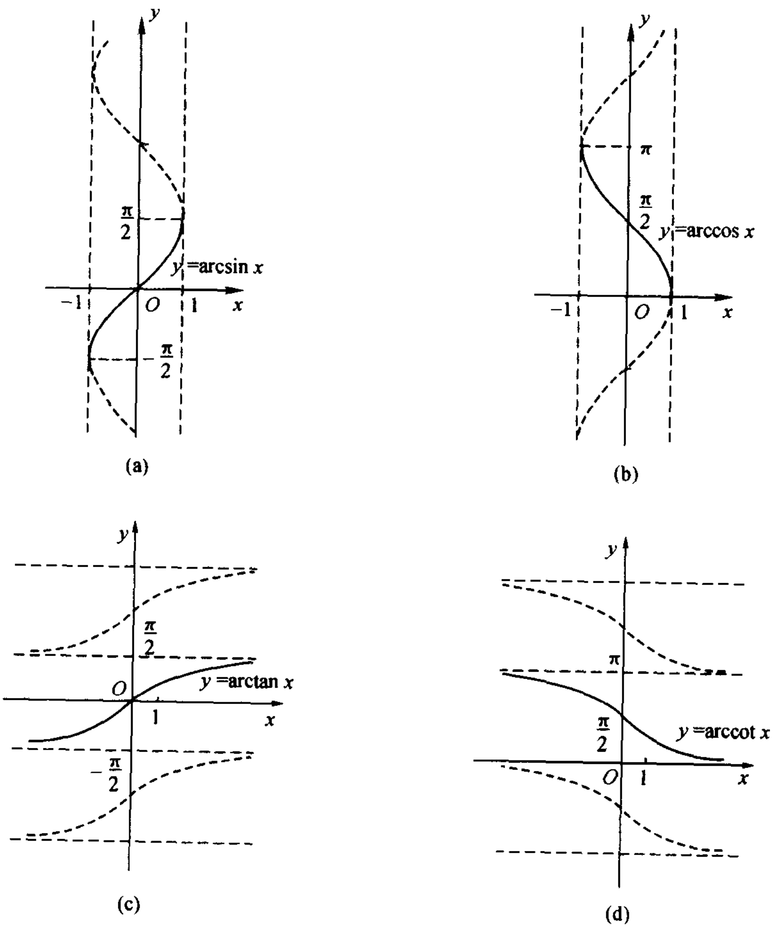

图 1-11

(二) 初等函数

由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除及复合运算而构成的,可以用一个解析式表示的函数称为初等函数(elementary function). 例如一次函数 $y=ax+b$,二次函数 $y=ax^2+bx+c$,多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 以及 $y=\lg x+\tan\sqrt{x^2+a^2}$, $y=\mathrm{e}^{3x-5}$, $y=\cos(a^x-2x)$等常见的函数都是初等函数.

由于初等函数都可以分解为若干基本初等函数的四则运算和复合,今后在研究有关初等函数的问题时,总是先研究基本初等函数,然后讨论函数的四则运算和复合的规则.

除初等函数外,还存在非初等函数. 例如分段函数,它不能用一个解析式表示,所以不是初等函数.

(三) 双曲函数

对任何函数,如果当 $f(x)$有意义时,$f(-x)$也有意义,则可以写成

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2} \tag{1.6}$$

的形式. 显然$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$是一个偶函数,而$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$是一个奇函数,因此任何一个定义在对称区间上的函数,都可以表示为一个偶函数(称为偶部)与一个奇函数(称为奇部)之和.

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$的定义域$(-\infty,+\infty)$为对称区间. 当 $a=\mathrm{e}$($\mathrm{e}=2.71828182845904\cdots$,是一个无理数)时,表示为(1.6)式,得到

$$\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}, \tag{1.7}$$

将它的偶部和奇部分别记作 $\mathrm{ch}x$ 和 $\mathrm{sh}x$,称为双曲余弦函数和双曲正弦函数;并将奇部与偶部之比记作 $\mathrm{th}x$,称为双曲正切函数,即

$$\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \mathrm{sh}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \mathrm{th}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

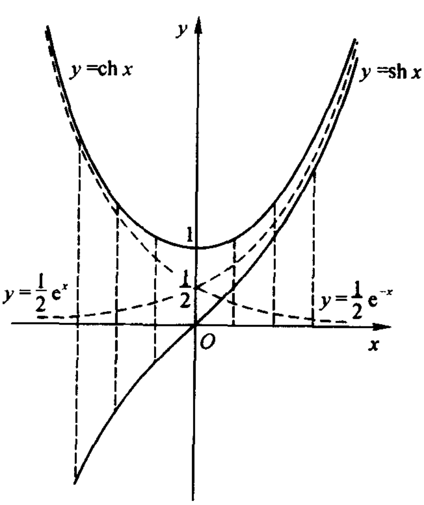

图 1-12

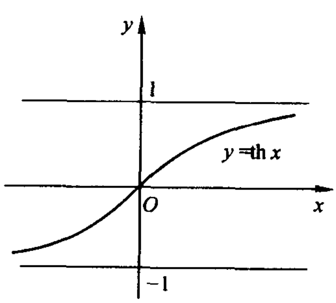

图 1-13