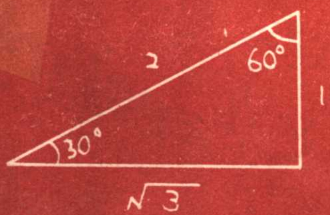
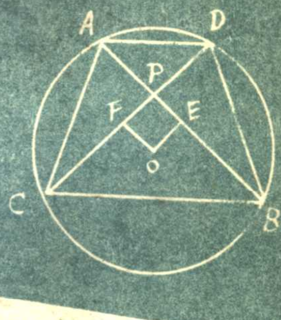
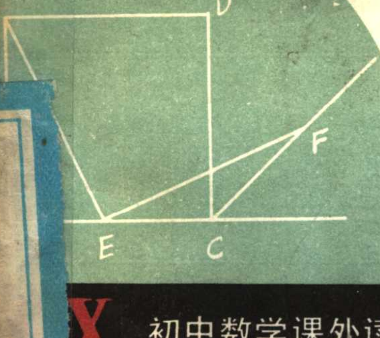
数学竞赛辅导讲座

（初中三年级用）







初中数学课外读物

湖北少年儿童出版社

数学竞赛辅导讲座

（初中三年级用）

主编　熊大寅

编者　王白水
张广德

湖北少年儿童出版社

数学竞赛辅导讲座
（初中三年级用）
熊大寅　主编
·
湖北少年儿童出版社出版　湖北省新华书店发行
襄樊日报印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　8.5印张　180,000字
1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷
印数：1—185,900
统一书号：7305·126　定价：0.83元

序

要使学生成为知识的主人而不是成为知识的容器，这种观点已越来越为广大教育工作者所接受。相应地，在中学数学教学领域内，开拓第二课堂的工作也已普遍引起重视。这里，组织数学竞赛活动成为推动这项工作的重要一环。而与竞赛活动相表里的有关辅导讲座理所当然地成为第二课堂内容的重要组成部分。在这种形势下，湖北少年儿童出版社主动组织、编写这套初中数学竞赛辅导讲座丛书，我以为是及时的，有积极意义的，值得向青少年读者推荐。

大家都知道，在数学教育上培养思维能力的工作宜于从早抓起，从少年时代抓起，这套丛书面向初中读者，这也正反映了编辑匠心独具，是这方面下力量的有心人，而参加编写工作的同志，有多年从事中学教研工作的数学工作者，也有多年从事中学数学教学积累有相当丰富经验的中学教师。他们的看法是：编写初中数学课外读物，要从初中学生的实际和初中数学教学的实际出发，要强调立足于教材，略高于教材。在开拓视野，发展能力这两点上，更应侧重于后者。因此从具体内容来看，主要在于从各年级的基础知识出发，突出了综合性和灵活性，我以为从这个角

度来确定读物的深度和广度，对于提高初中数学教学质量，也是有积极意义的。

近年来，我由于工作关系，对于中学数学教学问题接触得比较少，但由于中学生科学文化水平的高低极大地影响着“四化”建设，作为科技工作者，对此是不能不关心的。因此对本丛书的出版，我也由衷地感到高兴。愿意借此机会写几句话作为代序。

齐民友

1984.8.1

内 容 提 要

《数学竞赛辅导讲座》是初中学生开展数学竞赛活动的指南。

书中将整个初中数学竞赛范围内的知识作了系统的归纳，并根据各年级学生的实际情况，构筑起一个多层次的知识体系，着重于数学思维能力的培养和解题技巧的训练，强调用高一级的数学知识解决初中数学问题。书中编选的例题和习题，大都是国内外数学竞赛的试题，便于读者了解初中数学竞赛的基本要求。

目 录

第一讲 函 数

函数是初等数学里的一项重要内容，我们在初中阶段的讨论只能限制在一次函数和二次函数里，对于分式函数和无理函数仅有所涉及。对于一次函数和二次函数，通常是研究以下几个方面的问题。

1．利用二次函数$y=ax^2+bx+c$，研究二次方程$ax^2+bx+c=0$的根的情况。

2．运用一次函数和二次函数的图象解答一些问题。

3．求函数的表达式。

4．其他，如函数的值域，二次函数的整数值及有理数值等。

下面分别就以上几方面的问题进行一些研究。

一、利用函数研究方程

由于一元二次方程$x^2-ax+b=0$的两根，是函数$y=f(x)=x^2-ax+b$的图象与x轴两个交点的横坐标，故可作出下面一些判断：

方程$x^2-ax+b=0$有两正根的条件是：

$f(0)>0$，轴$x=\frac{a}{2}>0$，判别式$\Delta>0$；有一正根的条件是：$f(0)=0$，$\frac{a}{2}>0$，或$f(0)<0$；有两负根

的条件是：$f(0)>0$，$x=\frac{a}{2}<0$，$\triangle>0$；一根大于1，另一根小于－1的条件是：$f(1)<0$，$f(-1)<0$；一个根比β大，另一个根比β小的条件是：$f(\beta)<0$。

类似地，可求抛物线开口向下的情况。

例 1 设二次方程$x^2-ax+a^2-4=0$有二实数解，试回答下列问题：

（1）若两个解同时都是正数，求a的取值范围；

（2）若只有一个解是正数，求a的取值范围；

解：设$f(x)=x^2-ax+a^2-4$，则

（1）两个解同时为正的条件是：

$$\begin{cases} f(0)=a^2-4>0; \\ \text{轴 } x=\frac{a}{2}>0; \\ \text{判别式}\triangle=a^2-4(a^2-4)\geqslant 0。 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} a<-2 \text{ 或 } a>2; \\ a>0; \\ -\frac{4}{\sqrt{3}}\leqslant a\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}。 \end{cases}$$

从而得， $2<a\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

（2）只有一个解是正数的条件是：

(i) $f(0)=0$，轴$x=\frac{a}{2}>0$，

即 $a^2-4=0$， $a>0$，

$\therefore$ $a=2$。

(ii) $f(0)<0$，即 $a^2-4<0$，

$\therefore -2<a<2$。

由 (i)、(ii) 得 $-2<a\leqslant 2$。

例 2 设二次方程$x^2+(a^2-1)x+a-2=0$有一根比1大，另一根比-1小，试求常数a的取值范围。

解：设函数$f(x)=x^2+(a^2-1)x+a-2$，由 $f(x)$ 的图象可知：

$f(1)<0$，$f(-1)<0$，它是$f(x)=0$有一根大于1而另一根小于-1的充要条件，

$\therefore$ $a^2+a-2<0$，$-a^2+a<0$，即$a^2-a>0$，

故 $-2<a<1$ 且$a<0$ 及$a>1$。

$\therefore$ $-2<a<0$。

例 3 m为怎样的值时，方程$2x^2+(m-2)x+(m-5)=0$的一根大于2，且另一根小于2。

解：令$y=f(x)=2x^2+(m-2)x+(m-5)$，

$\because$ $a>0$，$\therefore$ 它的图象抛物线的开口向上，当$f(2)<0$时，在$(-\infty, 2)$与$(2, +\infty)$区间内，抛物线一定与x轴有一交点，

$\therefore$ $2\times(2)^2+(m-2)\cdot 2+m-5<0$。

即 $3m<1$，$m<\frac{1}{3}$。

上面的分析是，若方程$2x^2+(m-2)x+(m-5)=0$ 有一个根大于2，另一根小于2，则有$m<\frac{1}{3}$。下面证明当$m<\frac{1}{3}$时，方程$2x^2+(m-2)x+(m-5)=0$的一

根大于2，而另一根小于2。

∵ $m<\frac{1}{3}$，则判别式$\Delta=(m-2)^2-4\times2(m-5)$

$=m^2-12m+44>0$。

设两根为α、β，则

$$\alpha\beta=\frac{m-5}{2}<0,\quad (当m<\frac{1}{3}时)$$

∴ α、β中必有一正根，一负根，负根必小于2。

又 $f(2)<0$，$f(0)=m-5<0$，由此可知抛物线在〔0，2〕内与x轴不相交，因此这个正根必大于2。

例 4 具有以奇数a、b、c为系数的二次方程$ax^2+bx+c=0$的二根是α、β，且α、β满足$\alpha>1$，$-1<\beta<0$，当这个二次方程的判别式的值为5时，求α、β的值。

解：当$a<0$时，在方程的两边同乘以-1，得到与之等价的方程 $-ax^2-bx-c=0$，其判别式$\Delta=(-b)^2-4(-a)(-c)=b^2-4ac$，与原来的判别式相同。

∴ 当$a>0$时，

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad ①$$

$$f(x)=0的解为\ \alpha>1,\ -1<\beta<0 \qquad ②$$

从 $y=f(x)=ax^2+bx+c$的图象（如下图）可知

$f(-1)>0$

即 $a-b+c>0$ ③

$f(0)<0$，即$c<0$ ④

$f(1)<0$

即$a+b+c<0$ ⑤

判别式$\Delta=5$，

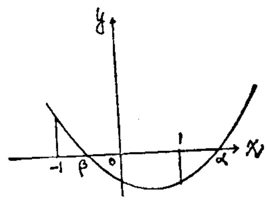


图 1.1

即$b^2-4ac=5$，

$\therefore \quad b^2=4ac+5$ ⑥

由③+⑤×（-1），得$-2b>0$，$\therefore b<0$ ⑦

由$a>0$，$c<0$及⑥，得

$b^2<5$，且b是奇数，

$\because \quad b^2=1$，$b<0$，$\therefore b=-1$。

代入⑥，得 $ac=-1$，而$a>0$，$c<0$，

$\therefore \quad a=1$，$c=-1$，这样能满足③、⑤，

因此，二次方程为 $x^2-x-1=0$。

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}。$$

例 5 设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$，其中$a\neq 0$且a、b、c为实数，对某常数t，如有$af(t)<0$，试证：$f(x)$有不同的两个实根，其中一个实根比t小，另一个实根比t大。

证： $\because af(t)<0$，

$$\therefore \quad a^2\left[\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]<0;$$

$$\because \quad a^2>0, \quad \therefore \quad \left(t+\frac{b}{2a}\right)^2<\frac{\Delta}{4a^2},$$

而 $\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2$为非负数，

$\therefore \quad \Delta>0$。

因此，$f(x)=0$有不同的两个实根。

设此二实根为α、β $(\alpha<\beta)$，

则有$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$，

$af(x)=a^2(x-\alpha)(x-\beta)$，

$\therefore\ af(t)=a^2(t-\alpha)(t-\beta)<0$。

而 $a^2>0$， $\therefore\ \alpha<t<\beta$，

即一个根α比t小而另一个根β比t大。

例 6 设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$，其中$a\neq0$，且a、b、c为实数，对于某两个常数 $p<q$，有$f(p)\cdot f(q)<0$，试证：$f(x)=0$有不同的两个实根。

证：假设$f(x)=0$有两个相等的实数根或无实数根，则判别式$\triangle=b^2-4ac\leqslant0$，

$$而\ f(p)\cdot f(q)=a\left[(p+\frac{b}{2a})^2-\frac{\triangle}{4a^2}\right]a\cdot\left[(q+\frac{b}{2a})^2-\frac{\triangle}{4a^2}\right]$$

$$=a^2\left[(p+\frac{b}{2a})^2-\frac{\triangle}{4a^2}\right]\left[(q+\frac{b}{2a})^2-\frac{\triangle}{4a^2}\right]$$

$\because\ \triangle\leqslant0$，

$\therefore\ (p+\frac{b}{2a})^2-\frac{\triangle}{4a^2}\geqslant0$，$(q+\frac{b}{2a})^2-\frac{\triangle}{4a^2}\geqslant0$，

因而 $f(p)\cdot f(q)\geqslant0$，

这与 $f(p)\cdot f(q)<0$矛盾。

产生矛盾的原因是假设$\triangle=b^2-4ac\leqslant0$，即$f(x)=0$有两个相等的实根或无实根得来的，所以假设不能成立。

即$f(x)=0$有两个不等的实根。

二、运用函数图象解答问题

由于一次函数的图象是直线形，因此匀速运动$S=$

S_0+vt　（v为常数）的图象为一直线（或射线、或线段），我们可以运用它的图象来解答一些匀速运动的问题。

二次函数的图象为抛物线，因此，我们也可以从二次函数　$y=ax^2+bx+c$的图象的位置等情况来判定系数a、b、c的符号。

如从图1.2可以看出：

$a<0$；

由$-\dfrac{b}{2a}>0$，

而得$b>0$；

由此$f(0)=c>0$。

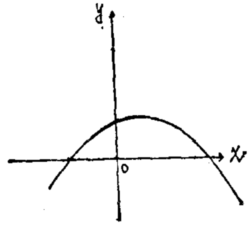


图 1.2

例 7　一条电车路长12公里，从早晨6点钟开始，每10分钟有一辆电车分别从始、终点站向两个方向开出，行驶全程历时45分钟，用图象表示电车在10点和12点之间运行的情况，在11点开出的电车在路途与多少辆电车相遇？早晨6点开出的电车呢？

解：先建立坐标系，以（6，0）为原点，6表示早晨6点钟，0表示电车距起点站（或终点站）的距离（以公里为单位）。

电车从起点站（或终点站）运行45分钟到达终点的运动情况，可以用一线段表示（假设电车是匀速运动），如6点从起点站开出的电车运行情况可用线段AB（图1.3）表示，A点即原点，B点的坐标为（$6\frac{3}{4}$，12），每10分钟开出一辆车，当方向相同时，表现为一组平行线段。

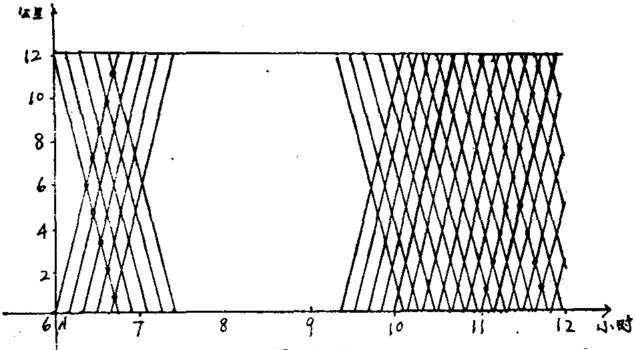


图 1.3

图的右边，表示从10点钟到12点钟之间电车对开的情况，所有的交点均表示电车相遇的情况，从图象可知，在11点开出的电车与从对面开出的电车相遇9次，如果把从11点由起点站和终点站开出的两辆电车都计算进去，则有17次，从6点开出的电车则只相遇9次。

例 8 试用图象求出时钟从0时到6时之间长针与短针何时重合，并求在3时与4时之间长针与短针的夹角何时为45°。

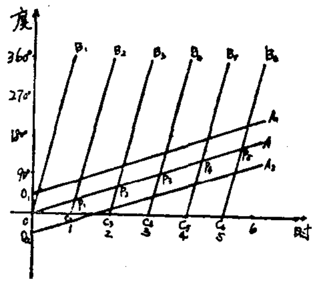


图 1.4

解：时钟的长针和短针都是匀速运动的，因此它们的图象都是直线（横轴以时为单位，纵轴以度为单位）。

长针每一小时走一圈即360°，所以长针的图象为图1.4中的C_1B_1，C_2B_2，C_3B_3，C_4B_4，C_5B_5，C_6B_6等六条平行线段。

短针 6 小时转180°，所以短针的图象如图 中OA线段。

OA与C_1B_1,C_2B_2，C_3B_3，C_4B_4，C_5B_5，C_6B_6的交点P_1，P_2，P_3，P_4，P_5等即为长针与短针重合的时刻。从图象上可以看出，两针重合的时刻大约是 1 时$\frac{1}{2}$分， 2 时 1 分， 3 时16.5分， 4 时22分， 5 时27分。

其次，把表示短针运动的线段OA沿纵轴向上和向下平移，移动的距离等于纵轴刻度的45°，得到的两条线段O_1A_1和O_2A_2与长针在 4 时至 5 时运动的线段C_5B_5交于Q_1、Q_2两点，从图形上可看出，Q_1和Q_2对应的时刻是 3 时 8 分和 3 时25分，它们就是两针夹角为45°的时间。

例 9 已知$y=ax^2+bx+c$的图象如图 1.5，

（1） 说出a、b、c和b^2-4ac的符号；

（2） 求OA·OB的值；

（3） 若$|OA|=|OC|$，求a、b、c之间关系；

（4） 求顶点M的坐标；

（5） 计算△AMB的面积。

解：（1） 因为抛物线的开口向下，

∴ $a<0$

当$x=0$时，$y=c>0$，

顶点M的横坐标为$-\frac{b}{2a}>0$。

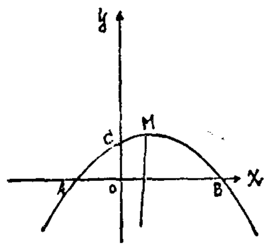


图 1.5

∵ $a<0$， ∴ $b>0$，

有$a<0$，$b>0$，$c>0$，$b^2-4ac>0$。

（2）OA、OB是方程$ax^2+bx+c=0$的两根，

$\therefore\quad OA\cdot OB=\frac{c}{a}$。

(3) $|OA|=|OC|$，$OA=-c$，

$\therefore\quad C=a(-c)^2-bc+c$，$ac-b+1=0$。

(4) M的坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

(5) △AMB面 积 $=\frac{1}{2}\times\frac{4ac-b^2}{4a}\times|AB|$，

而 $|AB|=|x_1-x_2|$

$$=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=-\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\quad \triangle AMB面积=\frac{1}{2}\times\frac{4ac-b^2}{4a}\cdot\left(\frac{-2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{(b^2-4ac)\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}。$$

三、求函数表达式

求一次函数的表达式需要两个独立的条件，求二次函数的表达式需要三个独立的条件。例如，若二次函数的图象经过三点，则函数可设为$y=ax^2+bx+c$；若二次函数的图象在x轴相交于（α，0），（β，0）两点，则函数可设 为$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$，相切时为$y=a(x-\alpha)^2$；若二次函数