GAODENG
SHUXUE

高等数学

上册

何灿芝 主编

湖南大学出版社

高 等 数 学

上 册

主编　何灿芝

编者　何灿芝　张令仪　邓远北
　　　李淑贞　陈湘能　刘利民

主审　黄庆祥

顾问　肖伊莘

湖 南 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是根据国家教委对高等数学的基本要求，在教学改革的实践中编写而成的。

全书分上、下两册，上册包括空间解析几何等预备知识，函数与极限，一元微分学，多元微分学和一元积分学。

本书内容精练，重点突出，例题全面，评注较多，各节之后配有思考题，各章之后配有足够的习题和综合题。书后附有答案或提示，便于教学与自学。可作为高等工业院校的教材，也可以作为工程技术人员和自学成才的读者的自学用书。

高 等 数 学

上 册

何灿芝 主编

责任编辑 朱 华

☆

湖南大学出版社出版发行

（长沙岳麓山）

湖南省新华书店经销 湘潭大学印刷厂印刷

☆

787×1092 32开 17.625印张 396千字

1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数：0001－4000册

ISBN 7－314－00211－8/O·6

定价：2.85元

前　言

高等数学是工科大学生的一门重要的主干基础理论课，通过这门课的学习，不仅要使学生系统地获得微积分、微分方程、级数等高等数学的基本知识、基础理论和基本技能，为后继课程和进一步扩大数学知识奠定较扎实的数学基础，而且特别要注意培养学生的自学能力、抽象思维能力和逻辑推理能力。因此，高等数学的教学必须不断改革。为了适应教改的需要，根据国家教委对高等数学的基本要求，我们从83年开始，编写了这套教材。经过连续四届学生和四个不同专业的反复教学实践，反复修改，在高等数学讲义第二版的基础上修订而成。

全书分上、下两册，共十一章。上册包括空间解析几何等预备知识，微分学部分和一元积分学，共七章。下册包括多元积分学，微分方程和无穷级数，共四章。各章次序可以根据教学的需要作适当调整。

本书每节之后附有思考题，能帮助读者加深对各种概念的理解，培养抽象思维能力。各章后附有足够的习题和适量的综合题，并在书后附有答案与提示，能帮助读者提高分析问题与解决问题的综合能力。

本书适合作为工科各专业的教科书，对具有初等数学基础的读者自学也很方便。

参加本书编写工作的还有黄庆祥同志，编写了讲义第一

版的第十一章；胡耀荣同志为讲义第二版部分章节配了习题；凌晨飞、刘宪高等同志对本书的编写提出了宝贵的意见，并编写了与本书配套的习题解答。

在本书的编写与试用过程中，得到了系和教研室领导的高度重视与关心，并得到了全系数学教师的热心帮助与支持，在此表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中难免有缺点和错误，希望读者批评指正。

编　者

1987年12月

目　　录

第一章 预备知识

数学是研究数、形以及数与形之间相互关系的科学。初等数学主要是研究常数、图形以及它们之间的相互关系，高等数学则是以变量（或变数）和变量之间的相互关系作为其研究对象，以微分为主体。所以，我们要用变化的观点和方法来学习高等数学。本章讲微积分的预备知识，在平面解析几何的基础上，首先建立空间直角坐标系，引进在工程技术和理论研究中具有广泛应用的矢量代数，并以矢量为工具讨论空间解析几何，最后介绍点集的基本概念。

§1.1 矢量代数

一、空间直角坐标系

我们知道，数轴建立了直线上点的位置与实数的一一对应关系，平面直角坐标系使平面上点的位置和曲线的图形与数组 (x, y) 和方程 $f(x, y)=0$ 建立了对应关系。为了描述空间中的点、曲线和曲面，相应地要建立空间直角坐标系。

1. 空间直角坐标系的建立

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位，这三条轴分别叫做 x

轴（横轴）、y轴（纵轴）和z轴（竖轴）。通常把x轴和y轴配置在水平面上，而z轴则是铅直向上的。它们的方向用右手定则来确定，即右手握住z轴，四个手指从x轴的方向转到y轴的方向时，拇指就指向z轴的方向。也就是说，从正向看去，x轴、y轴和z轴按逆时针顺序排定（如图1—1）。这样的三条坐标轴就组成了**空间直角坐标系**。

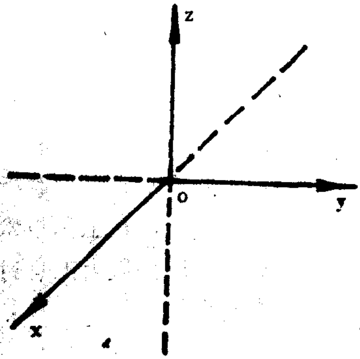

图1－1(a)

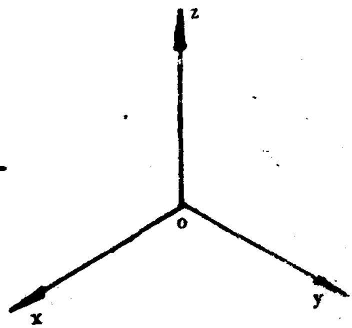

图1－1(b)

每两条坐标轴所确定的平面叫做坐标面，由x轴和y轴所确定的平面叫做xoy面。同样，由y轴和z轴、z轴和x轴所确定的平面分别称为yoz平面与zox平面。这三个坐标面把整个空间分成八个部分，每一个部分叫做一个卦限，

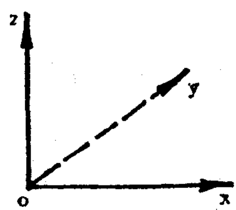

图1－1(c)

在xoy平面上方（即z轴正向）的四个分别卦限称为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，在xoy平面下方的四个分别称为Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限。

2．点在空间直角坐标系中的坐标表示

设M是空间中的一点。过M作三个平面分别垂直于三条

坐标轴，其交点分别为 A、B、C。设这三点在坐标轴上的坐标分别为 x，y，z，这样由点 M 就唯一确定了一个三元有序数组（x，y，z）；反之，对于任意三元有序数组（x，y，z），在 x 轴上取坐标为 x 的点 A，在 y 轴上取坐标为 y 的点 B，在 z 轴上取坐标为 z 的点 C，再过 A、B、C 作三个垂直于坐标轴的平面，设这三个平面的交点为 M（如图1—2），则得到由三元有序数组（x，y，z）所唯一确定的点 M。这样就建立了空间的点 M 与三元有序数组（x，y，z）之间的一一对应关系。三元有序数组（x，y，z）称为点 M 的坐标，记作 M（x，y，z）。x，y，z 分别叫做点 M 的**横坐标**，**纵坐标**，**竖坐标**。建立了空间中的点与其坐标的一一对应关系之后，我们就能确定各卦限内的点（除去坐标面上的点外）的坐标的符号如下：

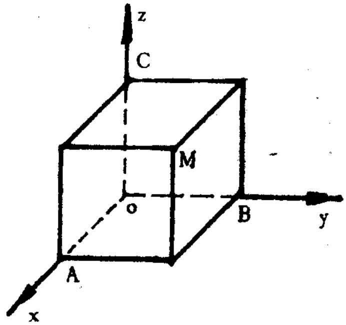

图1－2

Ⅰ（＋，＋，＋），Ⅱ（－，＋，＋），Ⅲ（－，－，＋），

Ⅳ（＋，－，＋），Ⅴ（＋，＋，－），Ⅵ（－，＋，－），

Ⅶ（－，－，－），Ⅷ（＋，－，－）。

原点，位于坐标轴和坐标面上的点的特征是它的三个坐标中总有为零的坐标。具体表示如下

名称	原点	ox 轴	oy 轴	oz 轴
特征	$x=y=z=0$	$y=z=0$	$x=z=0$	$x=y=0$

名称	xoy面	xoz面	yoz 面
特征	$z=0$	$y=0$	$z=0$

3. 两点之间的距离为了举例说明直角坐标的应用，我们导出空间任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离公式。

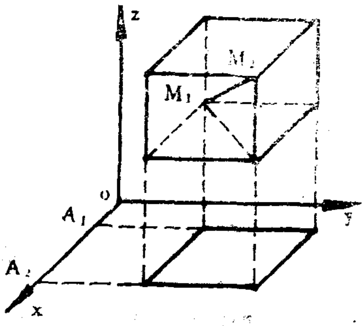

图1－3

如图1—3，经过 M_1 作三个平面分别平行于三个坐标面，且和 x 轴，y 轴，z 轴依次交于 $A_1(x_1,0,0)$，$B_1(0,y_1,0)$，$C_1(0,0,z_1)$；经过 M_2 作三个平面分别平行于三个坐标面且和坐标轴依次交于 $A_2(x_2,0,0)$，$B_2(0,y_2,0)$，$C_2(0,0,z_2)$。这六个平面构成一个长方体，它的三个边长分别是：

$$a=|x_2-x_1|,\quad b=|y_2-y_1|,\quad c=|z_2-z_1|。$$

相继两次用勾股定理，即知 $|M_1M_2|$ 的平方为

$$|M_1M_2|^2=a^2+b^2+c^2$$

因此，M_1，M_2 两点之间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例1. 设 $M_1(-1,3,6)$，$M_2(4,0,5)$ 是空间中两点，O 是坐标原点，试求 $|M_1M_2|$，$|OM_1|$。

解： $|M_1M_2|=\sqrt{(4+1)^2+(0-3)^2+(5-6)^2}=\sqrt{35}$

$|OM_1|=\sqrt{(-1-0)^2+(3-0)^2+(6-0)^2}=\sqrt{46}$

例2. 在 z 轴上求一点M，使它与点 $A(-4,1,7)$ 和点

$B(3,5,-2)$ 等距离。

解：由于 z 轴上的点 $M(x,y,z)$ 的特征为 $x=y=0$，故可设M坐标为 $(0,0,z)$，由于

$$|MA|=\sqrt{4^2+1^2+(7-z)^2}$$

$$|MB|=\sqrt{3^3+5^2+(-2-z)^2}$$

由题意知，$\sqrt{4^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$

两边去根号，求得 $z=\frac{14}{9}$。故所求的点为$M(0,0,\frac{14}{9})$。

二、矢量及其运算

1.矢量概念　只有大小的量为**数量**（或**标量**），如温度、时间、质量、面积和能量等等；不仅有大小而且有方向的量称为**矢量**（或**向量**），如力、速度、加速度、动量、电场强度等等。

在几何中的有向线段就是一个直观的矢量。通常用空间中的有向线段 AB 来表示矢量。线段的长度表示大小，用端点的顺序 $A\to B$ 表示方向。A 称为始点，B 称为终点，这个矢量本文中记作 $\overrightarrow{AB}$ 或用 $\vec{a}$ 表示。矢量的大小（或长度）的数值称为它的**模或绝对值**，用记号 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$ 表示。如图（1—4）所示。

具有大小和方向而无特定位置的矢量称为**自由矢量**。在这里所讨论的矢量，除特别说明外，都指自由矢量，就是说，所有方向相同、长度相等的矢量，不管始点如何，都看作相同的矢量。

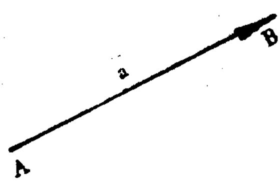

图1－4

模等于1的矢量称为**单位矢量**。

模等于零的矢量称为**零矢量**，记作$\vec{0}$，它是始点和终点重合的矢量。

模与矢量$\vec{a}$的模相等而方向相反的矢量称为$\vec{a}$的**负矢量**，记作$-\vec{a}$。

在直角坐标系中，始点与原点O重合而终点位于一点M的矢量$\overrightarrow{OM}$称为点M的**矢径**，记作$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$。空间的任一点$M$对应着一个矢径$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$，反之，每一个矢径$\overrightarrow{OM}$对应着空间一个确定的点$M$，即矢径的终点。

2.矢量的加减法、数与矢量的乘积　由物理实验知道，作用在一点的两个力$\vec{F_1}$，$\vec{F_2}$的合力是以$\vec{F_1}$，$\vec{F_2}$为边所作成的平行四边形的对角线所表示的力$\vec{F}$（如图1—5）。

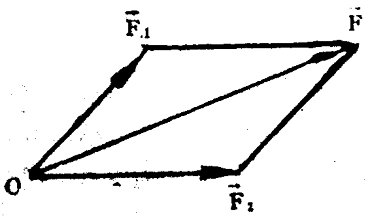

图1—5

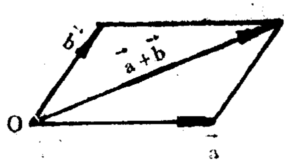

图1—6

设有两个矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$，把它们的始点移到一起（如原点O），从$\vec{a}$、$\vec{b}$为两边作平行四边形，由公共始点作出的对角线矢量就称为**矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和**，如图1—6，记作

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b},$$

这种方法称为平行四边形法则。我们也可以把二矢量首尾相接，由始点到终点的矢量即为和矢量$\vec{a}+\vec{b}$，这种方法叫做三角形法则（图1—7）。