泛函分析教程

于宗义 刘希玉 闫宝强 编著

fanhan fenxijiaocheng

山东大学出版社

泛函分析教程

于宗义　刘希玉　闫宝强　编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析教程/于宗义,刘希玉,闫宝强编著．- 济南:山东大学出版社,2001.9(2003.1 重印)

ISBN 7-5607-2335-7

Ⅰ．泛…

Ⅱ．①于…②刘…③闫…

Ⅲ．泛函分析-高等学校-教材

Ⅳ．0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 057940 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

日照市黄海印刷厂印刷

850×1168 毫米　1/32　10.75 印张　279 千字

2001 年 9 月第 1 版　2003 年 1 月第 2 次印刷

印数:2001-3000

定价:19.50 元

序　言

泛函分析是20世纪30年代初步形成的一个重要的数学分支，是研究无穷维空间上的函数与算子理论的一门科学，是数学分析课程的继续和发展．泛函分析在现代物理学、化学、生物工程等学科中有重要作用．在数学内部，泛函分析已渗透到众多其他分支，例如微分方程理论、逼近论、概率论、数值分析、最优化理论等．因此，泛函分析是基础数学专业学生和其他相关专业人员的必修课之一．

这部教材有以下两个特点：

1．内容丰富．这部教材不但包含了一般泛函分析教材中距离空间、有界线性算子空间、Hilbert空间及谱理论的知识，还包含了拓扑空间、局部凸空间、半范线性空间、弱拓扑、抽象函数、Banach代数、C^*代数等方面的内容．而这部分内容是研究抽象空间微分系统所必须掌握的．因此，这部教材对于数学中许多分支是有益的．

2．论述简繁适度．对于本科学生学习的内容，如距离空间、有界线性算子空间、Hilbert空间等方面，尽量用朴实的语言，附有大量的例子来论述．而针对研究生自学能力较强的特点，对于局部凸空间、弱拓扑、抽象函数、Banach代数、C^*代数等方面的内容，则尽量做到言简意赅，以适应研究生的学习．

刘希玉教授和闫宝强教授在我处攻读博士期间的研究方向是

非线性泛函分析，毕业后一直从事非线性泛函分析及其应用的研究工作．他们和于宗义同志多年来一直从事泛函分析的教学工作，对泛函分析有深刻的认识，教学经验丰富．三人合编的这部教材，融合了其他教材的特点，既通俗易懂，又内容丰富，论述深刻，是一部有特色的教材．

郭大钧

2001 年 6 月 15 日于山东大学南院

前 言

泛函分析的理论和方法在数学内部及应用科学中的作用正在日益增长．因此，各高等院校数学系本科生须选修《泛函分析》这门课，数学、物理等学科的硕士研究生都须学习《泛函分析》，但是，同时适合本科生和研究生使用的《泛函分析教程》目前却不多见，本《教程》弥补了这方面的缺憾．

本书第一、二、四等章中的距离空间、赋范线性空间、内积空间、有界线性算子(泛函)等内容．可作为选修学时较少的本科生的泛函分析教材，选修学时较多的本科生可适当增加第三章的拓扑空间，第七章的 Hibert 空间中的谱理论等内容．第五、六、八、九、十章中的局部凸空间、弱拓扑、抽象函数、谱理论、Banach 代数、C^* 代数等内容，可作为硕士研究生的泛函教材．

本书在写作过程中，对研究生选用部分力图做到内容丰富，反映学科的新发展，以适应科研的需要，对于本科生选用部分，考虑到泛函分析的理论和方法都具有抽象性，我们力图用通俗的语言给出本学科的基本内容．理论的阐述尽可能由浅入深，由具体到抽象、新概念及新定理的引入尽可能从直观的角度阐述，或者从学生容易理解的已经学过的数学事实谈起，然后给出抽象的定义或定理．例如，赋范空间的引入，共鸣定理的引入等．另外，本《教程》还精选了较多的例子，其中包括一些本科生易于理解的简单的例子．每章之后都配了较多的习题，并特别注意选了一些适合学

生做基本练习的习题．我们的目的是便于学生去理解泛函分析的抽象概念和方法，并能进一步体会到：数学理论中的抽象概念、方法和技巧，通常是在具体事物的启发下而形成的；反之，实际问题又可以作为抽象理论的具体模型，也是数学理论发展的重要源泉．

本《教程》可作为综合性大学和高等师范院校有关专业本科生的选修课教材及硕士研究生教材，也可供有关教师和科技工作者在科研工作中参考．

本书由三人共同编著，在写作过程中得到了山东师范大学信息管理学院和数学系领导及同事们的大力支持，特别是得到了山东大学郭大钧教授的关怀和帮助，郭教授在百忙中抽时间审阅了初稿，并为之写序，在此，我们表示衷心感谢．

本书在出版过程中，得到了国家自然科学基金、山东省科技攻关重大项目、山东省中青年科学家奖励基金、山东省自然科学基金和山东师范大学著作出版基金的资助，特此致谢．

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请各位专家和读者批评指正．

编著者

2001 年 7 月于山东师范大学

目　录

第一章　距离空间

泛函分析是研究抽象空间及其上定义的算子(映射)性质的一门数学学科.泛函分析中常把一些分析的、代数的、几何的对象(函数、数列、矩阵、运算子等)作为某些特定意义下“空间”的元素,再在抽象空间中加以一般性的讨论,找出其共同规律性的东西.这里所谓空间是指满足一定公理的元素所组成的基本集合,亦即在基本集合中引进了特定公理,使之具有特定的结构.怎样引进空间的结构呢?

在数学分析里我们研究了实数集 R 及定义在 R 上的函数(可视为从 R 到 R 中的映射),讨论了 R 中点列的收敛,R 上函数的连续性等重要概念.人们自然想到把在分析中的上述讨论推广到一般集合上.即在抽象“空间”上讨论元素列的收敛、映射(算子)的连续性等重要概念.要进行这种讨论,抽象的基本集应具备怎样的原始性质?仔细分析“收敛”“连续”等概念,不难发现 R^n 中的距离 d 起着关键作用.而这距离可视为映射:

$$d: R^n \times R^n \to R,$$

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_n) \in R^n$$

且 d 具有如下基本性质:$\forall\ x,y,z \in R^n$

(1)$d(x,y) \geqslant 0$ 且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(2)$d(x,y)=d(y,x)$;

(3)$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$.

人们发现,这些性质是本质的,可以把它们作为距离公理,在抽象的基本集上引进广义的距离,定义距离空间.距离空间在泛函分析中的地位相当于实直线 R 在数学分析中的地位.

§1.1 距离空间的定义及例子

定义 1.1.1 设 X 是非空集合,若存在映射 $d:X\times X\to R$ 满足:$\forall\ x,y,z\in X$ 有

(1)$d(x,y)\geqslant 0$ 且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2)$d(x,y)=d(y,x)$;

(3)$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

恒成立,则称 d 是 X 上的距离,$d(x,y)$是 x 与 y 之间的距离.定义了距离 d 的集合 X 称为距离空间(或度量空间),记为(X,d)或简记为 X.

注 所谓距离空间(X,d),就是基本集 X 上定义了距离 d,而 d 就是对 X 的每一"点对"(x,y)都有唯一确定的实数 $d(x,y)$与之对应,且 d 同时满足通常距离的性质.应当知道,这里没有任何形式上,意义上的其他要求.

任何非空集合 X 都可引入如下距离:$\forall\ x,y\in X$

$$d_0(x,y)=\begin{cases}0, & x=y;\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

通常人们称 d_0 为离散距离.(X,d_0)为离散距离空间.

如果在同一集 X 上引入了两个距离 d_1 与 d_2,且 $d_1(x,y)$与 $d_2(x,y)$不尽相同,那么(X,d_1)与(X,d_2)应看成不同的距离空间.一般地说,如果 X 中不止一点,那么在 X 上可以引进许多距离,成为不同的距离空间.

下面给几个距离空间的例子.

例 1.1.1　设 $R=\{x, x$ 为实数$\}$，规定距离 d 如下：

$$d(x,y)=|x-y|, \forall\ x,y\in R.$$

易验证(R,d)是距离空间.

例 1.1.2　设 $R^2=R\times R$，定义距离如下：

$$d_1(x,y)=\{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|,$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2)$，$y=(\eta_1,\eta_2)\in R^2$. 容易验证：(R^2,d_1)与(R^2,d_2)都是距离空间.

例 1.1.3　n 维 Euclidean 空间 R^n. 设 R^n 是由全体 n 个实数的有序数组 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$组成的集合，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$定义距离如下：

$$d(x,y)=(|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

这种距离称为 Euclidean 距离，赋予这种距离后的 R^n 称为 Euclidean 空间.

关于 d 公理(1)，(2)显然成立. 下面验证(3)：

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\zeta_i|\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\zeta_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.1}$$

其中，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$. 事实上，由于对任意 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，根据 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \tag{1.1.2}$$

可知

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$=[(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i)^{\frac{1}{2}}]^2.$$

开方得

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.3}$$

令 $a_i=\xi_i-\zeta_i$，$b_i=\zeta_i-\eta_i$ 并代入(1.1.3)即得(1.1.1).

例 1.1.1，1.1.2 和 1.1.3 说明定义 1.1.1 中定义的距离是我们所熟悉的距离的推广. 现在我们把空间中的有限数组推广为无穷数列，得到抽象空间 l^2.

例 1.1.4 设 l^2 是由 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|\xi_i|^2<+\infty$ 的无穷数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 组成的集合，对 l^2 中的任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$ 定义距离如下：

$$d(x,y)=(\sum_{i=1}^{+\infty}(\xi_i-\eta_i)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

则 (l^2,d) 是距离空间.

事实上，例 1.1.3 中的不等式(1.1.2)和(1.1.3)可以推出 Cauchy 不等式：

$$(\sum_{i=1}^{+\infty}a_ib_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}a_i^2\sum_{i=1}^{+\infty}b_i^2 \tag{1.1.2$'$}$$

和 Minkowski 不等式

$$(\sum_{i=1}^{+\infty}(a_i+b_i)^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant(\sum_{i=1}^{+\infty}a_i^2)^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{+\infty}b_i^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.3$'$}$$

对所有 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\in l^2$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)\in l^2$ 都成立. 从而立即可得这里的距离满足公理(3)，而(1)和(2)显然成立. 所以 l^2 是距离空间.