大学数学辅导丛书

高等数学学习指导

（下册）

主　编　孙法国
副主编　韦奉岐　王拉省
主　审　文　容

西北工業大學出版社

大学数学辅导丛书

高等数学学习指导

（下 册）

主　编　孙法国
副主编　韦奉岐　王拉省
编　者　孙法国　韦奉岐　王拉省　马盈仓
成　涛　胡新利　王晓东　杨阿莉
主　审　文　容

西北工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/孙法国主编．—西安：西北工业大学出版社，2004.9

ISBN 7-5612-1830-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 082440 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　　**邮编**：710072

电　　话：029-88493844　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西友盛印务有限公司

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张：9.75

字　　数：244 千字

版　　次：2005 年 2 月第 1 版　　2005 年 2 月第 1 次印刷

定　　价：14.00 元

前　言

高等数学是理工科院校的一门重要基础课。为帮助读者学好高等数学，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书。本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的参考资料。

本书按照同济大学数学教研室编的《高等数学》（第四版）的章节顺序，分为十二章，每章分为七个部分。

一、本章小结

二、释疑解难

三、典型例题分析

四、综合练习题

五、模拟检测题

六、综合练习题答案与提示

七、模拟检测题答案与提示

本书有以下几个特点：①对每章的内容及方法做了小结，理顺了各知识点之间的关系，并指出了重点及难点。②从释疑解难入手，分析概念，克服难点，抓住了学习高等数学的关键。③通过典型例题介绍方法，注重分析和一题多解，使读者掌握学习高等数学的方法。④精心设计综合练习题和模拟检测题，力求通过练与考使读者掌握考点并适应高等数学考试。⑤在附录部分提供了二套模拟检测题，以供读者检测学习效果。

本书第一、九章由韦奉岐编写，第二、十二章由胡新利编写，第

三、十一章由孙法国编写，第四章由王晓东编写，第五章由成涛编写，第六、八章由王拉省编写，第七、十章由杨阿莉、马盈仓编写，全书由孙法国统稿，文容审稿。

限于编者水平及撰稿时间仓促，若有疏漏之处，敬请读者批评指正，以便修改。

编 者

2004 年 7 月于西安

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一、本章小结

(一) 本章小结

1. 多元函数的极限与连续

(1) 二元函数的概念．设 D 是平面点集，如果对每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x,y(或点 P) 的二元数值函数，记作

$$z=f(x,y)\quad 或\quad z=f(P)$$

称 D 为该函数的定义域.

(2) 多元函数的概念．设 D 是 n 维空间的点集，如果对每个点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$(或点 P) 的 n 元数值函数，记作

$$z=f(x_1,\cdots,x_n)\quad 或\quad z=f(P)$$

称 D 为该函数的定义域.

(3) 二元函数的极限:

① 二元函数的极限的定义．设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(x,y)=A$$

二元函数的极限也称二重极限.

注 二元函数极限的存在,等价于点 $P(x,y)$ 在 $f(x,y)$ 的定义域中以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限都是 A,由此可知,如果 $P(x,y)$ 沿某两种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限不相同,则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在.

② 二元函数极限的运算.若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} g(x,y)=B$,则

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=A\pm B$

ⓑ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} kf(x,y)=kA$

ⓒ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=AB$

ⓓ 若 $B\neq 0$ 时,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{A}{B}$

(4) 二元函数的连续性:

① 二元函数的连续的定义.设函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义,若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

② 初等函数的连续性.二元初等函数在其定义区域内是连续的.

③ 闭区域上连续函数的性质:

ⓐ 有界性——若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上有界,即存在 $M>0$,使得 $|f(x,y)|\leqslant M \quad \forall (x,y)\in D$.

ⓑ 最值定理 —— 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上达到最大值和最小值，即存在 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in D$，使得

$$f(x_1,y_1)=\max_{x\in D}f(x,y)$$

$$f(x_2,y_2)=\min_{x\in D}f(x,y)$$

ⓒ 介值定理 —— 若函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in D$，并且 $f(x_1,y_1)<\mu<f(x_2,y_2)$，则存在 $P_0(x_0,y_0)\in D$，使得 $f(x_0,y_0)=\mu$.

ⓓ 一致连续性 —— 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

2. 偏导数与全微分

(1) 偏导数定义．设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_x'(x_0,y_0)$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数仍然是 (x,y) 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作 $\frac{\partial z}{\partial x}$，或 $f_x'(x,y)$. 类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 或 $f_y'(x,y)$.

(2) 偏导数几何意义．二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 表示空间曲线

$$\Gamma:\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

在点 $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率.

(3) 高阶偏导数. 设函数 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x,y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x,y)$$

那么在 D 内 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ 都是(x,y) 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z = f(x,y)$ 的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$$

其中后边两个偏导数称为混合偏导数.

(4) 二阶混合偏导数相等的充分条件. 如果函数的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续,那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等,即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

(5) 全微分的定义. 如果函数 $z = f(x,y)$ 在点(x,y) 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 的全微分，记做 $\mathrm{d}z$，即 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$.

(6) 方向导数．设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，自点 $P_0(x_0,y_0)$ 引射线 l，设 x 轴正向到射线 l 的转角为 φ，并设 $P'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 为 l 上的另一点，且 $P'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(P_0,\delta)$，我们考虑函数的增量 $f(x_0+\Delta x,y+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 与两点 P_0,P' 的距离 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的比值，当 P' 沿着 l 趋于 P_0 时，如果这个比值的极限存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数，记作 $\frac{\partial z}{\partial l}$，即

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

(7) 梯度．设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y)\in D$，都可定出一个向量

$$\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

这向量称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度，记作 $\mathbf{grad}f$，即

$$\mathbf{grad}f=\nabla f=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

3. 二元函数可微、偏导数、方向导数、连续、极限之间的关系

(1) 可微 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 极限存在.

(2) 可微 $\Rightarrow$ 偏导数存在，且 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

(3) 可微 $\Rightarrow$ 方向导数存在，且 $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=\mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{l}$（其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦）.

(4) 偏导数连续 $\Rightarrow$ 全微分存在.

4. 多元复合函数的求导法则

(1) 如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点(u,v)具有连续偏导数,则复合函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ 在点 t 可导,且其导函数可用下列公式计算

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{8.1.1}$$

式(8.1.1)称为全导数公式.

(2) 如果 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)具有对 x 及对 y 的偏导数,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点(u,v) 具有连续偏导数,则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点(x,y) 的两个偏导数存在,且可用下列公式计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \tag{8.1.2}$$

(3) 全微分形式不变性. 设函数 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数,则全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{8.1.3}$$

如果 u,v 又是 x,y 的函数,即 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$,且这两个函数也具有连续偏导数,则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{8.1.4}$$

将式(8.1.2)代入式(8.1.4)整理得出式(8.1.3),由此可以看出,不管 u,v 是自变量还是中间变量,它的全微分形式是一样的.这个性质叫做全微分形式不变性.

5. 隐函数的求导法

(1) 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续

的偏导数，且

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)\neq 0 \tag{8.1.5}$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内恒能惟一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

(2) 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\quad F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能惟一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

(3) 设 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比(Jacobi)行列式）

$$\mathrm{J}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能惟一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}$$

6. 多元函数微分学的应用，微分法在几何上的应用

(1) 空间曲线的切线与法平面：

① 设空间曲线的参数方程为 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $t\in T$，$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 都是 t 的可微函数且 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，则 Γ 在 M_0 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

② 曲线由一般方程给出. 设

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

若 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}\neq 0$，并且满足隐含数存在定理的条件，且 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，则 Γ 在 M_0 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\left.\left\{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ G'_z & G'_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix}\right\}\right|_{M_0}$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_{M_0}} \tag{8.1.6}$$

法平面方程为

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{M_0} + (y-y_0)\begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}_{M_0} +$$

$$(z-z_0)\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_{M_0} = 0 \tag{8.1.7}$$

(2) 空间曲面的切平面与法线：

① 曲面以一般方程给出. 设 $\Sigma: F(x,y,z)=0$, $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$,则在 M_0 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \{F_x', F_y', F_z'\}\big|_{M_0}$$

切平面的方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) +$$
$$F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

② 曲面以显函数给出. 设 $\Sigma: z=f(x,y)$, $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$,则 Σ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \{f_x'(x_0,y_0),\ f_y'(x_0,y_0),\ -1\}$$

切平面方程为

$$z-z_0 = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$