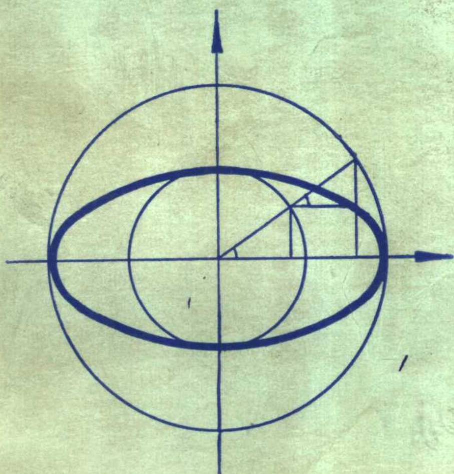
GAOZHONG SHUXUE FUXI ZHIDAO

高中数学复习指导



辽宁人民出版社

高中数学复习指导

钱永耀　主编

辽宁人民出版社
1982年·沈阳

高中数学复习指导

钱永耀 主编

*

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行

朝阳六六七厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：17½

字数：358,000 印数：1—65,500

1982年6月第1版 1982年6月第1次印刷

统一书号：7090·202 定价：1.30元

前　　言

为了帮助高中学生和广大青年全面、系统地复习中学数学基础知识和提高基本能力，我们根据全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）和现行全国通用中学数学教材的内容，编写了这本《高中数学复习指导》。

本书侧重对数学基础知识进行归纳、分析、比较和综合概括，注意突出重点，把握知识的深度和广度。在编写中，我们加强了对典型问题的分析，着眼于培养学生能力，注意总结解题规律。引导他们掌握正确分析问题的方法和解题途径；并指出解题注意事项，以期学生能够举一反三，加深对数学基础知识的理解，提高综合运用的能力。为了便于复习，我们还选拟了 **A**、**B** 两组练习题。**A** 组题是基本的练习；**B** 组题是综合性的练习。书后的练习解答仅供参考。

全书共分六篇。第一篇代数除第六章由刘占元同志执笔以外，其他各章由关成志同志执笔；第二篇平面三角由钱永耀同志执笔；第三篇平面几何由宋殿祯同志执笔；第四篇立体几何由邱肖同志执笔；第五篇平面解析几何第一章、第二章的第一节和第三章由刘国材同志执笔，第二章的二、三、四、五各节由赵保安同志执笔；第六篇微积分初步由赵景耀同志执笔。邢清泉同志审查了全稿。最后由钱永耀和关成志同志统一整理定稿。

在编写过程中，得到有关同志的支持和帮助，吴育斌同志、高文生同志对本书初稿提出许多宝贵的修改意见，在此谨致谢意。限于我们水平，缺点不足之处恐难避免，恳切希望读者批评指正。

编　者

一九八一年十二月

目　录

第一篇 代 数

第一章 数

一、数集的系统

- {复数}⊃ ($a+bi$)
  - {实数}⊃ ($b=0$)
    - {有理数}⊃
      - {整数}⊃
        - {正整数}
        - {0}
        - {负整数}
      - {分数}={有限小数}⊃{无限循环小数}
    - {无理数}={无限不循环小数}
  - {虚数}⊃ ($b\neq0$)
    - {纯虚数bi} ($a=0$)
    - {非纯虚数$a+bi$} ($a\neq0$)

数的扩充原则是：

（1）增加了新的元素，新旧元素一起构成新的数的集合（新数集）.

（2）原来数的集合中的运算规律在新数集中仍然成立.

二、实 数 集

实数集常用R来表示.

（一）整数集

整数集常用J来表示.

1．自然数集

自然数集，即正整数集$N=\{1、2、3\cdots\cdots\}$。

（1）质数：大于1的整数，除了它本身和1以外，不能被其他正整数所整除的，称为质数（或素数）。如2、3、5、7、……。

（2）合数：在自然数中，不但能被1和它本身整除，还能被其他的数整除的数叫做合数。如4、6、8、9……。

注意：1既不是质数，也不是合数。

2．整数的一些表示方法

（1）偶数：常用$2n$（n是整数）来表示。

注意：零也是偶数。

（2）奇数：常用$2n+1$或$2n-1$（n是整数）来表示。

（3）连续的整数：常用n，$n+1$，$n+2$，……来表示。

3．整数整除性的几个特征

（1）一个数的末位数字是偶数，则这个数能被2整除。

（2）一个数如果它的各个数位上的数字和能被3整除，则这个数能被3整除。结论对9也真。

（3）一个数如果同时能被2和3整除，则这个数能被6整除。

（4）一个数如果末位数字是0或5，则这个数能被5整除。

（5）m个连续整数中，必有一个能被m整除。

（6）几个整数都能被某一个数整除，则它们的和、差也能被这个数整除。几个整数中有一个能被某一个数整除，则它们的积也能被这个数整除。

（二）实数集

1．任何有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$，其中p、q为整数，

且$q\neq 0$。但是无理数不能这样表示。

2．数轴：规定了原点，正方向和长度单位的直线叫做数轴。

实数与数轴上的点建立了一一对应关系。

3．实数的绝对值：若a是实数，则$|a|$叫做a的绝对值。

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a\geqslant 0\text{时}) \\ -a & (\text{当 } a<0\text{时}) \end{cases} \quad \therefore\ |a|\text{是非负数。}$$

$|a|$的几何意义是数轴上表示实数a的点，到原点的距离。

4．算术根：正数的正的方根叫做这个数的算术根。零的算术根是零。所以算术根是一个非负数。

如 $$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a\geqslant 0\text{ 时}) \\ -a & (\text{当 } a<0\text{ 时}) \end{cases}$$

5．对于两个实数a、b，$a>b$，$a=b$，$a<b$的充要条件是：$a-b>0$、$a-b=0$、$a-b<0$。

6．在实数集合中，对于加、减、乘、除（除数不能为零）、乘方五种运算是封闭的。

（三）应用实数知识解题

实数的应用非常广泛，在以后的学习中逐步展开。

1．整数的整除性问题

解决这类问题，主要运用整数的性质和整除性的特征。要证明整数A能被整数B整除，就要证明A中含有B的因子。因此，基本方法是将A分解出含B的因子。对于有些复杂的问题，也常采取先把A拆成两部分的和（或差），使其中一部分能被B整除，从而把问题转化成只研究另一部分能否被B整除。还有一些问题，可以利用数学归纳法证明。

例 1　已知 a、b、c 是整数，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ 能被 abc 整除。试证 $ab+bc+ca-1$ 能被 abc 整除。

〔分析〕本题如果变换 $ab+bc+ca-1$，使其含有 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ 或 abc 的因式，那是很困难的。所以充分利用 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ 能被 abc 整除这个有利条件，将其分成两部分，使其中一部分是 $ab+bc+ca-1$，而另一部分含有因式 abc，可以使问题简便。

解：$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$

$$=a^2b^2c^2-abc(b+c+a)+ab+bc+ca-1$$

$$=abc[abc-(b+c+a)]+ab+bc+ca-1.$$

这里面第一项能被 abc 整除。因为全体能被 abc 整除，所以 $ab+bc+ca-1$ 也能被 abc 整除。

例 2　在 x 的二次式 $f(x)=ax^2+2bx+c$ 中，a、b、c 为整数，$f(0)$ 和 $f(1)$ 是奇数。

（1）试指出 a 是偶数还是奇数。

（2）试证二次方程 $f(x)=0$ 无整数解。

〔分析〕（1）主要是推断 a 是否含有 2 的因数，为此从已知条件出发：设 $f(0)=c=2p+1$①，　$f(1)=a+2b+c=2q+1$ ②（p、q 为整数）．由①、② 可得 $a=2q+1-2b-(2p+1)=2(q-b-p)$．可见 a 是偶数。

（2）设 x 为整数，则 ax^2 和 $2bx$ 是偶数，而 $c=f(0)$ 是奇数，∴　$ax^2+2bx+c$ 是奇数。即 $f(x)\neq0$，故知 $f(x)=0$ 无整数解。

2．绝对值和算术根的应用

在解含有绝对值和算术根的问题时，常常是要在保持等量关系的前提下，脱去绝对值的符号和根号。“脱去”的依据是绝对值和算术根的定义，并结合题设条件。

例1 已知方程$4x^2-2ax+2a-3=0$没有实数根，试化简$\sqrt{4a^2-12a+9}+|a-6|$。

〔分析〕化简绝对值和算术根的问题，关键在于脱掉绝对值的符号和根号．由于a是题给方程的系数，所以要根据方程没有实数根，即判别式$\Delta<0$这个条件，来明确a的取值范围．从而根据绝对值和算术根的定义进行化简．

解：由题意知道，根的判别式

$\Delta=(-2a)^2-4\times4(2a-3)<0$，即

$a^2-8a+12<0$，$\therefore 2<a<6$。

$\therefore\quad \sqrt{4a^2-12a+9}+|a-6|=\sqrt{(2a-3)^2}+|a-6|$

$=|2a-3|+|a-6|=2a-3+[-(a-6)]=a+3$。

例2 画出函数 $y=\sqrt{(1-x)^2}+|x+4|-9$ 的图象。

〔分析〕作含有绝对值和算术根的函数图象时，总是先化简已知解析式，一般程序是：

（1）根据$\sqrt{a^2}=|a|$，将算术根化为绝对值（即$\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$），使函数式只含有绝对值的式子$y=|1-x|+|x+4|-9$。

（2）化简绝对值的步骤是：

①标准化：将$|b-kx|$标准化成$|kx-b|$，即$|1-x|=|x-1|$。

②求零点：$|x-1|$的零点为$x-1=0$，即$x=1$。同样$|x+4|$的零点是-4。

③划区间：将零点按大小顺序，可以借助于数轴，将x的取值范围划分为三个区间$x<-4$，$-4\leqslant x<1$，$x\geqslant1$。

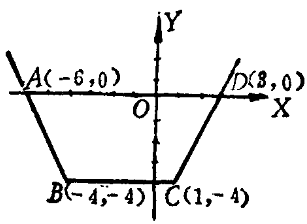


图 1—1

④得结果：

$$y=\begin{cases}-2x-12\ (\text{当}x<-4),\\ -4\ (\text{当}-4\leqslant x<1),\\ 2x-6\ (\text{当}x\geqslant 1).\end{cases}$$

（解答略）图象如图1—1.

例3　解方程 $|x-1|+|x+3|=4$。

〔分析〕解含有绝对值的方程，关键在于运用化简绝对值的方法，使原方程转化为不带绝对值符号的方程.

解：（1）求零点：$x-1=0$，$x=1$；$x+3=0$　$x=-3$。

（2）划区间：$x<-3$，$-3\leqslant x<1$，$x\geqslant 1$。

（3）得结果：当 $x<-3$ 时，$1-x-(x+3)=4$。解得 $x=-3$。但前提是 $x<-3$，所以这时方程无解。

当 $-3\leqslant x<1$ 时，$1-x+x+3=4$，即 $4=4$。所以 x 可为任何实数。但由于前提是 $-3\leqslant x<1$，所以这时方程的解为 $-3\leqslant x<1$ 的一切实数。

当 $x\geqslant 1$ 时，原方程化为 $x-1+x+3=4$。解得 $x=1$。由于前提是 $x\geqslant 1$，所以这时方程的解为 $x=1$。

综合三种情况，所以原方程的解为 $-3\leqslant x\leqslant 1$ 的一切实数。

注意：（1）去掉绝对值的符号，有时还可以使用 $|a|^2=a^2$ 或绝对值的几何意义（如 $|x|<5\Longleftrightarrow -5<x<5$）来实现。

（2）当使用定义去掉绝对值符号时，需要以零点分段进行讨论. 如果是解方程，必须把本段的前提与本段的解结合起来考虑.

例4　解不等式 $2<|3x-2|<3$。

〔分析〕解绝对值不等式，关键也在于合理地去掉绝对值的符号，使它转化为不带绝对值的不等式. 其转化的方法

与解绝对值方程的转化方法相类似。

解：当$3x-2>0$，即 $x>\frac{2}{3}$时，

$2<3x-2<3$。　∴ $\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$。

当 $3x-2<0$，即 $x<\frac{2}{3}$时，

$2<-(3x-2)<3$，∴ $-\frac{1}{3}<x<0$。

所以不等式的解为$\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$或$-\frac{1}{3}<x<0$。

注意：绝对值和算术根这两个重要概念，在代数的其他方面，以及三角、解析几何和微积分中都有应用，以后逐渐学习。

3．其他问题

例1　设方程 $ax^2-(a-3)x+a-2=0$ 至少有一个整数解，试确定整数 a 的值，并求出这时方程的整数解。

〔分析〕解决本题的关键，是根据题设方程有实数解的条件（至少有一个整数解），即根的判别式 $\Delta=(a-3)^2-4a(a-2)\geqslant0$ 确定 a 的取值范围，并由此找出整数 a，再求方程的整数解。

解：$\Delta=(a-3)^2-4a(a-2)\geqslant0$，即 $3a^2-2a-9\leqslant0$。

∴ $\frac{1-\sqrt{28}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1+\sqrt{28}}{3}$。由于 a 是整数，∴$a=-1, 0, 1, 2$。

当$a=-1$时，由$-x^2+4x-3=0$，得$x=1, 3$。

当$a=0$时，由$3x-2=0$，知方程无整数解。

当$a=1$时，由 $x^2+2x-1=0$，知方程无整数解。

当$a=2$时，由 $2x^2+x=0$，得 $x=0$。

∴ 当$a=-1$时，$x=1, 3$。

当 $a=2$时，$x=0$。

例2　设 a、b 是有理数，对于一切自然数 n，恒有 $(a+b\sqrt{5})^{n+2}=(a+b\sqrt{5})^{n+1}+(a+b\sqrt{5})^{n}$ 成立.试确定 a、b 的值（$b\neq0$）。

〔分析〕要确定 a、b 的值，只有从题设的等式着想. $\because b\neq0$，$\therefore a+b\sqrt{5}\neq0$。故原式化为 $(a+b\sqrt{5})^2=(a+b\sqrt{5})+1$.即$(a^2+5b^2)+2ab\sqrt{5}=(1+a)+b\sqrt{5}$。根据无理数的知识，若$a+bM=c+dM$（$M$是无理数，$a$、$b$、$c$、$d$ 是有理数），则 $a=c$，$b=d$。因为题设a、b是有理数，而$\sqrt{5}$是无理数，所以有

$$\begin{cases} a^2+5b^2=1+a \\ 2ab=b, \end{cases} \quad 解得\ a=\frac{1}{2},b=\pm\frac{1}{2}.（解答略）$$

例3　求证：$1+\sqrt{5}$是无理数。

〔分析〕$\because$ 1是有理数，$\therefore$欲证 $1+\sqrt{5}$ 是无理数，只须证明$\sqrt{5}$是无理数。

证明：假设$\sqrt{5}$是有理数，那么$\sqrt{5}$可表示成分数，即 $\sqrt{5}=\frac{n}{m}$（m、n是互质的整数）.

$\therefore\ 5=\left(\frac{n}{m}\right)^2$，$n^2=5m^2$，因而$n$能被5整除。

设$n=5p$（p是整数），则 $m^2=5p^2$，从而又得出 m 能被5整除。这与m 和 n 是互质的假定相矛盾。

$\therefore$ $\sqrt{5}$是无理数。从而证明 $1+\sqrt{5}$ 是无理数。

注：本题的证明方法是反证法。对于一些直接证明有困难的数学问题，往往采用这种证明方法。

用反证法证明一个结论 B 的命题，其思路是：假定 B 不成立，则 B 的反面成立。然后从 B 的反面成立的假定出发，利用一些公理、定理、定义等作出一系列正确、严密的逻辑

推理，最后推出与题设或已知知识相矛盾的结果．追究矛盾的由来，显然是来自“B的反面成立”这个假设．可见这个假设是错误的，因此B必需成立．其证题步骤可为：反设，推演，引出矛盾，肯定结论．

例 4　当正整数n为何值时，$\sum_{k=1}^{n} k! = n^2$．

〔分析〕这个命题与自然数有关，我们可以先来作些尝试，以探求解题的思路．

当$n=1$时，$1!=1=1^2$；当$n=2$时，$1!+2!=3\neq 2^2$；

当$n=3$时，$1!+2!+3!=9=3^2$；当$n=4$时，$1!+2!+3!+4!=33\neq 4^2$．

当$n>4$时，由$5!+6!+\cdots+n!$中的每一项都含有2和5为因数，所以各项的个位数字必定是0．而$1!$，$2!$，$3!$，$4!$的个位数字分别是1，2，6，4，其和为$1+2+6+4=13$．$\therefore \sum_{k=1}^{4} k!$的个位数字一定是3．因为任何一个正整数平方以后的个位数字只能是0、1、4、5、6、9这六个数中的一个，不可能是3．所以当$n>4$时，$\sum_{k=1}^{n} k! \neq n^2$．这样就把求解的范围缩小了．即在$n\leqslant 4$的范围内，很明显可以找到$n$取1和3时，$\sum_{k=1}^{n} k! = n^2$．(解答略)

注：本题运用的思考方法叫做尝试探索法．尝试探索法也是研究问题的一种基本方法．它在解决某些问题中，例如研究二次三项式因式分解的十字相乘法、整数的质因数分解、求有理系数高次方程的有理根，以及任意方程实数根的近似计算等问题中，还是比较有效的．

可用尝试探索法求解的问题的基本条件主要有两点：（1）从研究的问题能判明解在某个范围内（如本例的解是在正整数的范围内）．（2）有一个判别标准，以便从解的范围中淘汰那些不是解的情况．

练习一　A

1．计算下列各题：

（1）$-|(-3)^3|-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^3\times\sqrt{(-3)^2}$．

（2）$|2-5|-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{(-4)^2}}-|\lg 0.01|$．

（3）$(-1)^n\times 2.5^8\times 0.4^{10}$（$n$ 为整数）．

2．解答下列各题：

（1）三个连续整数的平方和等于50，求这三个数．

（2）判断3599是不是质数？为什么？

（3）a、b、c（$a\neq 0$，$b\neq 0$）为何值时，$\sqrt{\frac{ab^4}{c^2}}=\frac{b^2}{c}\sqrt{a}$？

（4）用几何法，在数轴上作出表示$\sqrt{2}$和$-\sqrt{3}$的点，并证明$\sqrt{2}$是无理数．

（5）求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{7-|x-2|}}$的定义域．

3．在 $a<-b<1$ 的条件下，$\frac{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}{|b+1|}=\frac{a+b}{b+1}$对不对？为什么？

4．若 $5\sqrt{|x-y|}+(2y+1)^2=0$，求实数 x，y 的值．

5．已知$2a^2-5a+2<0$，试化简 $2\sqrt{a^2-4a+4}+|2a-1|$．

6．比较下列各组数的大小．

（1）$a>3$，①比较 a^2 与 $3a$ 的大小，②比较ab与$3b$ 的大小；

（2）当$a>0$，$b<0$，$a+b>0$ 时，把 a、b、$-a$、$-b$ 按小到大的顺序排列起来．

7．化简下列各题：