# 應用計算機數學

APPLYING CALCULATOR


萬里書店出版

莫紹祥編著 · 羅元祐校訂

# 應用計算機數學

莫紹祥編著　羅元祐校訂

香港萬里書店出版

# 應用計算機數學

莫紹祥編著

出 版 者：萬里書店有限公司
香港北角英皇道486號三樓
電話：5-632411 & 5-632412

承 印 者：金冠印刷有限公司
香港北角英皇道499號六樓B座

定 價：港幣五元二角




（一九八〇年二月版）

# 序

在小型數位電子計算機沒有發明以前，數學的領域已經是多姿多彩的了。不過，就在幾十年前，有不少數學的分支如計算方法、製表技術、矩陣、連分數等，往往沒有受到重視，它們通常只會在理論數學的書籍中出現。原因是它們的實際計算十分冗長，而當時的計算工具效率還很低，所以人們便不免對它們望而卻步。到了現在，性能優越的計算機已經十分大衆化了。可是這些數學領域上的問題已習慣性地被遺忘，筆者有見及此，便把其中比較淺易而又有趣味性的部分，介紹給讀者。

此外，又鑒於一般人都認爲計算機只適用於商行、數學家及學生。所以書中所介紹的應用方法，力求多樣化，希望大家對計算機的能力，能作出比較正確的估計，不致於埋沒了計算機的潛能。

本書所用之計算機，除特別聲明外，都是 FX－3000。

筆者編寫這本書尚屬初試，錯漏之處，敬請讀者指正。

莫紹祥於香港

# 目　次

序 …………………………………………………………………… I
一、計算機的使用 ……………………………………………… 1
二、一些合約 …………………………………………………… 7
三、巴比倫人的數學 …………………………………………… 11
四、一道難題 …………………………………………………… 13
五、幻　方 ……………………………………………………… 22
六、天才的表演 ………………………………………………… 29
七、美麗的三角形 ……………………………………………… 35
八、代數方程 …………………………………………………… 40
九、二十位有效數字 …………………………………………… 48
十、數字推理 …………………………………………………… 53
十一、π 等於 ………………………………………………… 57
十二、做個對數表 …………………………………………… 62
十三、三個聰明人 …………………………………………… 67
十四、遊戲部分 ……………………………………………… 76

# 一、計算機的使用

關於計算機的輸入方法，說明書一定會交待得很清楚，而且不同型號計算機的輸入程序也往往有很大差別。所以本章的目的，只是告訴大家，使用計算機時應注意的地方。

1. 計算機的函數鍵主要分爲兩種。第一種的例子是sin、cos、log、$\sqrt{\ }$、x! 等。第二種的例子是＋、－、×、÷、$x^y$、${}_nC_r$、${}_nP_r$ 等。它們的主要分別是計算第一種函數只需一個數據，第二種函數的計算卻必須有兩個數據。例如：減法的計算必須有減數及被減數。所以輸入時必然包括兩個數據及一個運算符號。如：

5 － 3 的輸入是

5 － 3 ＝

5 ENT 3 －

第一種函數只需一個數據便可求得答案。如：

3! 的輸入是　　3 x!

log 2 的輸入是　2 log

至於三角函數的輸入，由於現在流行三種單位，所以計算時必須決定使用的單位才行。三角函數計算雖然也要決定兩個數據，但只是使用單位帶來的混亂，所以還是把它當作第一種函數來得恰當。

說到單位，便想起了單位轉換鍵。一般計算機的單位轉換鍵有十進、六十進互換鍵、弧度、角度互換鍵等。一些專業計算機，還有英制、公制互換鍵。所有這些，也可以當作第一種函數。

在第一種函數中，有些和第二種很相似，它們是 $1/x$、$+/-$、$\sqrt{X}$、$X^2$、$10^x$、$e^x$ 等。例如：

$-X=-1\times X$　　所以屬於乘數，

$$\left.\begin{aligned} 1/x &= X^{-1} \\ \sqrt{X} &= X^{.5} \\ X^2 &= X^2 \end{aligned}\right\}$$ 都是指數運算

這裏我們注意到，只要把第二種函數的一個數據變爲常數，便成了第一種函數。現在讓我們用計算機證明一下吧。

求　$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$

| | | |
|---|---|---|
| 2 $\sqrt{\ }$ | | .5 $X^y$ $X^y$ 2 = |
| 3 $\sqrt{\ }$ | 或 | 3 = |
| 5 $\sqrt{\ }$ | | 5 = |
| 7 $\sqrt{\ }$ | | 7 = |

顯然，兩邊求得的答案是一樣的（不考慮誤差），所以我們可以把 $1/x$、$-X$、$10^x$ 等當作第二種函數的特殊情形。

第一種函數中，最純種的要算是X！了。因爲它沒有單位的煩惱，也不是源出自第二種函數的。X！的定義是由1至X各整數的乘積。

不過事有湊巧，X！正好等如 $xPx$ 或 $xP_{(x-1)}$。

我不把X！當作nPr的特殊情形，是因爲nPr的定義是從X！的定義而來的。

nPr 的定義爲 $\frac{n!}{(n-r)!}$

當 $r = n$ 時

$$nPr = nPn = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$= \frac{n!}{o!}$$

因　$o! = 1$

故　$nPn = n!$

當 $r = n-1$ 時

$$nPr = nP_{(n-1)} = \frac{n!}{(n-n+1)!}$$

$$= \frac{n!}{1!}$$

因　$1! = 1$

故　$nP_{(n-1)} = n!$

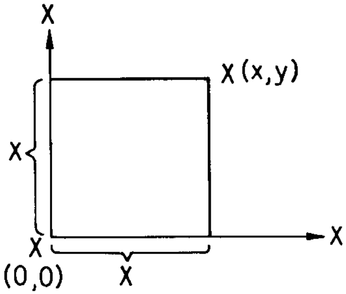
雖然 $X! = xPx = xP_{(x-1)}$，但 $nPr$ 是從 $X!$ 導出的，所以 $X! = xPx$ 是巧合，$X! = xP_{(x-1)}$ 是另一個巧合。巧的地方是 1！等於 1，0！也正好等於 1。

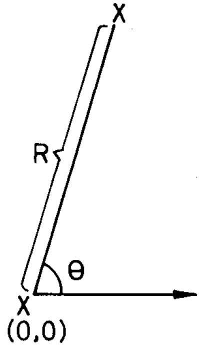
有些人認爲，＋、－、×、÷和三角函數等，都不過是一些計算的手段，何苦把它們分類，而把簡單的道理弄複雜呢？

其實，這樣做並不是自找麻煩，也不是要把讀者弄胡塗，而是各種函數的輸入程序，與它的性質息息相關，如果要靈活運用計算機，熟習輸入程序是必要條件。否則，遇上複雜的算式時便會出亂子。

以下介紹的座標變換函數，是一個比較複雜的例子。座標轉換，是指從笛卡兒的直角座標轉爲極座標及從極座標轉爲直角座標。

垂直座標是以X、Y分别代表一點與原點（0,0）的横、直距離。




極座標以R表示一點與原點的距離，以$\theta$表示連接這兩點的直線與正X軸所成的角度。

根據平面三角學的常識

$$R = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$$

反過來說

$$X = R\cos\theta$$

$$Y = R\sin\theta$$

以上所列四條算式，都屬於第二種函數。無論我們從R$\theta$轉爲XY還是從XY轉爲R$\theta$，都必須使用兩條算式，才得到兩個答案。於是計算機把其中一個答案放在X儲存器，而把另一個放在Y儲存器，由於顯像管只能顯示X儲存器的數據，所以我們每次只能看到一個答案，如要知道另一個答案，便要按X↔Y鍵才行。當要使用這些答案運算時，必須把其中一個答案移到記憶系統，才不致失掉。所以使用時要特別小心。

至於作統計運算時，使用很多數據，也有很多答案。最普遍的答案有數據個數、數據和、數據平方和、標準偏差等。由於這些答案往往需要反覆使用，所以它們都有自己的儲存器。每個儲存器也有自己的控制鍵，可是這些鍵通常另有用途。作統計運算時，它們只能控制儲存器，所以失去某些用途，以FX-3000爲例，在作統計運算時，它的記憶系統及括號將失效，數據處理的能力便會大打折扣。

2. 有不少理論上能計算的算式，計算機卻不能計算，這就形成了一些陷阱。如果要獲得正確答案，必須小心，不要落到陷阱裏。以下是幾個最普通的陷阱：

① 2 √ √ √ $X^2 X^2 X^2$

我們得到2.000000001 而非 2，是因爲計算機用上了 4 捨 5 入。所以引入了誤差，而致不能還原。

② 2 +/− $x^y$ 3 =

答案是E（Error），因爲計算機使用的方程式不適用於負數的底，因此不能求得理論上的－8。FX-3000 也不接受0°至｜1400°｜以外的數值。但這卻是設計者故意造成的。

③ （Deg） 390 sin $\sin^{-1}$

答案是30而不是390，因爲$\sin 390° = 0.5$，而$\sin^{-1} 0.5$ 卻可以是30°、150°、390°、510°或 −210°……。幸而在±90°範圍內，$\sin^{-1}X$ 只有一個答案，所以我們立下一個規則：凡是計算$\sin^{-1}X$，只取±90°內的答案。至於其他三角函數，也有類似的規則。

④ 250 $e^x$ Ln

答案是E，因爲中途出現的$e^{250}$比$10^{100}$大，所以不能計算。

⑤ 10 nCr 1 × 2 =

如慢慢地按鍵，答案是２０；如果按鍵太快，答案是10，因爲計算 $_nC_r$ 函數需要一點時間，而在運算期間，計算機並不接受指令，所以按鍵太快，便只能得到 $_{10}C_1$ 的答案而不是 $2\times{}_{10}C_1$，的答案。至於使用消耗時間更多的函數，便要更有耐性，才能得到正確答案。

此外，有些計算機在 $\pm10^{-2}$ 至 $\pm1$ 之間仍未使用指數顯示，這樣可能會失掉一些有效數字。更有一些計算機，當答案的絕對值小於 $10^{-100}$ 而不爲０時，竟會顯示Ｅ而不是０。關於個別計算機的陷阱，從以上所提到的理論陷阱以至機械陷阱（如鍵盤不靈敏），實在多得可怕。所以使用計算機以前，必須先認識它的陷阱。如果因爲誤中陷阱而得不到正確答案，未免太可惜了。

# 二、一些合約

由於計算機理論還在萌芽階段，所以各種術語及表達符號還沒有標準。現在我們要談論它，所以要定下一些合約。

1. 數值的表達方法有很多種，如電路中的電壓、算盤子的位置、計算尺的發線位置及數字等。單以數字表達來說，也可分爲二進制、十進制、六十進制、指數形式等多種。譬如:100可寫成：

$1100100_{(2)}$

$1,40_{(60)}$

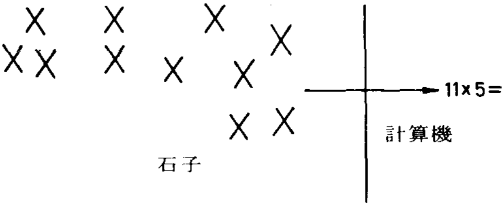
$100_{(10)}$

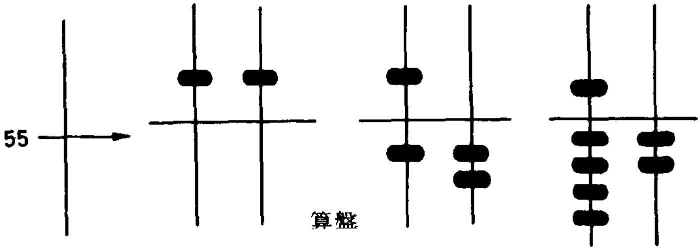
$10^2$　等

2. 計算的方法也很多。例如：小數運算、分數運算、指數運算等，使用的媒介也有計算機、計算尺、算盤等。

現在假設有一些原始人、清代商人和現代學生，要作數學接力比賽。題目是（ 3 ＋ 8 ）× 5 ＋37。於是原始人會數出 3 粒石子，再數出 8 粒石子，然後把它們合起來交給學生，那學生看到11粒石子，便在計算機上按11 × 5 ＝，得到55，跟着交給商人。商人便會在算盤上撥出55，再根據口訣，七上二去五進一、三上三而得到答案92。

要表達這個過程，我們把一頁紙分爲三直行，分別表示石




子、算盤和計算機，以箭頭表示表達方式轉換的過程。這樣它們交換變化及運算的過程便一目了然了。

3. 由於不少運算須處理一個以上的數據，所以計算機的儲存器不能少於兩個。通常四則運算使用的兩個儲存器，我們把它們稱爲X、Y儲存器，而X儲存器的數據，便是顯像管的數據。此外，還有括號和記憶系統使用的幾個儲存器。如果要計算出正確的答案，必須知道每個儲存器內的數據是什麼。然而我們有這麼多儲存器，如果不把運算過程以某種形式記下，便很容易出錯，所以在這裏向大家介紹一套符號，以便利我們分析數據的處理過程。

首先，我們知道儲存器是固定不變的，而數據卻在各個儲

存器間跳動。所以最自然的方法是把紙頁分爲數行，代表各個儲存器。而代表數據的線條，則在各行間擺動，代表數據的移位。以下的例子，將會令大家對這套符號有深切的了解。

算式（ 2 ×300 ）$+\frac{1}{1/5}+$〔（ −13 ）×17〕的輸入順序是:

2 × 3 exp 2 ＋ 5 1/x1/x＝M in13＋/－×17 X－Y

X－M　X－Y　X－M　X－Y　X－M　M＋MR

計算機執行指令的經過及表達的方式如下:

2： 2 存在X（ 第 2 行 ），M 有一任意數據。

X： 2 複製至Y（ 第 3 行 ）

3 exp 2： 3 $\times 10^2$代替X中的 2

＋： 答案600存在X，並複製至Y。

5： 5 代替X中的600

$1/x$： X的 5 變爲1/5

$1/x$： X的1/5變爲 5

＝： 答案 605 代替X中的 5， Y的資料是 O。

M in： 605 複製至M（ 第一行 ），原來在M中的資料被排出。

13： 13代替605

$+/-$： 13 變爲−13

X： −13複製至Y

17： 17代替X中的−13

X－Y　X－M　X－Y　X－M　X－Y　X－M：第一個X－Y把17和−13交換，第一個X－M把−13 和605交換。如此經過 6 次以後，各儲存器的資料與開始時一樣。在這 6 次轉換中，資料在儲存器中的可能排列形式都曾出現。也就是

說，我們能令任何資料存到任何儲存器，所以，X－Y、X－M這兩個鍵，在數據處理方面能幫我們不少忙。

M+：－13×17的答案－221存在X，並加到M中而令M的新資料變爲605－221，即384。

MR：384複製至X。

有了以上的分析，我們便會繪出如下表的紀錄，表中使用的符號，只要與以上所述的分析比較，便會很明白的了。

輸入

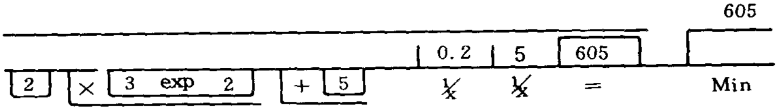
2　×　3　exp　2　+　5　1/x　1/x　=　Min 13　+/-

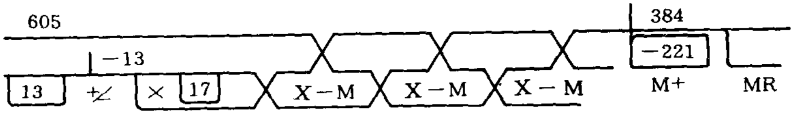
X　17　X－Y　X－M　X－Y　X－M　X－Y　X－M

M+　MR

算式：

$$(2 \times 300) + \frac{1}{1/5} + [(-13) \times 17]$$

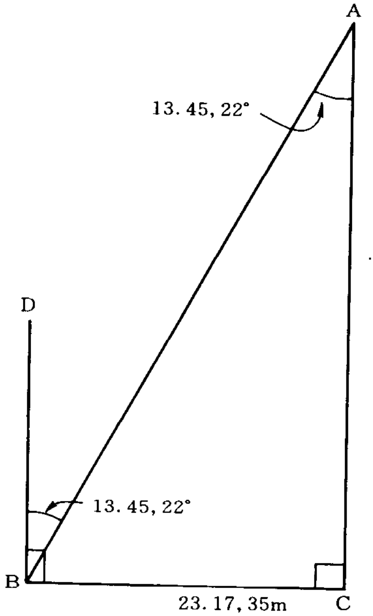



註：X＝X儲存器；Y＝Y儲存器；M＝記憶系統；1＝第1括號儲存器；2＝第2括號儲存器。

# 三、巴比倫人的數學

巴比倫人是使用六十進制的，而現在的計算機，都是十進制的。不過這並不表示我們的計算機不能處理巴比倫人的問題。例：在圖中的三角形，∠BAC＝∠OBA＝13.45,22°，BC＝23.17,35m。



$$AC = \frac{23.17,35\text{m}}{\tan 13.4522^\circ}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{23.17,35}{\tan 13.4522^\circ}\right)^2 + (23.17,35)^2}\ \text{m}$$

FX−3000

| 輸入 | 輸出 |
|---|---|
| ( Deg ) 23∘,,,17∘,,,35∘,,, ÷ | 23.293055 |
| 13∘,,,45∘,,,22∘,,, tan = | 95.147095 |
| Min an∘,,, | 95°8°49.5 |
| ÷60 = arc∘,,, | 1°35°8.82 |
| MR × = Min | 9052.9697 |
| 23∘,,,17∘,,,35∘,,, × M + | 542.56643 |
| MR √ arc∘,,, | 97°57°24° |
| ÷60 = arc∘,,, | 1°37°57.4 |

我們便根據關於ＡＣ、ＡＢ的等式，把ＡＣ、ＡＢ求出來。輸入的形式與十進的十分相似。它們的分別只有以下幾點:

1. 計算機只會把六十進制表示法的小數後兩位轉爲十進制。

2. 答案大於60時，整數部分仍是以十進形式表示的。

因此求出的ＡＣ是95.08,49m而不是01,35.08,49m，ＡＢ是97.57,24m而不是01,37.57,24m。所以計算時先把答案除以60才轉爲六十進制。