西德中学数学课本

代数

下册

[西德]威廉·施外策等编

李希贤　薄一仙　译

文化教育出版社

西德中学数学课本

代　　数

下　册

[西德] 威廉·施外策　等编
李希贤　薄一仙　译

文化教育出版社
1981·北京

内容提要

本书是按西德威康·施外策等编的中学代数下册第三版(1978年)译出的。内容分六部分：VI．平方根，实数；VII．二次方程和二次函数；VIII．自然指数幂；IX．幂概念的扩大；X．指数函数与对数；XI．数列，复数．书中较多地使用集和对应的观点来阐述代数内容，并初步介绍了区间套、实数体、同构群等一些较新的概念．本书可供我国数学教师、数学教育工作者参考研究。

西德中学数学课本

代　　数

下　　册

[西德] 威康·施外策　等编

李希贤　薄一仙　译

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 9.25　字数 190,000

1981年4月第1版　1981年11月第1次印刷

印数　1—7,500

书号 7057·032　　定价 0.68 元

本书所采用的各种符号含义如下:

▶ 位于习题号码的前面，表示:这道习题对学生提出较高的要求，或需要教师作补充说明.

10. 黑体的习题号码(不带或带▶)表示: 尽量不要把这道习题删去.

18* 习题号码后加 * 号的(不带或带▶)表示:这是补充的习题，可以选作.

$\boxed{D}$ 定义; 确定一个新的名称(符号)的意义和运用.

$\boxed{S}$ 定理; 从已知的道理中得出一个结论; 定理的文字如果是黑体, 则表示这个定理对今后的学习有重要意义，应该牢牢记住.

$\boxed{R}$ 法则;扼要说明的重要计算方法.

■ 哪道习题特别需要你思考，■就在那里出现.

★ 用此标志的习题表示，你必须具有坚强的毅力，才能将这些习题解开

目　　录

以数表为准进行四舍五入的数字本应采用符号≈(近似)，但在本书中一律采用符号＝(相等)，只要允许最后一位数最多精确到 ±0.5，通常都是这样处理的，而且这样处理也是合适的。

VI.	平方根；实数

42. 一个数的平方；平方函数 $y=x^2$

① 一个正方形的边长为 a) 2cm(8cm), b) 20cm(80cm), c) 0.2cm(0.8cm), d) 0.02cm(0.08cm)，这个正方形的面积有多大？

② a) $12^2, (-12)^2$, b) $1.5^2, (-1.5)^2$, c) $0.9^2, (-0.9)^2$ 表示多大？

我们知道：边长为 3cm 的正方形的面积是 9cm^2.

一般规律：边长为 $a$cm 的正方形的面积 $A=a\text{cm}\cdot a\text{cm}=a^2\text{cm}^2$；这里 a 是一个正有理数 $(a\in Q^+)$.

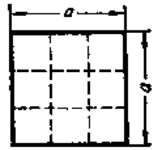

图 1 $a\cdot a=a^2$

这种几何情形引出下面的定义：

D 1 **一个数 a 的平方就是积 $a\cdot a=a^2$**，($a\in Q$；图 1).

D 2 式子 a^2 叫做**幂**，其中 a 是**底数**，数 2 是**指数**；将 a **平方**，得到 a^2. 由上面的习题 ① 和 ② 以及由 $3^2=(-3)^2=9$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$; $0^2=0$ 这样的例子可以看出：

S 1 **一个有理数的平方永远不是一个负有理数**. 换句话说：通过平方，集 Q 的每个元素 x 都

恰好有集 Q_0^+ 中的一个元素 $y=x^2$ 与它相对应(图2). 因此集 Q 可以映射到 Q_0^+ 的一个子集*W上. ——"有序数对"$(x;y)$以 $y=x^2$ 构成一个函数, 即函数 $x\to x^2$, 或者也可以叫做

D 3 函数$y=x^2$, 也就是所谓的**平方函数**. Q是平方函数的**定义域**, W是它的**值域**(参见代数上册).

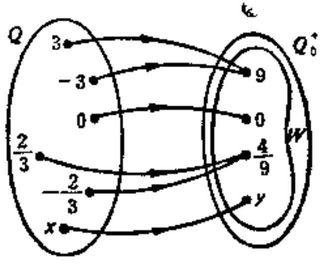

图 2 $x\to x^2$; $y=x^2$

如果在一个直角坐标系中将每个数对 $(x;y)$ 通过它们的图点$P(x|y)$表示出来(图3), 那么所有这些图点便组成一个

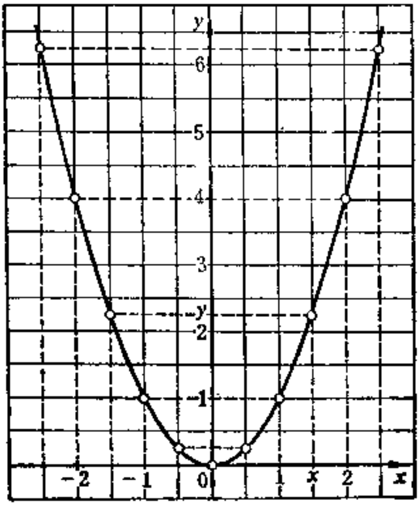

图 3 $y=x^2$

* 在 45 节中将要看到, 反过来, 并不是 Q_0^+ 中的每一个数都是某一个有理数的平方.

函数图象.

从函数方程 $y=x^2$ 可得到下面的数值表:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	−0.5	−1	−1.5	−2	−2.5
$y=x^2$	0	0.25	1	2.25	4	6.25	0.25	1	2.25	4	6.25

我们设想用一切可能的有理数依次代替自变量 x, 并依此计算出相对应的因变量 y 的值, 那么图点 $P(x|y)$就都在一

D 4

条对 y 轴来说是对称的(理由?)曲线上. 这条曲线称为**抛物线**, 更确切一点说, 称为**二次抛物线**. O 叫做抛物线的**顶点**; 当抛物线关于 y 轴翻转时, 顶点的投影点与顶点重合.

在为 $y=x^2$ 制作数值表时出现一个问题: 有哪些有理数位于比如说 −2.5 和 +2.5 之间? 人们可能回答: −2.4; −2.3; −2.2; …; 2.3; 2.4. 但是位于 2.3 和 2.4 之间的比如说有 2.31; 2.32; …; 2.39; 而位于 2.31 和 2.32 之间的又有 2.311; 2.312; …; 2.319 等等. 可以看出: 在任何两个不同的有理数之间可以无限地插入许许多多其它的有理数; 此时, 数的间距可以任意缩小.

S 2

这一点我们也可以这样来表达: **有理数(以及它们在数轴上的图点)"本身是稠密的"**.

在 44 节中我们将指出, 任意两个有理数之间还有无限多的数存在, 这些数不是有理数(即不是分数), 由此也可以推出, 在图 3 的曲线上有无限多个点, 这些点的 x- 值不是有理数.

习题:

1. a）一位，b）二位，c）三位，d）四位，e）n 位自然数的平方是几位数？

2. a）一位，b）二位，c）三位，d）n 位小数的平方数是几位小数？

3. 当 a）$x\in N$，b）$x\in Z$，c）$x\in Z^-$ 时，函数 $y=x^2$ 的值域是什么？

4. 当 a）$-1000<x<-10$，b）$0.05<x<0.50$ 时，x^2 位于哪些数之间？

5. 通过去括号相乘来证实下列公式是正确的：

a）$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

b）$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，

c）$(ab)^2=a^2b^2$，d）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a^2}{b^2}$，$b\neq0$. 这里运用了哪些运算定律？

6. a）$(a+4)^2$，$(b-5)^2$，$(-x-y)^2$；

b）$(2x+5)^2$，$(8-3y)^2$，$(4u-5v)^2$，$(-2s-7t)^2$.

7. a）$(5z)^2$，$(-1.5y)^2$，$\left(\dfrac{3}{4}x\right)^2$；

b）$\left(\dfrac{1}{2}ab\right)^2$，$\left(-\dfrac{2}{3}xy\right)^2$，$(-0.3uvw)^2$.

8. a）$\left(\dfrac{2a}{5}\right)^2$，$\left(\dfrac{3b}{2c}\right)^2$，$\left(-\dfrac{4cd}{3}\right)^2$；

b）$\left(\dfrac{-5a}{6b}\right)^2$，$\left(\dfrac{2a}{b}\cdot\dfrac{3b}{4c}\right)^2$，$\left(\dfrac{-0.4x}{1.5y}\cdot\dfrac{2z}{-0.6x}\right)^2$.

9. 假设 $a\in Q$，将 a^2 同 $(-a)^2$，$-a^2$，$-(-a)^2$，$-(-a^2)$，$|-a|^2$，$|-a^2|$ 进行比较.

▶10. 将 *a*) 1.44; 0.36; 0.09; 0.0016; 0.000625; *b*) $x^2+8x+16$; $4y^2-4y+1$; $9a^2-12ab+4b^2$; $p^2-p+0.25$ 写成另一种作为平方的形式.

11. *a*) 证明: 如果 $a, b\in Q^+$, 而且 $a>b$, 那么 $a^2>b^2$. (提示: 假定 $a=b+c$)

b) 如果 $a>0$ 和 $b<0$, 将 a^2 和 b^2 进行比较.

12. 象图 3 那样画出函数 $y=x^2$ 的图象.

a) 假设 $-3.5\leqq x\leqq 3.5$, 单位是 1cm, *b*) 假设 $-1\leqq x\leqq 1$, 单位是 10cm, *c*)* 假设 $-8\leqq x\leqq 8$, x 轴上的单位是 1cm, y 轴上的单位是 2mm.

13. 从图 3 里读出下面平方的近似值, 并将它们与精确的数值进行比较: *a*) 1.3^2, *b*)* 1.7^2, *c*) 2.1^2, *d*)* 2.3^2, *e*) $(-1.9)^2$, *f*)* 0.65^2.

14*. 按照第 5 题进行口算, 并将得数与图 3 作一比较: *a*) 22^2, *b*) 34^2, *c*) 5.4^2, *d*) 3.9^2, *e*) 6.2^2, *f*) 7.4^2.

利用平方表进行平方

在本书最后我们列出了 1.00; 1.01; 1.02; …; 9.99 的平方表, 每个平方数只取了四位. 有的平方表(如 Sieber 著的"数学用表", *Ernst Klett* 出版社出版)列出了平方数的准确数. 现在我们举两个例子来说明如何使用本书的平方表.

例 1: 4.05^2	我们为 $x=4.05$ 找到了有四个	4.06
和 4.06^2 是多少?	有效数字的平方数 $x^2=16.40$	16.48

例 2: 确定 4.057^2 必须利用插值("**内插法**"):

x 如果增加 $4.060-4.050=\frac{10}{1000}$, 那么 x^2 就增加 $D=$

$16.48-16.40=\frac{8}{100}$.

x 如果增加 $4.057-4.050=\frac{7}{1000}$, 那么 x^2 就增加 $d=\frac{7}{10}D$

$=\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{100}=\frac{56}{1000}\approx\frac{6}{100}$.

结果: $4.057^2\approx16.40+0.06=16.46$.

进一步论证: 图 4 中假设 $\widehat{AB}$ 为表示 $4.050\leqq x\leqq4.060$ 一

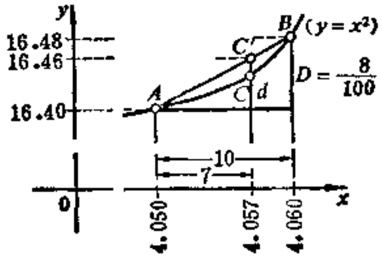

图 4　$d=\frac{7}{10}D$

段(夸大弯曲了的)抛物线. 抛物线上点 C 有 $x=4.057$. C 可以近似地用 AB 弦上的 C' 点来代替, 那么 C 的增长值是 $d=\frac{7}{10}D$.

D 5　**在这里, 一条直线线段代替了一段曲线, 这种插入数值的方法就叫做"直线内插法".**

15. 从平方表中找出下列平方数的值:

$a)$ 2.74^2, $b)^*$ 6.09^2, $c)$ 0.83^2, $d)$ 0.078^2, $e)^*14.6^2$, $f)$ 132^2, $g)^*$ 0.036^2.

16. 当 $x\in Q$ 时, 哪些数在平方表中可以找到 x^2 的准

确数？

17. 利用直线内插法从表中确定下列平方的四个有效数字值：

a) 3.276^2，*b*)* 6.524^2，*c*) 2.019^2，*d*)* 53.68^2，*e*) 837.5^2，*f*)* 1987^2.

18. 一个正方形的边长为 *a*) $a=12.75\text{m}$，*b*)* 23.84m，这个正方形的面积有多大？

利用计算尺进行平方

19. 利用游标指出，*A* 尺上的哪些数正好位于 *D* 尺的 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 25 的上面.

以此来证实：*D* 尺的 x 的上面是 *A* 尺的 x^2(图 5)；同样，*C* 尺的 x 的上面是 *B* 尺的 x^2.

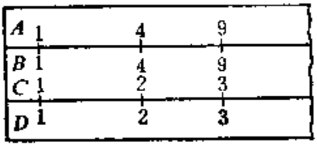

图 5

20. 用计算尺确定：*a*) 1.4^2，*b*) 2.3^2，*c*) 17^2，*d*) 0.32^2，*e*) 2.05^2，*f*) 0.042^2.

21. 在 *D* 尺和 *C* 尺上相乘，在 *A* 尺上读出积的平方：

a) $(1.2\cdot2.5)^2$，*b*) $(1.3\cdot4.2)^2$，*c*) $(0.45\cdot3.6)^2$，*d*) $(0.64\cdot0.56)^2$.

22. 在 *D* 尺和 *C* 尺上相除，在 *A* 尺上读出商的平方(调整一次)：

a) $(2.4\div1.5)^2$，*b*) $(6.8\div2.5)^2$，*c*) $(24.6\div1.35)^2$，*d*) $(0.850\div0.284)^2$.

43. 平方根

① 正方形的面积为 25cm^2, 36cm^2, 81cm^2, 144cm^2 时，正方形的边长分别为多少?

② 说出平方为 *a*) 4, *b*) 9, *c*) 0.25, *d*) 1.44 的所有的数. 从图 3 中怎样可以得到这些数?

③ 如果基本集为 *a*) Q, *b*) Q^+, *c*) N, 解方程 $x^2=0.49$.

知道一个正方形的边长，我们可以算出这个正方形的面积. 现在我们要问，如何反过来由正方形的面积算出正方形的边长. 换句话说: 在平方时，我们确定出底数 $x\in Q$ 的平方 $y\in Q_0^+$, 现在我们要求出平方数 $y\in Q_0^+$ 的底数 x.

比如说 $y=2.25$, 那么 y 就有两个底数: $x_1=1.5$ 和 $x_2=-1.5$(参见图 3). 一般来说，平方数 $y>0$ 有两个底数，即 $x_1>0$ 和 $-x_1$. 为了得到**单值**对应 $y\to x$, 我们把正底数提出来，给它一个特别的名称，叫做 y 的**算术平方根**.

$\boxed{\text{D 1}}$ **一个正数 a 的算术平方根是正数 b, 这个正数 b 的平方等于 a.** 写作: $\sqrt{a}=b$ (读作: a 的算术平方根等于 b).

$\boxed{\text{D 2}}$ 变数 a 叫做**被开方数**; "算术平方根"常常简称作"根". 符号$\sqrt{}$叫做"**根号**". **求 a 的根**或者**将 a 开方**便得到 b.

$\boxed{\text{D 3}}$ 特殊情况: 如果 $a=0$, 那么就写作 $\sqrt{0}=0$.

根据 D_1和 D_3, 如果 $a, b\in Q_0^+$, 那么 $\sqrt{a}=b$ 与 $a=b^2$ 的

含义相同.

例: $\sqrt{16}=4$; $\sqrt{6.25}=2.5$; $\sqrt{0.49}=0.7$; $\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$.

注:

1. 如果 a 是一个正有理数, 那么暂时还不能肯定是否有一个正数 $b=\sqrt{a}$(比较一下$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{0.5}$). 在 45 节中我们将详细讲述这个问题.

2. 很容易看出, 对于 $a\in Q^+$ 最多只有一个数 $\sqrt{a}=b\in Q^+$. 证明: 假设另有一个正有理数 $b'\neq b$, $b'=\sqrt{a}$, 那么 $(b')^2=a$, 同时 $b^2=a$, 因此 $(b')^2=b^2$, 然而根据假设 $(b')^2\neq b^2$. 那么, 这个假设造成了矛盾, 所以是错误的. (并参见 42 节中的第 11 题).

3. 如果 $a<0$, 那么$\sqrt{a}$便没有意义; 一个有理数的平方永远不是负的.

根据 D1, $a>0$ 时: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a$ 和 $\sqrt{a^2}=a$.

这叫做: **平方和开平方互相抵消**. 或者:

S 1	**在正数范围内, 开平方是平方的逆运算.**

如果 $a<0$, 那么 $a^2>0$ 且 $\sqrt{a^2}=-a$. 例: $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3=-(-3)$.

S 2	**因此产生定理: 对于所有的 $a\in Q$ 来说, $\sqrt{a^2}=\vert a\vert$.**

例: $\sqrt{(-0.5)^2}=|-0.5|=0.5$; 对于所有 $x\in Q$ 来说 $\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$.

习题:

求出第 1 至第 4 题中的根值:

1. a) $\sqrt{49}$, b) $\sqrt{81}$, c) $\sqrt{121}$, d) $\sqrt{169}$, e) $\sqrt{256}$, f) $\sqrt{625}$.

2. a) $\sqrt{400}$, b) $\sqrt{8100}$, c) $\sqrt{10^4}$, d) $\sqrt{10^6}$, e) $\sqrt{225000000}$.

3. a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, b) $\sqrt{\frac{1}{81}}$, c) $\sqrt{\frac{16}{25}}$, d) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, e) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$, f) $\sqrt{1}$.

4. a) $\sqrt{0.16}$, b) $\sqrt{0.09}$, c) $\sqrt{1.69}$, d) $\sqrt{1.96}$, e) $\sqrt{0.001024}$.

在第5至第9题中假设所有变数的基本集为Q. 注意S2和下面的例题:

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$$

$$=\begin{cases} a-b, \text{条件是 } a\geqq b \\ b-a, \text{条件是 } a\leqq b \end{cases} \quad \left|\ \begin{matrix}\text{(如果 } a=b\text{, 两} \\ \text{种情况都得零.)}\end{matrix}\right.$$

$$\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|$$

$$=\begin{cases} x+3, \text{条件是 } x\geqq -3 \\ -x-3, \text{条件是 } x\leqq -3 \end{cases} \quad \left|\ \begin{matrix}\text{(如果 } x=-3\text{, 两} \\ \text{种情况都得零.)}\end{matrix}\right.$$

5. a) $\sqrt{4a^2}$, b) $\sqrt{36x^2}$, c) $\sqrt{100y^2}$, d) $\sqrt{144z^2}$, e) $\sqrt{81(a+b)^2}$.

6. a) $\sqrt{\frac{4}{9}u^2}$, b) $\sqrt{0.04v^2}$, c) $\sqrt{a^2v^2}$, d) $\sqrt{x^2y^4}$, e) $\sqrt{1.21z^6}$.

7. a) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$, b)* $\sqrt{x^2+8x+16}$, c) $\sqrt{1+10y+25y^2}$.