

gaodeng daishu

高等代数

新方法

下册

王品超 著

中国矿业大学出版社

高等代数新方法

(下册)

主 编	王品超		
副主编	王彩云	王廷明	阎咏梅
	孙 莉	李衍禧	
编 委	刘秋香	李本星	

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数新方法. 下册/王品超主编. —徐州:中国矿业大学出版社, 2003. 6

ISBN 7 - 81070 - 635 -7

I. 高… I. 王… III. 高等代数—高等学校—教学参考资料 N. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034368 号

书 名 高等代数新方法(下册)

主 编 王品超

责任编辑 马跃龙

责任校对 杜锦芝

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内 邮编 221008)

网 址 <http://www.cumtp.com> E-mail: cumtpvip@cumtp.com

印 刷 江苏徐州新华印刷厂

经 销 新华书店

开 本 850×1168 1/32 **印张** 19.625 **字数** 490 千字

版次印次 2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

印 数 1~4500 册

定 价 24.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前 言

《高等代数新方法》(上册)一书问世以来,倍受广大师生的欢迎,此书在考研中发挥了重要作用.就曲阜师范大学数学系而言,多年来考研通过率在50%左右,2002年达到60%,该系的“代数选讲”基本教材就是《高等代数新方法》(上册).为了适应考研需要,我们在多年考研辅导的基础上又编写了《高等代数新方法》(下册),下册的有些解题方法沿用了上册,但绝大部分解题方法则是近几年创新的.《高等代数新方法》(下册)收集了大量全国重点院校新的考研试题,也有不少题目是我们的创新题目,这些题目既有一定难度和代表性,又很新颖.《高等代数新方法》上、下册结合在一起可作为“代数选讲”教材及教学参考书.需要说明的是书中有些题目用到了多章内容,但在编排上以用到的主要章节内容为准.

在编写过程中难免有误,请读者不吝指正.

作 者

2003年6月

目 录

第一章 多项式	1
§ 1 一元多项式	1
§ 2 多项式的整除性	3
§ 3 多项式的最大公因式	4
§ 4 多项式的分解	5
§ 5 有理系数多项式	6
§ 6 复、实系数多项式.....	7
问题探讨.....	8
 第二章 行列式	54
§ 1 行列式的性质.....	54
§ 2 行列式的乘法和展开.....	54
§ 3 行列式的分块和广义初等行列式.....	55
问题探讨	60
 第三章 矩阵	112
§ 1 矩阵的概念及运算	112
§ 2 逆矩阵、初等变换和初等矩阵.....	115
§ 3 分块矩阵及它的广义初等变换	119
§ 4 矩阵的秩	121
§ 5 方阵的特征值、特征多项式与最小多项式.....	122
§ 6 方阵相似标准形	124

问题探讨	126
第四章 线性方程组	285
§ 1 方程组的求解	285
§ 2 线性方程组解的结构	285
问题探讨	286
第五章 二次型和实对称矩阵	319
§ 1 二次型的简化和方阵的合同	319
§ 2 惯性定律和二次型的分类	320
§ 3 正定二次型与正定矩阵	321
§ 4 半正定二次型和 Hermite 型	322
问题探讨	323
第六章 线性空间和线性变换	379
§ 1 线性空间的基本性质	379
§ 2 基、维数和坐标变换	379
§ 3 子空间	380
§ 4 线性变换与线性空间的同构	382
§ 5 线性变换与矩阵	383
§ 6 线性变换的象空间,核空间,不变子空间及 特征值,特征向量	383
问题探讨	384
第七章 欧氏空间	513
§ 1 内积和 Gram 矩阵的半正定性	513
§ 2 正交向量组和欧氏空间的自同构	515
§ 3 共轭变换与自共轭变换、正交变换	516

§ 4 正射影	517
§ 5 酉空间简述	518
问题探讨.....	519
第八章 双线性函数	579
§ 1 线性函数	579
§ 2 对偶空间	579
§ 3 双线性函数	580
§ 4 对称双线性函数	581
问题探讨.....	583

第一章 多项式

§ 1 一元多项式

一、加法

数域 P 上的一元多项式之全体构成的集合记为 $P[x]$.

定义 $\forall f(x), g(x) \in P[x]$, 在其中适当添上一些系数为零的项, 总可设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i.$$

令 $h(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$, 显然 $h(x) \in P[x]$, 称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和, 记为

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i.$$

令 $-g(x) = \sum_{i=0}^n (-b_i) x^i$, 显然 $-g(x) \in P[x]$, 称 $-g(x)$ 为 $g(x)$ 的负元, 记 $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

不难验证, 多项式的加法有如下性质:

- (i) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;
- (ii) $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$;
- (iii) $f(x) + (-f(x)) = 0$.

由(ii)可定义

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x) = (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)) + f_n(x).$$

这里 $n \geq 3$.

二、乘法

定义 $\forall f(x), g(x) \in P[x]$, 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j.$$

令 $h(x) = \sum_{r=0}^{n+m} (a_r b_0 + a_{r-1} b_1 + \cdots + a_0 b_r) x^r$, $a_k = 0 (k > n)$, $b_l = 0 (l > m)$, 显然 $h(x) \in P[x]$, 称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积, 记为

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{r=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j \right) x^r.$$

不难验证对于多项式的乘法具有以下性质:

- (i) $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;
- (ii) $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$;
- (iii) $(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$;
- (iv) 若 $f(x), g(x) \in P[x]$, 且全不为零, 则

$$f(x)g(x) \neq 0,$$

从而若 $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, 且 $h(x) \neq 0$, 则

$$f(x) = g(x).$$

三、次数

定义 $f(x) \in P[x]$, $f(x) \neq 0$, 称 $f(x)$ 中不为“0”的项的最高次数为该多项式的次数, 记为 $\partial(f(x))$ 或 $\partial(f(x))$ 或 $\deg f(x)$, 零多项式没有次数.

下面各式中出现的多项式均为非零多项式, 如下性质成立:

- (i) $\partial(f(x) \pm g(x)) \leq \max(\partial(f(x)), \partial(g(x)))$;
- (ii) $\partial(f(x) \cdot g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$.

§ 2 多项式的整除性

一、整除及其性质

定义 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若 $\exists q(x) \in P[x]$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x),$$

称 $g(x)$ 能整除 $f(x)$, 记为 $g(x) \mid f(x)$, 否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 记为 $g(x) \nmid f(x)$.

有下列性质:

- (i) 任一多项式可整除零多项式;
- (ii) $c, cf(x)$ 均能整除 $f(x)$, 这里 c 为非零常数;
- (iii) 若 $f(x) \mid g(x), g(x) \mid h(x)$, 则 $f(x) \mid h(x)$;
- (iv) 若 $f(x) \mid g_i(x) (i=1, 2, \dots, s)$, 则

$$\forall u_i(x) \in P[x] (i=1, 2, \dots, s),$$

有 $f(x) \mid \sum_{i=1}^s u_i(x)g_i(x)$;

(V) $f(x) \mid g(x)$, 且 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) = cg(x), c \neq 0, c \in P$.

二、带余除法

定理 2.1 设 $f(x) \in P[x]$, 则对 $g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$, $\exists q(x), r(x)$, 使得 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 其中 $r(x) = 0$ 或者 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$, 且这样的 $q(x), r(x)$ 由 $f(x), g(x)$ 惟一确定, 分别称为商式与余式.

推论 设 $f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$, 则 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$.

§ 3 多项式的最大公因式

一、最大公因式

定义 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若有

(i) $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式;

(ii) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一个公因式都能整除 $d(x)$, 称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式.

定理 3.1 $\forall f(x), g(x) \in P[x]$, 必存在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x) \in P[x]$, 且有 $u(x), v(x) \in P[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

由最大公因式的定义可知, 若 $d_1(x), d_2(x)$ 同时为 $f(x), g(x)$ 的最大公因式时, 则 $d_1(x) \mid d_2(x), d_2(x) \mid d_1(x)$, 故有 $d_1(x) = cd_2(x), c \neq 0$, 这表明, 两个多项式的最大公因式之间最多相差一个非零常数因子, $f(x), g(x)$ 不全为零时, 其最大公因式非零, 我们把其中首项系数为 1 (简称首 1) 的最大公因式记为 (f, g) .

对于 $P[x]$ 中 $m (m \geq 2)$ 个多项式 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ 的最大公因式, 我们完全可以像两个多项式的最大公因式那样去定义, 并且可以得到同样的存在“惟一”性定理及表达定理. 具体去求 m 个多项式的最大公因式, 固然可以用辗转相除法, 但是计算繁杂, 我们将在第三章 § 2 中介绍利用矩阵及矩阵初等变换求最大公因式的简便方法.

二、互素及其有关性质

定义 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若

$$(f, g) = 1,$$

称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

定理 3.2 $f(x), g(x) \in P[x]$, 则 $(f, g) = 1 \Leftrightarrow \exists u(x), v(x) \in P[x]$, 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

推论 1 若 $f(x)=f_1(x)(f, g), g(x)=g_1(x)(f, g)$, 则
 $(f_1, g_1)=1.$

推论 2 若 $(g_1, f)=1, (g_2, f)=1$, 则
 $(g_1g_2, f)=1.$

推论 3 若 $f(x)|g_1(x)g_2(x)$, 且 $(f, g_1)=1$, 则
 $f(x)|g_2(x).$

推论 4 若 $f_1(x)|g(x), f_2(x)|g(x)$ 且 $(f_1, f_2)=1$, 则
 $f_1(x)f_2(x)|g(x).$

§ 4 多项式的分解

一、不可约多项式及其性质

定义 设 $p(x) \in P[x]$ 且 $\partial(p(x)) \geq 1$, 如果 $p(x)$ 不能分解为 $P[x]$ 中两个次数比 $p(x)$ 低的多项式之积, 称 $p(x)$ 在 P 上不可约, 否则称 $p(x)$ 在 P 上可约.

命题 1 设 $p(x) \in P[x], \partial(p(x)) \geq 1$, 则 $p(x)$ 不可约 $\Leftrightarrow p(x)$ 只有形如 c 与 $cp(x)$ 的因式, 这里 $c \neq 0, c \in P$.

命题 2 若 $p(x)$ 为 P 上的不可约多项式, 则 $\forall f(x) \in P[x]$, 或者 $p|f$ 或者 $(p, f)=1$.

命题 3 若 $p(x)$ 为 P 上的不可约多项式, 则对

$$f(x), g(x) \in P[x]$$

只要 $p|fg$, 就必有 $p|f$ 或 $p|g$.

命题 3' 若 $p(x)$ 为 P 上的不可约多项式,

$$p(x)|f_1(x) \cdots f_s(x), s \geq 2,$$

则 $\exists i, p(x)|f_i(x) (1 \leq i \leq s).$

二、分解定理

定理 4.1 设 $f(x) \in P[x]$ 且 $\partial(f(x)) \geq 1$, 则

(i) $f(x)$ 必可分解为 P 上的有限个不可约多项式的乘积;

(ii) 如果

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) \\ &= q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x), \end{aligned}$$

其中 $p_i(x), q_j(x) (i=1, 2, \dots, s, j=1, 2, \dots, t)$ 为 P 上的不可约多项式, 则 $s=t$ 且适当调整因式的次序后有

$$p_i(x) = c_i q_i(x), i=1, 2, \dots, s,$$

其中 $c_i (i=1, 2, \dots, s)$ 为 P 的非零常数.

设 $f(x) \in P[x], \partial(f(x)) \geq 1$, 若

$$f(x) = c p_1^{t_1}(x) \cdots p_s^{t_s}(x), \quad (1)$$

这里 $c \neq 0, p_i(x)$ 为首 1 的不可约多项式, $i \neq j$ 时 $p_i(x) \neq p_j(x) (i, j = 1, 2, \dots, s)$, 称 (1) 式为 $f(x)$ 的标准分解式.

三、重因式定义

定义 $p(x)$ 为 P 上的不可约多项式满足 $p^k(x) \mid f(x)$, 而 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$, 称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式 (这里 k 为非负整数).

当 $k=0$ 时, $p(x)$ 不为 $f(x)$ 的因式; 当 $k=1$ 时, 称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式; 当 $k>1$ 时, 称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式.

定理 4.2 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$), 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $(k-1)$ 重因式.

推论 1 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

推论 2 $f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$.

§ 5 有理系数多项式

定义 设 $f(x)$ 为整系数多项式, 如果 $f(x)$ 的各项系数的最大公因数是 1, 称 $f(x)$ 为本原多项式.

引理 1 两个本原多项式的乘积仍是本原多项式.

引理 2 设非零的整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上可约, 则 $f(x)$ 必能分解为两个次数较 $f(x)$ 低的整系数多项式的乘积.

定理 5.1 (Eisenstein) 设整系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0, n \geq 1$), 如果存在素数 p 使得 $p \mid a_i$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$), $p \nmid a_n$, 且 $p^2 \nmid a_0$, 则 $f(x)$ 在有理数域不可约.

§ 6 复、实系数多项式

代数基本定理 任何次数不小于 1 的复系数多项式必有一个复数根.

可将代数基本定理改述为: 任何次数不小于 1 的复系数多项式必有一个一次因式 $x - c$ (c 为复数).

由此可知, 对于复系数多项式, 仅一次式是不可约的, 因而, 其分解定理如下:

定理 6.1 任何 n ($n \geq 1$) 次复系数多项式 $f(x)$ 必有惟一的标准分解式

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^l (x - c_i)^{r_i},$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数, c_i ($i = 1, 2, \cdots, l$) 为互异复数, r_i ($i = 1, 2, \cdots, l$) 为正整数.

推论 任何 n ($n \geq 1$) 次复系数多项式恰有 n 个复根.

定理 6.2 任何 n ($n \geq 1$) 次实系数多项式必有惟一的标准分解式

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^s (x - c_i)^{r_i} \cdot \prod_{j=1}^t (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数, c_i ($i = 1, 2, \cdots, s$) 及 p_j, q_j ($j = 1, 2, \cdots, t$) 都是实数, r_i ($i = 1, 2, \cdots, s$) 及 l_j ($j = 1, 2, \cdots, t$) 都是正整数, 且 $x^2 + p_j x + q_j$ 不可约, 即

$$p_j^2 - 4q_j < 0 (j=1, 2, \dots, t).$$

推论 对于实系数多项式, 仅一次式及形如 $x^2 + px + q$ 而 $p^2 - 4q < 0$ 的二次式不可约.

问题探讨

1. 证明: 多项式

$f(x) = (x^{50} - x^{49} + x^{48} - \dots + x^2 - x + 1)(x^{50} + x^{49} + x^{48} + \dots + x^2 + x + 1)$ 无奇数次项, 即奇数次项的系数为 0.

证明: 由条件 $f(x) = f(-x)$, 故无奇数次项.

2. 设 $f(x)$ 为多项式, 则 $f(x) = kx$ 的充要条件为 $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b$ 成立.

证明: 必要性显然, 下面来证明充分性, 事实上, 由条件

$$f(2x) = f(x+x) = 2f(x),$$

设 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, 而

$$\begin{aligned} f(2x) &= 2^n a_n x^n + 2^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + 2a_1 x + a_0 \\ &= 2(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0), \end{aligned}$$

$i \geq 2$ 时, 由 $2^i a_i = 2a_i$ 得 $a_i = 0$, 又 $a_0 = 2a_0$, 所以 $a_0 = 0$, 从而 $f(x) = a_1 x$, 即 $f(x) = kx$ 成立.

3. 证明: $f(x) = (8x^9 - 6x^7 + 4x - 7)^3 (2x^5 - 3)^7$ 的展开式中各项系数之和为 1.

证明: $f(x)$ 的各项系数之和为 $f(1)$, 而

$$f(1) = (-1)^3 (-1)^7 = 1.$$

4. 设用 $f(x) (\neq 0)$ 除 $g(x) (\neq 0)$ 所得的商式及余式分别为 $q(x)$ 及 $r(x)$, 任取 $h(x) (\neq 0)$, 问

(1) 用 $f(x)h(x)$ 除 $g(x)h(x)$ 所得的商式及余式是多少?

(2) 用 $f(x)$ 除 $cg(x)$ ($c \neq 0$) 所得的商式及余式是多少?

解: (1) 由条件

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x),$$

设 $h(x)g(x) = h(x)f(x)q_1(x) + r_1(x)$, 这里 $r_1(x)$ 为 $h(x)f(x)$ 除 $h(x)g(x)$ 的余式, $q_1(x)$ 为商式, 故有 $h(x) \mid r_1(x)$, 令

$$r_1(x) = h(x)\varphi(x),$$

若 $r_1(x) = 0$, 则 $g(x) = f(x)q_1(x)$, 故 $f(x) \mid g(x)$, 得 $r(x) = 0$,

若 $r_1(x) \neq 0$, 则 $\partial(r_1(x)) < \partial(h(x)f(x)) = \partial(h(x)) + \partial(f(x))$, 又

$$\partial(r_1(x)) = \partial(h(x)) + \partial(\varphi(x)), \text{ 故 } \partial(\varphi(x)) < \partial(f(x)),$$

由 $h(x)g(x) = h(x)f(x)q_1(x) + h(x)\varphi(x)$, 因为 $h(x) \neq 0$, 故 $g(x) = f(x)q_1(x) + \varphi(x)$, 得

$$q(x) = q_1(x), r(x) = \varphi(x),$$

$$r_1(x) = h(x)r(x),$$

因而 $h(x)f(x)$ 除 $h(x)g(x)$ 的商式为 $q(x)$, 余式为 $h(x)r(x)$.

$$(2) \text{ 由 } g(x) = f(x)q(x) + r(x),$$

$$\text{故 } cg(x) = f(x)cq(x) + cr(x),$$

$f(x)$ 除 $cg(x)$ 的商式为 $cq(x)$, 余式为 $cr(x)$.

5. 证明: 对任意的非负整数 n , 均有 $x^2 + x + 1 \mid x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$.

证明: 设 α 是 $x^2 + x + 1$ 的根, 即 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$,

$$\alpha^{n+2} + (\alpha+1)^{2n+1} = \alpha^2 \cdot \alpha^n + (\alpha+1)^{2n+1}$$

$$= -(\alpha+1)\alpha^n + (\alpha+1)^{2n+1}$$

$$= (\alpha+1)[- \alpha^n + (\alpha+1)^{2n}]$$

$$= (\alpha+1)[- \alpha^n + (\alpha^2 + 2\alpha + 1)^n]$$

$$= (\alpha+1)(- \alpha^n + \alpha^n) = 0$$

故 α 为 $x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$ 的根, 由于 $x^2 + x + 1$ 无重根, 因而 x^2

$$+x+1 \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}.$$

6. 证明: $g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$ 能整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充要条件是 n 为偶数.

证明: 由条件

$$(1-x^2)g(x)=1-(x^2)^{n+1},$$

$$(1-x^4)f(x)=1-(x^4)^{n+1}.$$

充分性. 设 n 为偶数,

$$1-(x^4)^{n+1}=1-(x^{2(n+1)})^2=(1+x^{2(n+1)})(1-x^{2(n+1)}),$$

$$\text{故 } (1-x^2)g(x) \mid (1-x^4)f(x), g(x) \mid (1+x^2)f(x),$$

我们断定 $(g(x), 1+x^2)=1$, 若不然, 设 α 为 $1+x^2$ 与 $g(x)$ 的公根, 则 $g(\alpha)=0, \alpha^2=-1$.

$$g(\alpha)=1+\alpha^2+(\alpha^2)^2+\cdots+(\alpha^2)^n,$$

由于 n 为偶数, 故 $g(\alpha) \neq 0$, 矛盾, 由 $(g(x), 1+x^2)=1, g(x) \mid f(x)$.

必要性. 由条件

$$g(x)=\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}, f(x)=\frac{1-x^{4(n+1)}}{1-x^4}.$$

设 $f(x)=g(x)q(x)$, 即

$$\frac{1-x^{4(n+1)}}{1-x^4}=\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}q(x),$$

$$\frac{(1+x^{2(n+1)})(1-x^{2(n+1)})}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}q(x),$$

$$q(x)=\frac{1+x^{2(n+1)}}{1+x^2}.$$

由于 $q(x)$ 为多项式, 故 $1+x^2 \mid 1+x^{2(n+1)}$.

若 $n=2m+1$, 即 $1+x^2 \mid 1+x^{4(m+1)}, 1+x^2=0$ 的根为 i 或 $-i$, 有

$$1+i^{4(m+1)}=1+1^{m+1}=2=0,$$

矛盾. 由上得 n 为偶数.