经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

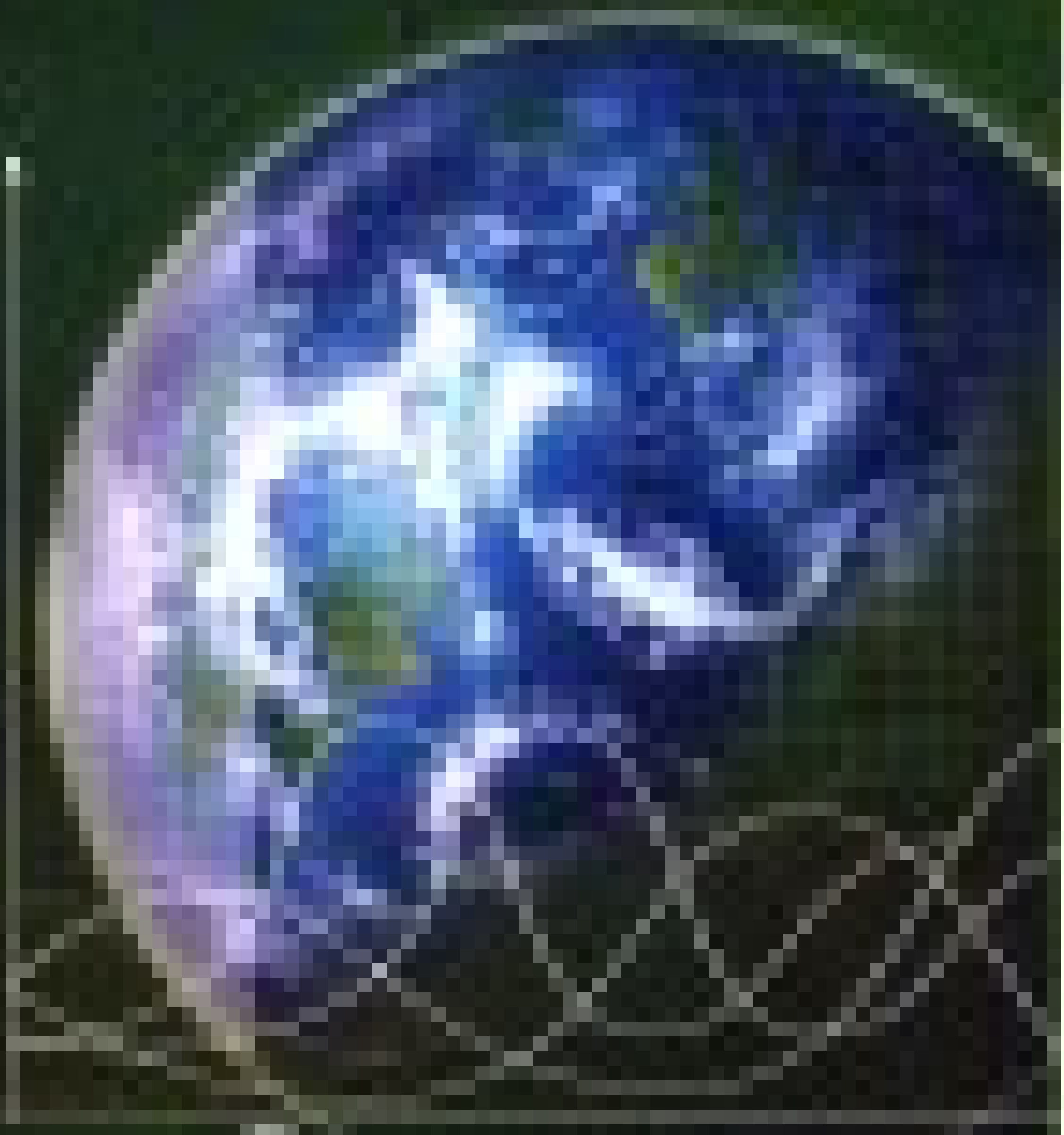
数学 4（必修）

SHUXUE

北京师范大学出版社

数学 4

SHUXUE



经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 4（必修）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　张饴慈　唐安华

编写人员（按 姓 氏 笔 画 排 序）

付小平　石拥军　李方烈

张饴慈　唐安华　隋丽丽

北京师范大学出版社

·北 京·

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？ 20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功.

严士健　王尚志

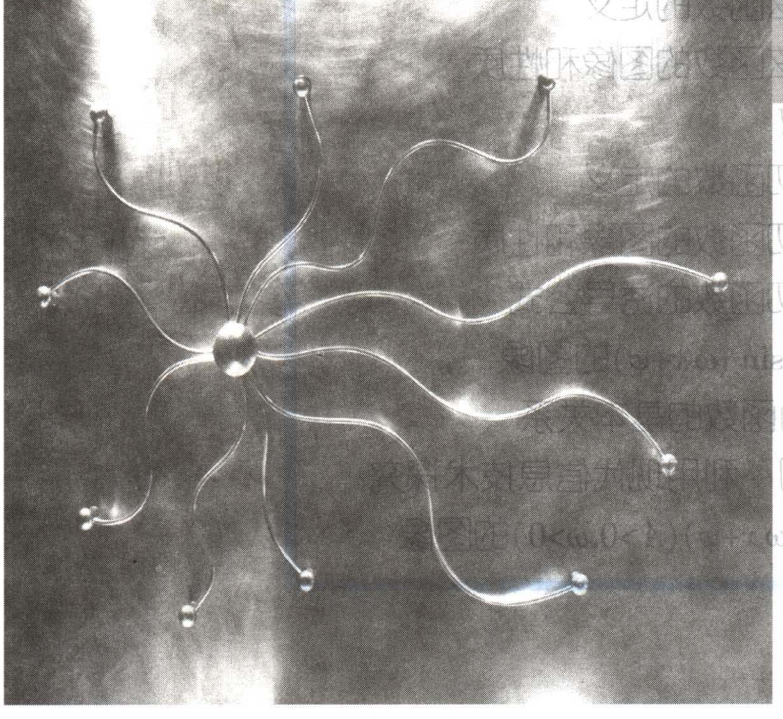
2004 年 6 月于北京

目　录

第一章 三角函数

周期现象是自然界中一类基本的现象，周期函数是刻画周期现象的函数模型. 三角函数是一类重要的周期函数，也是一类基本的初等函数. 它在天文测量、大地测量、工程测量、机械制造、力学、光学、电学、地球物理学及图像处理等众多学科和领域中都有广泛的应用.

本章将从周期现象出发，引入弧度制，学习三角函数的图像和性质，并通过实例了解三角函数在日常生活中的简单应用.



§1 周期现象与周期函数

问题提出

观察钱塘江潮的图片,我们看到:波浪每间隔一段时间会重复出现.这种现象被称为周期现象.在我们的日常生活、生产实践中存在着大量周期性变化的现象.下面我们将通过实例,从数学的角度来探究周期现象中所蕴含的规律.

钱塘江潮

分析理解

众所周知,海水会发生潮汐现象.大约在每一昼夜的时间里,潮水会涨落两次,因此潮汐是周期现象.当潮汐发生时,水的深度会产生周期性变化.为了研究水深的变化规律,我们可以构造一个函数.例如,确定一个位置,考察该处水深 H 和时间 t 的关系,那么 H 就是 t 的函数.

表 1-1 是某港口在某一天水深与时间的对应关系表,通过表中数据,我们来研究 $H(t)$ 这个函数.

表 1-1

时刻	水深/m	时刻	水深/m	时刻	水深/m
1:00	5.0	4:00	7.3	7:00	4.1
2:00	6.2	5:00	6.2	8:00	3.1
3:00	7.5	6:00	5.3	9:00	2.5

续表

时刻	水深/m	时刻	水深/m	时刻	水深/m
10:00	2.7	15:00	7.5	20:00	3.1
11:00	3.5	16:00	7.3	21:00	2.5
12:00	4.4	17:00	6.2	22:00	2.7
13:00	5.0	18:00	5.3	23:00	3.5
14:00	6.2	19:00	4.1	24:00	4.4

根据上表提供的数据在坐标纸上可以作出水深 H 与时间 t 关系的散点图(图 1-1).

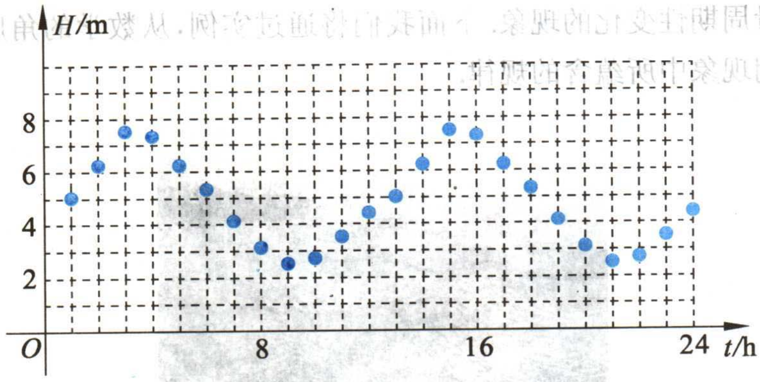


图 1-1

抽象概括

从散点图可以看出,每经过相同的时间间隔 T(12 h),水深就重复出现相同的数值,即 $H(t+T)=H(t)$,水深基本上是随着时间周期性变化的. 在数学上,如果存在不为 0 的实数 T,使得对定义域内的任意一个 x,函数 $y=f(x)$都满足:

$$f(x+T)=f(x),$$

我们就把这种函数称为**周期函数**,T 称为这个函数的**周期**.

实例分析

下面根据散点图,我们分析几个问题,进一步体会周期函数的特点.

(1) 请估计一下 $H(4.5)$的值;不看散点图,请你说出 $t=16.5$ 时 $H(t)$的值.

(2) 在早 4:00～9:00 之间,估计一下 t 取何值时,$H(t)=3.6$ m.

(3) 如果你是一名游客，应选择何时观潮？

(4) 在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮前返回海洋. 假设货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 m，安全条例规定船底与海底之间至少要有 1.5 m 的安全间隙，货船何时能进入港口？在港口最多能停留多久？

解　(1) $t=4.5$ 时，水深 H 大约为 $\frac{7.3+6.2}{2}=6.75\approx6.8$ (m)，根据散点图，水深每隔 12 h 会出现相同的数值，所以，下午 16:30 时，水深约等于 6.8 m.

(2) 根据散点图，$t=7$ 时，水深约为 4.1 m，$t=8$ 时，水深约为 3.1 m，所以，$t=7.5$ 时，水深大约为 3.6 m.

(3) 由散点图，可以估计出，在 3:00 和 15:00，水深取得最大值为 7.5 m，即浪最高，所以，在 3:00 和 15:00，观潮比较合适.

(4) 将散点图用光滑曲线连接. 由给定的条件，水深至少为5.5 m 时才能保证货船安全驶入港口. 为此在图 1-2 中作一条 $H=5.5$ m 的水平直线 a. 图像在 a 上方时，其对应的 t 的范围为货船驶入港口的安全时间段，从图中可以看出，这个时间段近似为：1:30～5:40 或 13:30～17:40，为了保险，最好是 1:40～5:30 或13:40～17:30（允许有 10 min 左右的偏差），在港口内停留的时间大约为 8 h，早上4 h，下午 4 h.

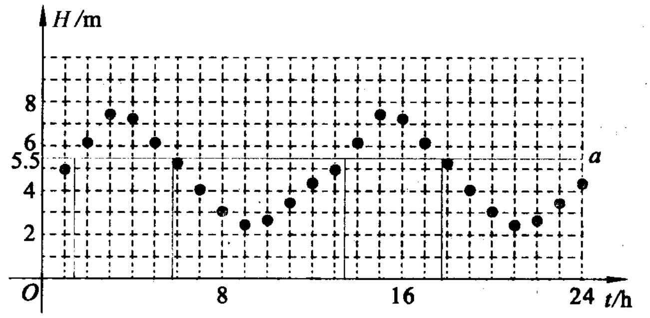


图 1-2

通过上述实例，我们对周期现象和周期函数有了初步了解. 事实上，这样的周期函数在我们身边还有许多. 下面我们再分析几个例子.

例 1　地球围绕着太阳转（如图 1-3），地球到太阳的距离 y 是时间 t 的函数吗？如果是，这个函数 $y=f(t)$ 是不是周期函数？

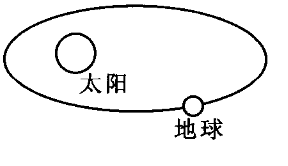


图 1-3

根据物理学知识，我们知道在任何一个确定的时刻，地球与太阳的距离 y 是唯一确定的，因此 y 是 t 的函数. 并且每经过一年地球围

绕着太阳转一周. 无论从哪个时刻 t 算起，经过一年时间，地球又回到原来的位置，所以，我们有：$f(t+T)=f(t)$，其中 T 为一年，$y=f(t)$ 是周期函数.

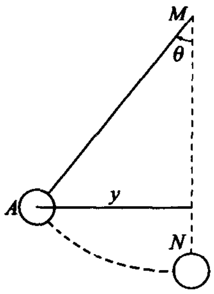


图 1-4

例 2　图 1-4 是钟摆的示意图. 摆心 A 到铅垂线 MN 的距离 y 是时间 t 的函数，$y=g(t)$. 根据钟摆的知识，容易说明 $g(t+T)=g(t)$. 其中 T 为钟摆摆动一周（往返一次）所需要的时间，函数 $y=g(t)$ 是周期函数. 若以钟摆偏离铅垂线 MN 的角 θ 的度数为变量，根据物理知识，摆心 A 到铅垂线 MN 的距离 y 也是 θ 的周期函数.

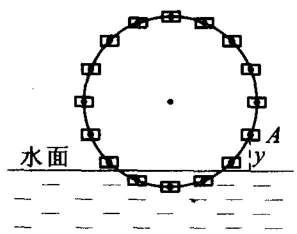


图 1-5

例 3　图 1-5 是水车的示意图. 水车上 A 点到水面的距离 y 是时间 t 的函数. 假设水车 5 min 转一圈，那么 y 的值每经过 5 min 就会重复出现，因此，该函数是周期函数.

由上面的例子，我们可以看到在自然界中存在着丰富的周期现象和周期函数.

1. 月球到太阳的距离 y 是时间 t 的函数吗？所构成的函数是否是周期函数？

2. 地球上一年春、夏、秋、冬四季的变化是周期现象吗？

3. 钟表的分针每小时转一圈，它的运行是周期现象吗？

4. 连续抛一枚硬币，面值朝上我们记为 0，面值朝下我们记为 1，数字 0 和 1 是否会周期性地重复出现？

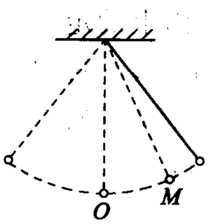
5. 我们选定风车轮边缘上一点 A，点 A 到地面的距离 y 与时间 t 构成的函数是周期函数吗？

6. 我们选定自行车车轮边缘上一点 A，车轮的中心记为 O，OA 与竖直方向的夹角记为 α. 当自行车沿直线做匀速运动时，变量 α 是时间 t 的函数吗？如果是函数，它是周期函数吗？

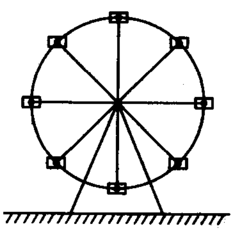
7. 请同学们列举身边的周期现象和周期函数.

习 题 1—1

1. 设钟摆每经过 1.8 秒回到原来的位置. 在图 1-4 中钟摆达到最高位置时开始计时,经过 1 分钟后,请你估计钟摆在铅垂线的左边还是右边?
2. 一个质点在平衡位置 O 点附近做简谐振动. 如果不计阻力,可将简谐振动看作周期运动. 它离开 O 点向左运动,4 秒后第 1 次经过 M 点,再过 2 秒第 2 次经过 M 点. 该质点再过多长时间第 3 次经过 M 点?



(第 2 题)


(第 3 题)

3. 游乐场中的摩天轮有 8 个座舱,每个座舱最多乘 4 人,每20 分钟转一圈. 请估算 8 小时内最多有多少人乘坐.

§2 角的概念的推广

问题提出

通过上节的研究我们知道，水车轮边沿上的定点 A 到水面的距离 y，可以看作是水车轮中心 O 与 A 点的连线与过 O 点的铅垂方向的夹角 θ 的函数 $y=g(\theta)$，而且 $y=g(\theta)$ 是周期函数. 其中自变量 θ 是角度，为了深入地研究这种以角度为自变量的周期函数，我们有必要对角的概念进行推广.

初中时我们学过锐角、直角和钝角等，角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

拧螺丝时，按逆时针方向旋转会越拧越松，按顺时针方向旋转会越拧越紧. 可见，规定射线旋转的方向很有必要.

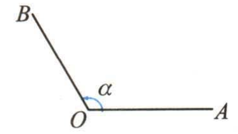


图 1-6

在数学上，我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**；按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**. 这样，钟表的指针在旋转时所形成的角总是负角. 在图 1-6 中，一条射线的端点是 O，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB，形成了一个正角，记作 α. 点 O 是角的顶点，射线 OA，OB 分别是 α 的始边、终边.

以前我们只研究了 $0°\sim360°$ 范围的角，实际上在生活中还会遇到范围更大的角. 例如，自行车的车轮周而复始地转动 1 根辐条形成的角. 在跳水运动中，有“转体 $720°$”(即“转体 2 周”)，“转体 1 $080°$”(即“转体 3 周”)的动作名称. 这就是说，角度可以不限于 $0°\sim360°$ 范围. 如图1-7中的角为正角，它等于 $750°$；图 1-8 中，正角 $\alpha=210°$，负角 $\beta=-150°$，$\gamma=-660°$.

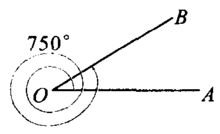


图 1-7

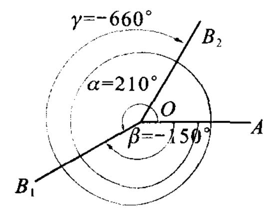


图 1-8

如果一条射线从起始位置 OA 没有作任何旋转，终止位置 OB 与起始位置 OA 重合，我们称这样的角为**零度角**，又称**零角**，记作 $\alpha=0°$.

通过对角的概念的推广，我们知道角应包括正角、负角和零角.

为了研究问题方便，我们常在直角坐标系内讨论角. 为此使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么，角的终边(除端点外)在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 例如，图 1-9 中的 30°, 390°, −330°角，都是第一象限角；图 1-10 中的 300°, −60°角，都是第四象限角；585°角是第三象限角.

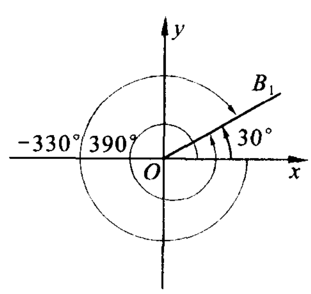


图 1-9

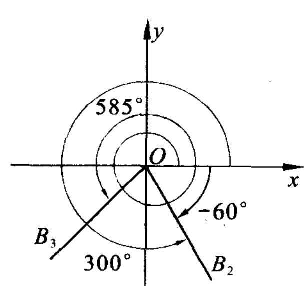


图 1-10

从图 1-9 中可以看出，390°, −330°角的终边都与 30°角的终边相同，并且这两个角都可以表示成 0°～360°的角与 k 个周角的和，其中 k 为整数，即

$$390°=30°+1\cdot 360°\ (k=1),$$
$$-330°=30°+(-1)\cdot 360°\ (k=-1).$$

设集合 $S=\{\beta|\beta=30°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$，则 390°, −330°角都是 S 的元素，30°角也是 S 的元素($k=0$). 容易看出：所有与 30°角终边相同的角，连同 30°角在内，都是集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 30°角终边相同.