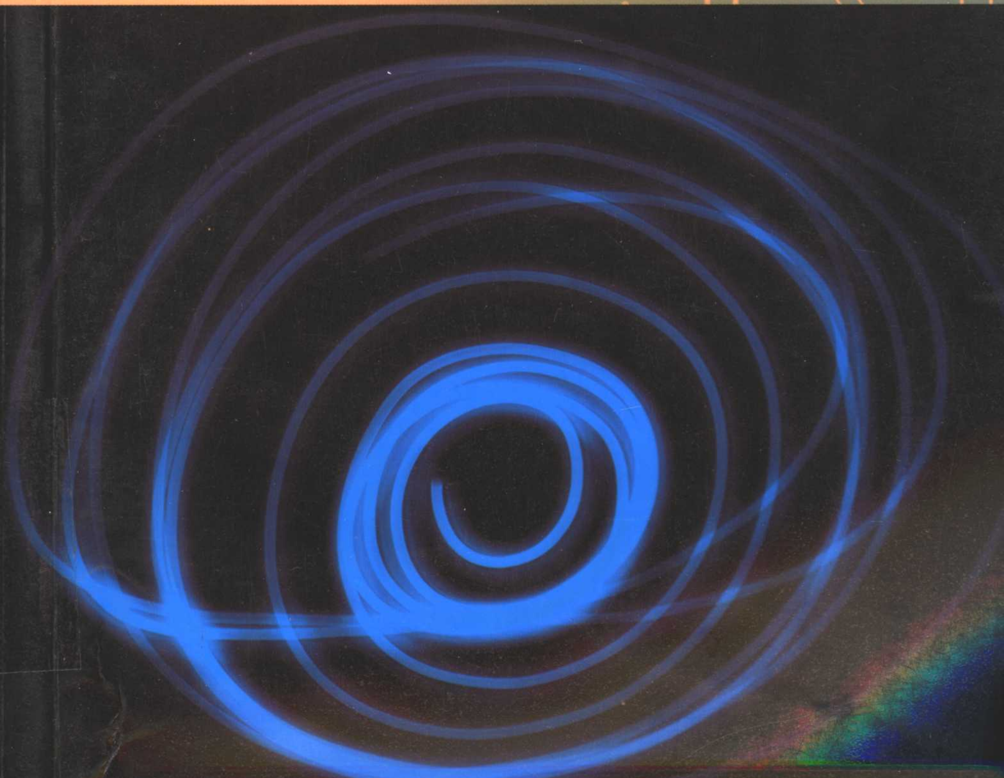
College

数学分析的方法与题解

赵显曾 黄安才 编著



陕西师范大学出版社

高等学校经典教材配套辅导丛书

数学分析的方法与题解

赵显曾　黄安才　编著

安徽财贸大学 藏书 图书馆

陕西师范大学出版社

图书代号：JF5N0803

图书在版编目(CIP)数据

数学分析的方法与题解/赵显曾，黄安才 编著. —西安：陕西师范大学出版社，2005.8

ISBN 7—5613—3286—6/O·88

Ⅰ.数… Ⅱ.①赵…②黄… Ⅲ.数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 090400 号

《数学分析的方法与题解》是一本与众不同的教和学的参考书，基本上按照现行数学分析教材的章节逐一对应编写的。每一节包括内容提要和例题两部分，分析问题思路清晰，不含含糊糊；解题过程条理清楚，说理透彻，既不生搬硬套，也不牵强附会，通过对大量典型例题的分析和求解，提示数学分析的方法、解题规律和技巧。尤其提出了“不求没缺点，而应有特色”的目标，给出了一些原创性问题，有益于启迪思维、培养创新能力。

本书可作为理工科院校本科生学习数学分析的学习辅导书及数学分析习题课的参考书，也可作为考研的数学分析复习指南。

责任编辑 史　进

装帧设计 王静婧

出版发行 陕西师范大学出版社

社　　址 西安市陕西师大 120#(邮政编码：710062)

网　　址 http://www.snuph.com

经　　销 新华书店

印　　刷 南京人民印刷厂

开　　本 850×1168　1/32

印　　张 28.75

字　　数 650 千

版　　次 2005 年 9 月第 1 版

印　　次 2005 年 9 月第 1 次印刷

定　　价 32.80 元

开户行：光大银行西安电子城支行　账号：0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印装问题，请与本社营销中心联系、调换。

电　话：(029)85307864　85233753　85251046(传真)

E-mail：if-centre@snuph.com

前　言

数学分析是数学类各专业的主要基础课，要求高、难度大、周期长，对加强素质教育，提高创新能力，起着举足轻重的作用，关系到整个教学过程的成败. 虽然说数学分析是一门成熟的学科，但是考虑到它近年来的新发展和出现的新问题，以及当前教学的实际情况，为了使其教得透彻，学得深刻，该课程非常需要一本适宜的辅导书.

根据我们数十年的教学实践，编写了《数学分析的方法与题解》，它是一本与众不同的教和学的参考书. 第一，编排体系与一般现行的数学分析教材一致，同步发展，针对性强，不超前使用其后的知识. 第二，强调基本概念、基本理论、基本方法的灵活运用，做到不但要知其然，还要知其所以然；贴近实际，由浅入深，逻辑严谨，说理不落俗套，做到于无声处胜有声. 第三，注意正反两方面材料的运用，指出了一些惯常所易犯的错误. 我们的目标是：不求没缺点，而应有特色.

每当谈到做数学分析的题目时，常听学生们说什么“最怕证明题”，什么“不会做证明题”，“证明题做不好”等等. 这恐怕不是谦虚的托词吧！究其原因是多方面的，最根本的一点就是不会读书. 由于不会读书，也就不愿读书，不读书了. 我们知道，在学了函数极限以后，要学生用 ε—δ 语言给出函数没有极限的定义，结果是学生不会，教师来讲. 在讲了连续函数后，再要学生用 ε—δ 语言给出函数不连续的定义，还是不行，教师再讲. 可是在函数一致连续中，提

出与上类似的问题，仍然不理想. 难道不是吗？这实际上是对快节奏、填鸭式、急功近利的教和学的一种惩罚，决不是仅仅“能够看懂”就能解决问题的，要知道在学习的征途上没有什么捷径可走. 我们主张“认真看书学习”，要一字一句地琢磨，用进取精神去抠一抠，根深才能叶茂.

本书内容翔实，写得有血有肉，不流于形式，写出了我们的心得体会，含有一些原创性问题，是一般教科书中没有的. 传授能力，不能空对空，为了在头脑中形成知识创新网，回答了以下有趣的问题：不要极限的 ε—δ 定义行吗？求分段函数在分界点的导数，有几种方法？L'Hospital 法则给出的只是一个充分条件，为什么是非必要的？在级数中，D'Alembert 判别法、Raabe 判别法、Gauss 判别法是一个系列，且后者比前者更精细；另外，Cauchy 根值判别法优于 D'Alembert 判别法，那么根值判别法的系列该如何？为什么可以像 Cauchy 收敛准则一样，把 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法，也称为收敛准则呢？等等. 由于书中题量较大，题型丰富，不仅是教和学的辅助材料，也是复习考研的参考书，数学爱好者自学数学分析的学习指南.

全书共九章，前五章由我执笔，后四章由黄安才同志执笔，最后统一而成. 由于水平所限，成书仓促，错误在所难免，欢迎批评与指正.

最后，衷心感谢陕西师范大学出版社编辑史进同志的辛勤工作，正是他的努力，才使本书得以早日问世.

赵显曾

2005 年 6 月于南京

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　集合与映射

集合与映射是数学中两个最基本、最重要的概念，就象几何学里的点、直线一样.

§1　集　合

一、内容提要

1. 集合的概念

集合是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集而成的全体. 组成集合的个别对象称为该集合的**元素**.

表示集合的方式有两种：**枚举法**与**描述法**. 在集合的表示中，同一元素不重复出现，也就是说集合中的元素之间没有次序关系.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$；既不是有限集又不是空集的集合称为**无限集**. 自然数集是**可列集**，是无限集的一个特例.

设 S、T 是两个集合，若 S 的每个元素都属于 T，或者说凡是不属于 T 的元素一定不属于 S，即

$$x\in S\Rightarrow x\in T,\text{或者 } x\,\overline{\in}\,T\Rightarrow x\,\overline{\in}\,S,$$

则称 S 是 T 的**子集**，记为 $S\subset T$. 因此，空集$\varnothing$是任何一个集合的子集. 若 $S\subset T$ 且 $T\subset S$，则称 S 与 T **相等**，记为 $S=T$. 若 $S\subset T$ 且 $S\neq T$，则称 S 是 T 的**真子集**.

在数学分析课程中，最常遇到的实数集合是区间：有限的、无限的、开的、闭的等.

2. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差. 设 S、T 是两个集合，由 S 与 T 的元素汇集成的集合称为 S 与 T 的**并**，记为 $S\cup T$，即

$$S\cup T=\{x\mid x\in S \text{ 或 } x\in T\}.$$

由 S 与 T 的公共元素组成的集合称为 S 与 T 的**交**，记为 $S\cap T$，即

$$S\cap T=\{x\mid x\in S \text{ 且 } x\in T\}.$$

由属于 S 但不属于 T 的元素组成的集合称为 S 与 T 的**差**，记为 $S\setminus T$，即

$$S\setminus T=\{x\mid x\in S \text{ 但 } x\overline{\in} T\}.$$

当 $T\subset S$ 时，称 $S\setminus T$ 为 T 关于 S 的**补集**，记为 T_S^c，或简记为 T^c，即

$$T_S^c=S\setminus T.$$

显然满足

$$T\cup T_S^c=S,\ T\cap T_S^c=\varnothing.$$

集合的运算具有以下性质：

(1) **交换律**

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A.$$

(2) **结合律**

$$A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D,$$
$$A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D.$$

(3) **分配律**

$$A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D),$$
$$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cap D).$$

(4) **对偶律**

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,\ (A\cap B)^C=A^C\cup B^C.$$

(5) 设 $A_n(n=1, 2, \cdots)$是无限可列集，则其并集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可列集.

3. Descartes 乘积集合

由集合 A 中的元素 x 与集合 B 中的元素 y 组成一个有序对(x, y)，以(x, y)为元素，它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的 **Descartes 乘积集合**，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

二、例题

1. 证明：由 n 个元素组成的集合

$$T=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

共有 2^n 个子集.

证 由于

$$\varnothing\subset T,\ T\subset T,$$

含 T 的 $k(k=1, 2, \cdots, n)$个元素的集合都是 T 的子集；而含 k 个元素的子集有 C_n^k 个，所以 T 的子集个数一共有

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

2. 证明：任意无限集都包含一个可列子集.

证 设 A 是无限集，在 A 中取一个元素，记为 x_1. 由于 $A\setminus\{x_1\}$不是空集，可在其中取一个元素，记为 x_2. 依次下去，得 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，因为 $A\setminus\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$不是空集，所以可得一个可列子集

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}\subset A.$$

3. 证明：有理数集$\mathbf{Q}$是可列集.

证 先作如下一张数表

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
-1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdots \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
-\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{2} & -\frac{5}{2} & \cdots \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

然后将表中的数自左而右,顺着箭头所示排成一行

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \frac{2}{2},\ -\frac{1}{2},\ \cdots$$

因为有些数在行中多次出现,我们只保留前面的一个,而剔除后边的,这样得到的排列就是**Q**的所有元素的一个排列,所以**Q**是可列集.

4. 证明下列集合等式:

(1) $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$;

(2) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

证 设 $x\in A\cap(B\cup D)$,则由交的定义可知,$x\in A$ 且 $x\in B\cup D$;再由并的定义,$x\in A$ 且 $x\in B$,或者 $x\in A$ 且 $x\in D$,因此 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap D$,即 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$,所以

$$A\cap(B\cup D)\subset(A\cap B)\cup(A\cap D).$$

反之,设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$,由并的定义可知,$x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap D$;再由交的定义,总是有 $x\in A$ 且或者 $x\in B$ 或者

$x\in D$,即 $x\in A\cap(B\cup D)$,所以又有

$$(A\cap B)\cup(A\cap D)\subset A\cap(B\cup D).$$

综上所述,即得所证.

(2) 设 $x\in(A\cup B)^C$,由补集的定义可知,$x\notin A\cup B$,也就是 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,于是 $x\in A^C\cap B^C$,而有

$$(A\cup B)^C\subset A^C\cap B^C.$$

又设 $x\in A^C\cap B^C$,则 $x\in A^C$ 且 $x\in B^C$,也就是 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,便得 $x\notin A\cup B$,即 $x\in(A\cup B)^C$,从而有

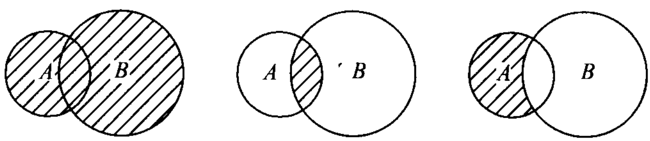
$$A^C\cap B^C\subset(A\cup B)^C.$$

综上,即得所证.

5. 设 A、B 是两个集合.

(1) 等式 $(A\backslash B)\cup B=A$ 成立的充分必要条件是什么?

(2) 又设 $A\cup B=D$,试问 $D\backslash A=B$?



$A\cup B$　　　　$A\cap B$　　　　$A\backslash B$

分析　怎样下手呢?由集合 A、B 的并、交、差的图示法(如上图)的启发,可以猜想(1)所要的条件是"$B\subset A$";(2)中的"$D\backslash A=B$"一般是不对的.但是,图示法并不能代替严格的论证.

解　(1) 若 $B\subset A$,则由集合的运算性质,有

$$(A\backslash B)\cup B=B_A^C\cup B=A.$$

反之,若 $(A\backslash B)\cup B=A$,由并集的定义,则显然

$$B\subset A.$$

综上可知,所要条件是 $B\subset A$.

(2) 当 $A\cap B=\varnothing$ 时,有 $D\backslash A=B$;当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时,则 $D\backslash A\neq B$.因此,结论是"$D\backslash A=B$"一般不对.

6. 证明$(A\backslash B)\cup(A\cap B)=A$.

证 若$x\in(A\backslash B)\cup(A\cap B)$,则$x\in A\backslash B$或者$x\in A\cap B$,总有$x\in A$,所以$(A\backslash B)\cup(A\cap B)\subset A$.

又若$x\in A$,则或者$x\in B$或$x\bar{\in}B$,也就是说,或者$x\in A\cap B$或者$x\in A\backslash B$,所以$x\in(A\backslash B)\cup(A\cap B)$,而有$A\subset(A\backslash B)\cup(A\cap B)$.

综上即得所证.

7. 举例说明集合的并与交不满足消去律:

(1) 由$A\cup B=A\cup C$,得不出$B=C$;

(2) 由$A\cap B=A\cap C$,得不出$B=C$.

解 (1) 取$A=[0,1]$, $B=[1,2]$, $C=[0,2]$,则有

$$A\cup B=[0,2]=A\cup C,$$

但是$B\neq C$.

(2) 取$A=[0,2]$,$B=[1,2]$, $C=[1,3]$,则有

$$A\cap B=[1,2]=A\cap C,$$

但是$B\neq C$.

8. 试用集合符号表示下列各数集:

(1) 满足不等式$\frac{x-3}{x+2}\leqslant 0$的全体实数;

(2) 大于0且小于1的有理数的全体;

(3) 方程$\sin x\cot x=0$的所有实数解全体.

解 (1) 由于

$$(x+2)-(x-3)=5>0,$$

所以不等式成立的充分必要条件是

$$x-3\leqslant 0<x+2$$

由此可得所求的实数集为$\{x\mid -2<x\leqslant 3\}=(-2,3]$.

(2) 由于任何一个有理数都可表为$\frac{p}{q}$的形式,所以大于0且

小于 1 的有理数的全体为

$$\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,0<p<q,\ p、q\in\mathbf{N}^{+}\right\}.$$

(3) 由于

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

所以 $\sin x\neq 0$. 因此,原方程等价于 $\cos x=0$,该方程的解集为

$$\{x\mid\cos x=0\}=\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}.$$

§2 映射与函数

一、内容提要

1. 映射

设 A、B 是两个非空集合,若对每个 $x\in A$,按照某种规则 f,都有惟一确定的 $y\in B$ 与之对应,则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**,记为

$$f:A\to B,\text{或 } x\mapsto y=f(x).$$

其中 y 称为 x 的**象**,x 称为 y 的**原象**,A 称为 f 的**定义域**,记为 $D(f)=A$,称

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$$

为 f 的**值域**.

注意,映射要求元素的象必须是惟一的,但是并不要求原象也惟一. 构成一个映射有两个要素:

(1) 定义域 $D(f)=A$;

(2) 对应规则 f,

至于值域 $R(f)$ 往往可由这两个要素来确定.

对于映射 $f:A\to B$,若 $R(f)=B$,则称 f 为**满射**;若对每个 y

$\in R(f)$有惟一的原象 $x\in A$,则称 f 为**单射**;若 f 既是满射又是单射,则称 f 为**一一映射**.

设 $f:A\to B$ 是单射,对于任意 $y\in R(f)\subset B$,都有惟一的原象 $x\in A$,使得 $f(x)=y$. 于是

$$y\mapsto x$$

构成了从 $R(f)$到 A 的一个映射,称之为 f 的**逆映射**,记为 f^{-1},即

$$f^{-1}:R(f)\to A=R(f^{-1}).$$

设两个映射

$$g:A\to R(g),\ f:D(f)\to B,$$

又设 $R(g)\subset D(f)$,于是可以构造出一个新映射

$$f\circ g:A\to B,\text{或 } x\mapsto y=f(g(x)),$$

称 $f\circ g$ 为 f 和 g 的**复合映射**.

注意,f 和 g 的复合映射是有顺序的,而且也不是任何两个映射都可复合的. 若将映射 f 与 f^{-1}进行复合,可得两个**恒等映射**:

$$f\circ f^{-1}(y)=y,\ y\in R(f);$$

$$f^{-1}\circ f(x)=x,\ x\in A.$$

2. 函数

函数是数学分析的主要研究对象,要深刻地理解,很好地掌握才行.

设 A、B 是两个实数集合,称映射

$$f:A\to B,\text{或 } f:A\to\mathbf{R},$$

为**一元函数**,常记为

$$y=f(x),\ x\in A,$$

读作函数 f.

设 A、B 均为实数集,若 $f:A\to B=R(f)$存在逆映射,则称 f^{-1}是 f 的**反函数**,而称 f 是 f^{-1}的**直接函数**(**或正函数**).

函数 $f:A\to B$ 有反函数的充分必要条件是 f 为一一映射. 若

函数有反函数，则反函数是惟一的.

设函数 $g:A\to\mathbf{R}$ 与 $f:B\to\mathbf{R}$，且 $R(g)\subset B$，则称复合映射

$$f\circ g:A\to\mathbf{R}$$

为 f 和 g 的**复合函数**，即 $\forall x\in A$，有 $u=g(x)\in R(g)$，使得

$$y=f\circ g(x)=f(g(x))=f(u),$$

并称 u 为复合函数的中间变量.

由**基本初等函数**经过有限次的四则运算和复合运算所产生的函数称为**初等函数**.

函数的分段表示，隐式表示与参数表示.

3. 函数的简单性质

有界性

若存在两个常数 m 与 M，使函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\ x\in D,$$

则称函数 f 在 D **有界**. 其中 m 是它的**下界**，M 是它的**上界**.

有界函数的另一个等价定义是：若存在常数 $L>0$，使函数 $y=f(x)$ 满足 $|f(x)|\leqslant L$，$x\in D$，则称函数 f 在 D **有界**.

单调性

设函数 f 定义于 D，若对任意 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)<f(x_2)$），则称 f 在 D **单调增**（或**严格单调增**）. 同样可定义**单调减**或**严格单调减**.

奇偶性

设函数 f 定义于 $(-a,a)(a>0)$，当 $x\in(-a,a)$ 时，有 $f(-x)=f(x)$，则称 f 是**偶函数**；当 $x\in(-a,a)$ 时，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 是**奇函数**.

周期性

若存在常数 $T>0$，对任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 f 是**周期函数**，T 是 f 的周期. 若存在满足上述条件的最小的 T，则称它是 f 的**最小周期**.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com