初中数学专题辅导

$X+Y=?$

北京西城区数学会
北京西城区教研中心　编

北京师范大学出版社

初中数学专题辅导

北京西城区数学会
北京西城区教研中心 编

北京师范大学出版社

初中数学专题辅导

北京西城区数学会
北京西城区教研中心 编

*

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
北京朝阳展望印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：12.625 字数：268千字
1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷
印数：1—9000

ISBN7-303-00375-4/G·184
定价：3.90元

前　言

为了贯彻邓小平同志提出的教育要“三个面向”的指示精神，更多、更快、更好的培养人材；为贯彻九年义务教育法，提高初中数学教学质量，近几年来，我们积极地在我区举办了初中学生数学课专题辅导。实践证明，这些讲座的内容，对使学生掌握坚实的数学基础知识和基本技能、技巧，发展学生智力，培养学生的创造性思维能力等方面，都起到良好的效果。

最近，由我学会李振纯、李松文等同志组织主讲人，将讲座资料加以系统整理，分成十七个专题，每个专题都首先简要地复述教学大纲基本内容，然后围绕专题展开论述，对题目的解法侧重于探索思路和方法分析，并注意总结数学方法和解题规律，每个专题还都配有练习题及答案或提示，最后配有三套综合练习题，供读者使用、参考。

参加本书编写工作的有：李振纯，李林森、李松文，欧阳东方、孙家钰、陈俊辉、冼伟强、刘绍贞、方珊、赵一西、景延礽、刘炳华、徐华林、赵惠民、凌为淑、康英琴、扬淑云等同志，最后由李振纯、李松文同志复审了全稿。

由于我们水平有限，缺点错误在所难免，欢迎读者批评指正。

北京西城区数学会
北京西城区教研中心

目　录

第一讲　实　　数

北京铁二中　景延礽

实数这部分内容是代数部分的基础知识，概念和运算法则较多，因而掌握好概念，熟悉运算法则，是学好这部分的关键。

一、实数的概念

1．实数集合：引进负数，建立有理数集，是初中阶段数的第一次扩充；主要包括有理数的概念，大小比较，四则运算法则，首先是明确负数意义。通过开方运算，引进无理数，建立实数集，这是初中阶段数的第二次扩充。主要包括实数的概念与实数的运算，关键是明确方根的意义，特别是算术根的意义是运算的基础，要正确运用公式、法则、精确度。可通过下表记忆：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数（正分数、负分数）—有限小数，无限循环小数。
  - 无理数（正无理数、负无理数）—无限不循环小数。

说明：

（1）偶数：整数中能被2整除的数叫做偶数，如0，+2，±4，±6…。一般形式为$2n$，其中n是整数。

奇数：整数中不能被2整除的数叫做奇数，如±1，±3，±5，…，一般形式为$2n+1$，其中n是整数。

（2）质数：在大于1的自然数中，只能被1和它本身整除的自然数，称为质数（或素数）。

合数：除1和它本身以外，还能被其他自然数整除，称为合数。

1既不是质数，也不是合数。

（3）互质数：两个自然数的最大公约数是1，称为互质数（或互素数）。两个互质数不一定必须是质数。

2．数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线．数轴上的所有点与全体实数是一一对应的。

3．相反数：若实数$a\neq0$，则$-a$称为a的相反数。互为相反数的两个数的和为零。若$a=0$，则零的相反数仍是零。

4．绝对值：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。若用a表示任一实数，它的绝对值表示为$|a|$，则

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0);\\ 0 & (a=0);\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

$|a|$的几何意义是：在数轴上表示这个实数a的点离开原点的距离。

5．倒数：如果$a\neq0$，则$1\div a=\frac{1}{a}$称为a的倒数。互为倒数的两个数的积为1．零没有倒数。

6．实数大小的比较：在数轴上表示的两个实数，右边的总比左边的大。

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。

7．非负数：零和正数叫做非负数．算术根、绝对值都

是非负数，此外，$\sqrt[2n]{a}$、a^{2n}也是非负数。

非负数的重要性质有：

（1）有限个非负数的和或积仍然是非负数，

（2）若有限个非负数的和等于零，则每个非负数都是零。

二、实数的运算

在实数集合里，进行加、减、乘、除、乘方和开方（开偶次方时，被开方数不为负数）六种代数运算时，遇到无理数需按所要求的精确度用近似的有限小数代替无理数进行计算。

1. 运算法则：

加法：

（1）同号：符号保持原符号，绝对值相加；

（2）异号：符号同绝对值较大的数的符号，绝对值相减。

减法：减去一个数等于加上它的相反数，然后按加法做。

乘法、除法：先确定符号．同号相乘或相除得正号；异号相乘或相除得负号，然后绝对值再相乘或相除。

2. 乘方和开方：

（1）乘方：求相同因数的积的运算称为乘方．乘方运算的结果称为幂．即$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}=a^n$．其中$a$称为底数，$n$称为指数，$a^n$称为$a$的$n$次幂或$a$的$n$次方。

二次方也叫做平方，三次方也称为立方，一个数可看做它本身的一次方。

正实数的任何次幂都是正数，负实数的奇次幂是负数，

负实数的偶次幂是正数，特别地，有

$$(-1)^n=\begin{cases}(-1)^{2k-1}=-1,\\(-1)^{2k}=1.\end{cases}\quad（其中n，k为正整数）$$

（2）开方：（开平方为重点）

① 若$x^2=a$，则x叫做a的平方根或二次方根．求a的平方根的运算，叫做开平方，其中a叫做被开方数，2是根指数．

正数a的平方根有两个，它们互为相反数，表示为$\pm\sqrt{a}$．零的平方根是零，即$\pm\sqrt{0}$就是0．

因为任何实数的平方都不是负数，因此负数没有平方根．

② 算术平方根：正数a的正的平方根称为a的算术平方根，记作$\sqrt{a}$，读作“根号下a”．零的算术平方根仍是零，即$\sqrt{0}=0$，所以有

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a>0),\\0\ (a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$$

3．运算定律可概括为下表：

	加　　法	乘　　法
交换律	$a+b=b+a$	$ab=ba$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
分配律	$a(b+c)=ab+ac$	

4．运算顺序：加、减、乘、除、乘方和开方这六种运算总称为代数运算．加减法为一级运算；乘、除法为二级运算；乘方、开方为三级运算．一般运算注意以下三点：

（1）同级运算由左往右依次运算；

（2）遇到含有三种等级运算由高级运算到低级运算；

（3）带括号运算，先内后外，即先求最内层，逐层向外。

基本训练举例：

例1 计算：$-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\div(-\sqrt{2})^{2}-(-3.14)^{0}+$

$$+0.125\times\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}.$$

解：原式 $=-\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}\div\left(-2^{\frac{1}{2}}\right)^{2}-1+\frac{1}{8}\times$

$$\times(8^{-1})^{-1}$$

$$=-\frac{2}{3}\div2-1+\frac{1}{8}\times8$$

$$=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}-1+1$$

$$=-\frac{1}{3}.$$

注意：（1）在进行实数运算时，一定要注意运算顺序，各种运算法则和符号。

（2）分数与小数互化，要根据题目的需要决定互化方法。

（3）对于指数概念要清楚，要熟练掌握公式：①$a^{0}=1(a\neq0)$；②$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}(a\neq0)$③ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}(a\geqslant0)$ m、n为正整数，这些公式要正反记忆，灵活运用。

例2 改正下述错误命题：（带点的字不能变动）

如果a表示一个实数，那么$-a$就表示一个负实数。

解答：如果a表示一个正实数，那么$-a$就表示一个负实数。

注意：实数包括正实数、负实数和零。$-a$表示什么数，应以a本身表示什么数来确定。当$-a$表示的是负实数时，a一定表示一个正实数。

例3 判断题：（正确画“$\surd$”，错误画“$\times$”）

$a+b$一定大于a（ ）。

解：

$$这里a、b都是实数\begin{cases}若b>0，则a+b>a。\\ 若b=0，则a+b=a。\\ 若b<0，则a+b<a。\end{cases}$$

∴“$a+b$一定大于a”是错误的应画“$\times$”号。

注意：有关实数比较大小时，一定要首先考虑实数本身的符号。亦可用取差的办法：当$a-b>0$时，$a>b$；当$a-b=0$时，$a=b$；当$a-b<0$时，$a<b$。也能判断对错。

例4 当a是什么实数时，有：

（1）$|a-2|=3$；（2）$|a-2|=0$；（3）$|a-2|=-3$。

解：（1）∵ $|a-2|=3$，∴ $a-2=\pm 3$，即$a=5$或$a=-1$。

注意：不要漏掉$a-2=-3$。

（2）∵ $|a-2|=0$，∴ $a-2=0$，$a=2$。

（3）因为任何实数的绝对值是非负数。所以a取任何实数时，$|a-2|\neq -3$。

例5 比较$-\sqrt{0.0331}$和$-\dfrac{2}{11}$的大小。

解：分别取两数绝对值后，再平方得：

$$(\sqrt{0.0331})^2=0.0331; \quad \left(\frac{2}{11}\right)^2=\frac{4}{121}=0.3306.$$

$$\therefore \quad (\sqrt{0.0331})^2>\left(\frac{2}{11}\right)^2, \text{ 即} 0.0331>\frac{2}{11}.$$

$$\therefore \quad -\sqrt{0.0331}<-\frac{2}{11}.$$

注意：两个负数比较大小时，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大。

例6 化简：

（1）$|\sqrt{3}-2|$；　　　　（2）$|a-b|$；

（3）当$a<0$时，$|-a^3|$；　　（4）$|a-b|+a-b$。

解：（1）原式$=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$。

（2）
$$\text{原式}=\begin{cases} a-b & (a>b), \\ 0 & (a=b), \\ b-a & (a<b). \end{cases}$$

（3）原式$=-a^3$。

（4）
$$\text{原式}=\begin{cases} 2(a-b) & (a>b), \\ 0 & (a=b), \\ 0 & (a<b). \end{cases}$$

注意：a不一定表示正数，而$-a$不一定表示负数。

例7 计算：（利用非负数的概念及性质）

（1）已知 $\dfrac{|16-m^2|+4(m-2n)^2}{\sqrt{m+4}}=0$，求：$m$、$n$。

（2）已知线段PQ的两个端点分别为$P(p,2)$和$Q(-8,q)$，且$|PQ|=2\sqrt{8p-2q}$，求p、q的值。

（3）已知$|x-9y|+(3y-1)^2=0$，求$\log_3(xy)$的值。

分析：（1）因为分式值为0，必须分母不为零，分子

为零．两个非负数之和为零必须此二数分别为零。

解：
$$\begin{cases} |16-m^2|=0, \\ 4(m-2n)^2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16-m^2=0, \\ m-2n=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=\pm 4; \quad (\text{舍去}m=-4) \\ n=\dfrac{m}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4, \\ n=2. \end{cases}$$

（2）根据两点距离公式：$|PQ|=\sqrt{(p+8)^2+(2-q)^2}$。

依题意：$2\sqrt{8p-2q}=\sqrt{(p+8)^2+(2-q)^2}$。

两边平方整理得：$(p-8)^2+(q+2)^2=0$。

$\therefore\ p=8,\ q=-2$。

（3）由已知可得：$\begin{cases} x-9y=0, \\ 3y-1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

$$\therefore\ \log_3(xy)=\log_3\left(3\times\frac{1}{3}\right)=\log_3 1=0.$$

例8 计算：$|(-5)^3\cdot(0.24)^2|\times(-5)^2\div(6.25)^0+(-1)^{2n-1}$（$n$是整数）。

解：原式 $=5^3\times\left(\dfrac{6}{5^2}\right)^2\times 5^2-1=\dfrac{5^5\cdot 6^2}{5^4}-1$

$=5\times 36-1=179$。

注意：（1）运算顺序及分数小数互化的技巧。（2）奇、偶数的一般式：$2n+1$、$2n$（n为整数）．

例9 若a、b、c三数在数轴上的对应点如图1-1则 $|a|-|a+b|+|c-b|-|a+c|$ 等于（　）

(A) $2b+a$; (B) $-2b+a$; (C) $-2b-a$;

(D) $-a$; (E) $2b-a-2c$。

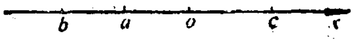

图 1-1

分析：（1）由a、b、c三个数在数轴上的位置，知$b<a<0<c$，且$|b|>|c|>|a|$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & |a|-|a+b|+|c-b|-|a+c| \\ & =-a+(a+b)+(c-b)-(a+c) \\ & =-a.\end{aligned}$$

因此解为（D）．

（2）解选择题除了用直接法通过演算获得正确结论外，根据题型特点，还可以用筛选法、检查法、观察法、综合法等．还有用特殊值法等技巧．如本题用特殊值法．按已知条件，设$a=-1$，$b=-3$，$c=2$，得原式的值为1．而将a、b、c的值代入各供选择的结果中有：

（A）-7；（B）5；（C）7；（D）1；（E）-9．从而选（D）．

例10 设：$y=|x-1|+|x-3|+\sqrt{4x^2+4x+1}$，试求使$y$值恒等于常数的$x$的取值范围．

解：

$$\begin{aligned} y &= |x-1|+|x-3|+\sqrt{4x^2+4x+1} \\ &= |x-1|+|x-3|+|2x+1| \\ &= \begin{cases} -4x+3 & \left(x<-\dfrac{1}{2}\right), \\ 5 & \left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x<1\right), \\ 2x+3 & (1\leqslant x<3), \\ 4x-3 & (x\geqslant 3). \end{cases}\end{aligned}$$

故使y值等于常数的x的取值范围是：$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

注意：解此类问题仍属于非负数问题，可分别设每个非负数为零，得到对应x值，然后在数轴上分段由小到大，求出所在区间的对应值。

例11 回答下列问题：

（1）已知$|a|=a$，$|b|>b$，试问a、b各是什么数？

（2）已知$abc\neq 0$，$\frac{1}{a}>1$，$\frac{1}{b}<0$，$\frac{1}{c}\leqslant c$，试问a、b、c各是什么数？

（3）已知$a<-a$，试问a是什么数？

答：（1）$a\geqslant 0$，$b<0$。

（2）$0<a<1$，$b<0$，$c\geqslant 1$或$-1\leqslant c<0$。

（3）$a<0$。

注意：（1）相反数与倒数这两个概念都是指一对实数间的相互关系。（2）零没有倒数；零的相反数仍是零。

例12 证明：$\sqrt{3}$是无理数，并且用几何作图方法，在数轴上表示$\sqrt{3}$所对应的点。

证：若$\sqrt{3}$为有理数，可记$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$，其中p、q为自然数且二者没有公因数，于是$3q^2=p^2$，因3是质数，知p是3的倍数，设$p=3m$（m为整数），代入$3q^2=p^2$，得$q^2=3m^2$。这样q又是3的倍数，这样p、q至少有一个公因数3，这与假设两者互质矛盾，所以$\sqrt{3}$是无理数。

作法：如图1-2

（1）在数轴上以单位长OA为直角边长作等腰直角三角形OAA_1；

（2）以O为圆心，以斜边OA_1为半径画弧，交OX轴的正方向于一点B，则B即为$\sqrt{2}$在数轴上的对应点；

（3）以斜边OA_1为直角边，作另一直角边长为1的直角三角形OA_1A_2；

（4）再以O为圆心，以OA_2的长为半径画弧，交OX轴的正方向于B_1点，则B_1就是$\sqrt{3}$在数轴上的对应点.

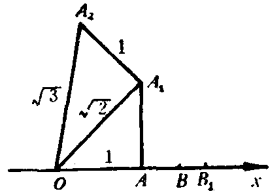

图 1-2

注意：（1）反证法的证题步骤一般分为三步，反设、归谬、结论. 这是一个重要的数学证明方法.（2）作图方法根据勾股定理. 直角边长为1的等腰直角三角形的斜边就是$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$；直角边长为$\sqrt{2}$、1的直角三角形的斜边就是$\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$.

练 习 一

1. 选择题：（有且只有一个代号正确）

（1）连结$|a|$和$-a$之间的符号是（ ）.

(A) $\leqslant$；(B) $\geqslant$；(C) $>$；(D) $<$.

（2）在整数0、1、2、3、4、5、6、7、8、9中，质数的个数是a，偶数的个数是b，完全平方数的个数是c，则$a+b+c$的值是（ ）

(A) 10；(B) 11；(C) 12；(D) 13.

（3）已知$|x|=-x$，那么x的取值范围是（ ）

(A) $x<0$；(B) $x=0$；(C) $x\leqslant 0$；(D) $x>0$.

（4）a与$-a$的大小关系是（ ）

(A) $a>-a$；　(B) $a\geqslant -a$；

(C) $a<-a$；　(D) 以上答案都不对。

（5）设$a<1$，化简$1-a-\sqrt{(a-1)^2}$得：（ ）

(A) $2-2a$；(B) 0；(C) $-2a$；(D) 2。

（6）若a为任意非负数，以下各式中，总有意义的是（ ）

(A) $\lg a$；(B) a^0；(C) $0\div a$；(D) $\sqrt{a}$。

（7）绝对值小于3的整数有（ ）

(A) 2个；(B) 3个；(C) 4个；(D) 5个。

（8）a、b的积与b的平均数等于a。则a的表示式是（ ）

(A) $\frac{b-2}{b}$；(B) $\frac{b}{2-b}$；(C) $2+b$；

(D) b^2+b。

（9）在3.14，$\frac{22}{7}$，$-\sqrt{3}$，0.12，cos45°，tg45°，0.101010…这七个数中，无理数的个数有（ ）

(A) 4个；(B) 3个；(C) 2个；(D) 1个。

（10）若$1\leqslant a\leqslant 2$，则$\sqrt{a^2-2a+1}+|a-2|$的值是（ ）

(A) 1；(B) -1；(C) $3-2a$；(D) $2a-3$。

（11）已知x、y是实数，且$(|x|-1)^2+(2y-1)^2=0$，那么$x+y$的值是（ ）.

(A) $\frac{3}{2}$或$-\frac{1}{2}$；(B) $\frac{1}{2}$；(C) $\frac{3}{2}$；