

教育心理学丛书

张楚廷 母庚才 主编

数学教育心理学

张楚廷 著



警官教育出版社

教育心理学丛书

张楚廷 母庚才 主编

数学教育心理学

张楚廷 著

警官教育出版社

• 北京 •

图书在版编目 (CIP) 数据

数学教育心理学/张楚廷著. -北京: 警官教育出版社
1998.8 (教育心理学丛书/张楚廷, 母庚才主编)
ISBN7-81027-968-8

I. 数… II. 张… III. 数学课-学科心理学 IV. G.447
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 10407 号

数学教育心理学

SHUXUE JIAOYU XINLIXUE

张楚廷 著

警官教育出版社 出版发行

(100038 北京市西城区木樨地北里2号)

河北衡水冀峰印刷股份有限公司印刷

1998年8月第1版 1998年10月第2次印刷

开本: 850毫米×1168毫米 1/32印张: 7.625

字数: 198千 印数: 5501~8600册

ISBN 7-81027-968-8/G·392 定价 10.00元

本社图书出现印装质量问题, 由发行部负责调换

联系电话: (010) 63274348

序

心理学是一门古老的学科，它的出现可以追溯到公元前；同时，它又是一门新兴学科，因为自上世纪末由冯特建立了第一个心理实验室以来，心理学的研究在这一个多世纪的时间里又获得巨大成就，有了一个划时代的发展。

心理学已发展到 100 多个分支，全世界有数千种心理学杂志，数十万心理学家，发达国家每年都有成千上万的学生进入心理学专业领域攻读，心理学空前繁荣。人的一切奇妙与神秘主要来自心理世界，人的生理现象已缔造了一个庞大的学科体系；然而这一体系还远未包含关于人的科学的另一庞大体系——关于人的心理世界的学科体系。生命科学必将雄踞于 21 世纪的科学之巅，心理科学亦必将是 21 世纪的前沿科学之一。同时，心理学的应用也将遍及人的生活（包括物质生活与精神生活、经济生活与社会生活）的每一个领域。

心理学在我国曾遭受长达 20 年的摧残。十一届三中全会之后，心理学也成为我国恢复最快、发展最快的学科之一。而且随着中国的经济繁荣，随着中国的社会进步，心理科学必将在中国会有一个更大地发展，学习它、研究它、应用它的人数将剧增，人们可以充分想象它美好的发展前景。为人类和社会所需要的东西必然会被重视起来，被重视起来的东西必然会发展起来。

教育心理学是心理学的一个应用分支，然而也是最重要的应用分支。一说到应用似乎就没有多少理论，其实理论与应用密不可分，教育心理学是理论性、应用性都很强的学科。

心理现象是普遍的现象，教育活动也是普遍的活动，教育社会化，社会也需教育化，因此，教育心理学也应是能引起普遍关注的学科。

学习教育学的基本原理，学习心理学的基本原理，已经不只是师范院校学生的任务，也不只是教师和其他教育工作者的事。作为教师、教育工作者，恐怕还须再前进一步——学习和研究教育心理学。不走到这一步很难成为一个适应时代要求的教师。

有了一定的教育学知识，有了一定的心理学知识，特别是，如果还有了一定的教学实践、教育实践的基础，学起教育心理学不仅是不困难的，而且还很可能是令人感兴趣的。即使尚无这些基础，学习起教育心理学来，也不会遇到难以克服的困难。

教育心理学属于心理学的范畴，由于心理活动贯串于教育活动的全过程，因此与教育的诸多方面联系着，但它终究不是教育学本身，它是为教育学提供更直接的心理学理论基础的。所以，本丛书是心理学丛书，却又是围绕着众多教育课题展开的，是教育心理学的一些主要方面，算是比较全面地涉及到了这一领域。

教育心理学著作陆续面世，教育心理学引起了广泛的关注，这一重要分支的研究也有了一定的进展。这套丛书也

算是这方面工作的点滴，它是由六所师范大学的一批教授撰写的。这套丛书既能供对教育心理学有全面了解的教育工作者参考和研究，又能使对教育心理学的某个侧面感兴趣的教育工作者有较大的选择余地。也许对于应用和理论研究都有一些参考价值，这至少是我们所盼望的；相信它不仅对已在职的教育工作者，而且对正在就读的未来教育工作者也是适合阅读的。

潘菽教授主编的《教育心理学》，其初稿是1963年就有了的，正式出版却是17年之后，可见教育心理学发展道路之艰难。潘菽教授的著作1980年出版，距今又是17年了，教育心理学有了比前一个17年好得多的社会环境。相信这一环境会更好，因而也可以相信教育心理学在今后的年代会有更好的发展。

在科学研究的道路上出现不同学派、不同观点是正常的，我们这套丛书兼容了不同的学术观点，这对科学的发展是有利的。

我们非常乐意看到读者对本丛书的缺点和毛病加以批评指正，学术批评是学术繁荣的必要条件。

张楚廷 母庚才

1997. 10.

目 录

序

第一章 数学教育心理学概说	(1)
---------------------	-----

上编 数学教学中的认知心理问题	(4)
-----------------------	-----

第二章 数学直观与直感	(4)
-------------------	-----

第一节 数学直观	(4)
----------------	-----

第二节 直感	(7)
--------------	-----

第三节 观察与观察力	(10)
------------------	------

第三章 数学记忆与理解	(15)
-------------------	------

第一节 数学学习与记忆力	(16)
--------------------	------

第二节 记忆与理解	(21)
-----------------	------

第三节 再说记忆	(26)
----------------	------

第四章 数学概念学习	(31)
------------------	------

第一节 概念概述	(31)
----------------	------

第二节 数学概念的学习	(36)
-------------------	------

第三节 数学概念的分类	(39)
-------------------	------

第四节 再议数学抽象	(43)
------------------	------

第五章 数学命题与思维发展	(48)
---------------------	------

第一节 逻辑学习的基本途径	(48)
---------------------	------

第二节 运算与命题	(51)
-----------------	------

第三节 思维严密性	(53)
-----------------	------

第四节 思维灵活性	(55)
-----------------	------

第六章 数学归纳训练	(58)
------------------	------

第一节	归纳的思维特征	(59)
第二节	归纳的完全性问题	(60)
第三节	归纳与创造心理	(63)
第七章	两种推理与思维品质	(66)
第一节	两种推理	(66)
第二节	似真推理	(69)
第三节	推理与思维品质发展	(77)
第八章	数学思维的收敛与发散	(84)
第一节	发散思维引述	(84)
第二节	发散思维特征	(86)
第三节	发散思维的意义	(89)
第四节	收敛思维与发散思维的协同	(90)
第九章	创造性思维的若干问题	(98)
第一节	创造定义问题	(98)
第二节	创造性学习	(101)
第三节	创造的障碍还是桥梁	(106)
第四节	左、右脑运用	(112)
第五节	自学与创造	(117)
第十章	数学语言与思维	(122)
第一节	“第二语言”	(123)
第二节	第二信号系统的特殊组成部分	(125)
第三节	数学符号分析	(128)
第四节	数学语言的学习	(133)
第五节	再论语言的作用	(136)
第六节	数学对语言研究的影响	(140)

下编	数学教学中的非认知心理问题	(143)
-----------	----------------------------	--------------

第十一章	数学学习中的兴趣, 动机	(143)
第一节	数学学习中兴趣的来源	(146)
第二节	数学学习中兴趣的重要性	(148)
第三节	数学学习中的动机与需要	(150)
第四节	兴趣的培育与爱护	(154)
第十二章	数学学习中的情感与数学审美	(157)
第一节	对数学的情感	(158)
第二节	数学审美	(161)
第三节	数学的美与现实的美	(170)
第十三章	数学学习中的意志与自信	(174)
第一节	历史的启示	(174)
第二节	数学学习中意志的意义	(175)
第三节	数学学习中意志的培养	(178)
第四节	自反心理问题	(180)
第五节	自信心	(183)
第六节	注意力	(187)
第十四章	数学教育中的人文价值	(196)
第一节	数学与人文科学	(197)
第二节	数学与文化	(201)
第三节	数学与人类精神	(206)
第十五章	数学教师的心理修养	(214)
第一节	数学教师的心理素质	(214)
第二节	数学教育与素质教育	(218)
第三节	数学教学原则建议	(220)
后记		(230)

第一章 数学教育心理学概说

数学教育心理学讲的是心理学。人的心理可分为认知心理和非认知心理，心理学的一般分支学科大都要涉及这两方面，对认知心理和非认知心理进行一般性讨论是基础心理学的任务。这种一般性讨论自然不是本书的主题。

普通心理学也常分别论述心理过程、心理倾向、心理特征等，我们都只是结合着进行一些必要的阐释，专门的讨论不是本书的任务。

人的心理活动常常是综合的，为了对心理现象加以辨识，我们又需要做一些分析工作；例如，将有些心理活动视为认知的，而将另一些心理活动称之为非认知的；然而在实际的心理活动中认知与非认知心理交互作用、紧密联系而并非截然分开的，只是在某个特定的活动中主要是认知心理，而在另一种心理活动中主要是非认知性质的，一般情况下并非单一的认知心理或单一的非认知心理起作用。

这样，虽然为着讨论的方便我们不得不在第一部分里集中叙述认知心理，在第二部分里集中叙述非认知心理，但是两者的相互关联需要随时加以注意，在教学的实践中尤其要注意。

我们是讨论教育的过程中，教学的过程中的心理活动，所以我们讲述的是心理学的一个特定分支：教育心理学，也是心理学应用最广泛的一个分支。如果说教育心理学是作为一级学科的心理学的下一级学科即二级学科的话，那么，数学教育心理学则是心理学的一个三级学科了。这样，我们是在一个相对狭窄的范围内讨论心理学。

在很宽的范围内讨论，在很窄的范围内讨论，各有各的特点，也各有各的难处。那么，我们研究数学教育心理学有些什么特点、什么难处呢？数学教育心理学虽然寓于心理学，但它不是普通心理学的复述，也不能是仅仅以数学教育的实例来印证心理学的原理。可以说，数学教育心理学既不是普通心理学，又区别于一般教育学，更不是数学的一个分支，然而，无论是研究它还是学习它，又都需要既懂得心理学，又懂得一些教育学，还必须懂得数学。这既是数学教育心理学的特点，也是它的难点。

要想在数学、教育学、心理学三个领域里都有很深的造诣是很困难的，但是，同时需有一定程度的熟悉是毫无疑问的；尤其是进行一些研究或探索，需要有相当的熟悉程度。

为了某些对心理学虽有所知但并不十分熟悉的读者的方便，必要时我们可能对心理学的某些专门术语稍作阐释；至于数学，我们没有涉及很艰深的内容，一般我们局限在初等数学范围内来进行讨论，尽管心理活动在更艰深的数学学习或研究过程中有更典型的表现，因而相应的数学教学的心理问题的研究也是十分有意义的。

但为了适应于更广泛的读者，我们将尽可能避免涉及高深的数学内容或者在不得已涉及的时候我们尽可能使高深的东西变得容易被理解一些，因为我们的基本任务还是研究数学教育心理学这个相对狭窄范围内的一般问题，而不是专门讲数学。我们想，当对这些一般问题有了较好的理解之后，进行比较高深内容的数学教育时可能会触类旁通、举一反三，即令是在进行微积分、函数论、测度论、拓扑学的教学中，对这些一般问题的理解也是用得上的。因此，一方面我们可能在个别的、少数的章节里涉及稍难的数学内容，但另一方面我们总的想法是：不妨尽量以比较浅显的数学内容为背景。

许多心理学家以数学为背景进行过心理学研究，例如皮亚杰、布鲁纳；许多教育家也以数学为背景进行过教育学研究，如苏霍姆林

斯基；又有一些杰出的数学家进行过教育学的研究，如波利亚、华罗庚。看来，至少数学教师应当是对数学教育心理学特别有兴趣的，然而，对它有兴趣的也不只局限数学工作者或数学教育工作者，应当而且事实上有更广泛的教育工作者和学术研究人员对它有兴趣。

上编

数学教学中的认知心理问题

第二章 数学直观与直感

直观，从字面上理解，是直接观察的意思。直接的观察，按狭义的理解是用眼睛看，是用视觉；按广义的理解，也包括由听觉、味觉、触觉、嗅觉等获得的感知。广义理解下的直观实际上是直感，直接的感觉或感知。

我们约定，称通过感觉器官直接获得感觉或感知为直感，其中特称通过视觉器官获得感知为直观。

还有直觉一词，这是指直接的觉察，这种觉察不一定是通过感觉器官了，还包括思维器官，包括通过联想、顿悟等获得印象、知觉。所以直觉是比直感更宽的概念。至于直观这一概念，最狭窄的理解即视觉的感知，较宽的理解与直感一致，更宽的理解与直觉一致。本书中将直观作最狭义的理解，与直感、直觉相区别。

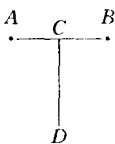
这一章，我们只讨论直观与直感，不讨论直觉。对于直觉，以后还会涉及。

第一节 数 学 直 观

俗称“眼见为实”，数学却只在一定程度上认可“眼见为实”，它

不认可“眼见为真”。

在右图中，我们看到相互垂直的线段 AB 和 CD ，似乎 CD 比 AB 长一些，这也许是实际的感觉，然而真实的结论是 CD 与 AB 相等，亦即实际的感觉还不一定是真理。



不过，直观毕竟有积极的意义，对于直观的恰当运用也就还能起到积极的作用。这是因为，能够看到的东西比较容易被确信，也容易引起兴趣，特别是在被引导看到了未曾见过的东西时更有兴趣；从认识规律来讲，理性认识在感性认识的基础上比较容易实现，而直观正是增加感性认识的手段之一；同时，一般来说，能够看到比能够想到要容易些，尤其低年级学生或初学者，更需稍多一些借助于直观教学。

常用的直观教具，第一类是实物，实物标本，模型（较多的是几何模型）；第二类是图形，或当堂的绘图，或是事先准备好的挂图、图表；第三类是影视资料，包括幻灯、电视、电影等，这一类直观教学技术有了极大发展，并通称为可视技术于教学的运用，还有迅速发展起来的多媒体技术，把视觉效果与听觉效果组合起来，这种效果由于视觉资料与听觉资料（包括教师的讲演）能更紧密的配合而得到更充分的显示。

在直观教学中，了解并注意利用人的视知觉的某些特点和规律是十分重要的。

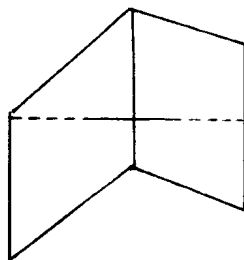
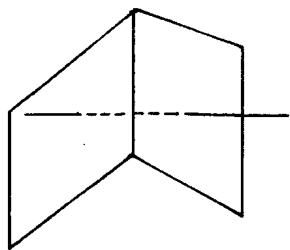
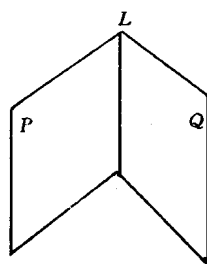
视觉误差

人的视觉误差是存在的，比如，将横摆着的线段如果摆直，看起来就显得长一些；一个光点，如果快一些旋转，看起来就不是一个点而是一个光环。人们恰是利用这些客观存在的误差，为高个子的人做横条衣服、为矮个子的人做直线条衣服；电影电视则是利用了人的视觉暂留特点。在引导学生观察几何图形时则应避免可能产生的误差，如本节开头我们所举的一例；进一步的例子是学生容易

把横边稍长而直边稍短的矩形误认为是正方形。

不确定性

平面 P 与平面 Q 相交于直线 L ，如右图，从这个图形来看，当我们正视它的时候，直线 L 是向我们这边凸出来的还是远离我们这边而凹进去的，从视觉效果来看是不确定的。这种不确定性是用平面图形来刻画立体图形的局限性所带来的。在这种情况下往往要借助于另外一些办法来明确，例如，左图中可以确定是凸向前的，而右图中是凹向后的：



强烈的对比度可形成较好的直观效果。

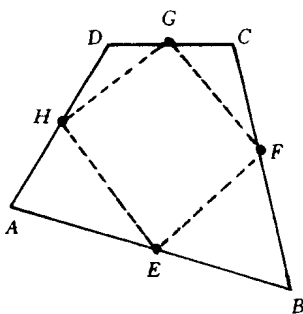
黑板一般应擦干净，模糊的底面背景再绘图和写字时，影响视觉效果。

整个黑板板面应整洁清晰，教师对于哪些书写部分应及时擦掉，哪些应较长时间的留在上面，都要事先有所考虑，心中有数。而且，擦黑板的时间最好选择在某个问题的讲述正好告一段落而学生需要稍加思索的时候。

还可利用不同的颜色来形成对比，使学生有更鲜明的印象。例如，用白色粉笔绘出任一四边形，用红色粉笔连接任意四边形 $ABCD$ 的中点作成一新的四边形（如下图中虚线所示） $EFGH$ 。这种鲜明的图中图（红色四边形）更有可能使学生直观到它是一个平行四边形，

这样就可以比较顺利地导出命题：任意四边形的中点连成的四边形是平行四边形。余下的任务就是论证这一命题了。

例如影视技术可以达到更好的直观效果，不仅可用更多的颜色，还可以产生运动效果。例如，在黑板上只能绘出静态的圆锥，实际上它可视为棱与轴保持定夹角旋转而成的，这一旋转动态过程难以由静态图形表达。



第二节 直 感

视觉不只限于对几何有用，代数、三角的学习也可利用视觉，以配合抽象的思维。二项式展开：

$$a + b = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

.....

把展开式的系数写出来，就成了一个三角形状的一堆数，以便让学生看看：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

然后让学生想想：接下去应当是一排什么样的数？前后两排数有什么关系？对于这些问题，如果只是抽象的思索而不写出来看看，难

度就要大得多。借助直观正可减小难度。

由这种直接的感知就可以上升到抽象公式：

$$C_{n-1}^{i-1} + C_n^i = C_{n+1}^i。$$

把上面的“三角形”还多写一点出来：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \dots\dots\dots \end{array}$$

那么，他们有可能产生进一步的直感：这个由数组成的图案竟是这样整齐好看！教师便有可能利用这种直感进一步作深入的讨论：

$$C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + C_{n-2}^{i-1} + \dots + C_{i-1}^{i-1}$$

我们知道，直感已不限于利用视觉了，还包括其他感官产生的感知。在数学活动中，许多情况下还要靠听觉。数学学习当然强调动脑，但要与“动眼”配合，这就是利用直观；也要动手，这就是借助于动手来调动“动眼”、“动脑”的积极作用。语言文字的学习还要配合朗读，以利用听觉效果；数学也有自己特殊的文字语言，也必须有听觉参与，也有类似朗读的意义。

教师讲课的语调尤其能起到直感效果，以帮助学生形成更鲜明的印象。讲课内容的充实，对内容明确而清晰的阐述，这是基础，但方法和技巧也有很大影响，它可在这个基础上产生更好的教学效果。

人在单一声音的持久作用下容易转移注意，容易疲劳，青少年学生更容易。因此，满堂课轻轻地平叙或者一堂课一直高腔到底，听觉效果都不好。

教师讲课的声音宜恰当地运用高低差异。例如教师开始说：“今