中学生课外读物丛书

数 学 世 界

解 三 角 形

陈肇曾 计惠康

上海科学技术出版社

中学生课外读物丛书
数 学 世 界
解 三 角 形
陈肇曾 计惠康
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 5.375 字数 117,000
1990 年 9 月第 1 版 1990 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—7200
ISBN 7-5323-1264-X/G·179
定价： 1.70元

编辑出版说明

本《丛书》是一套为广大中学生提供的课外读物．第一批先编辑出版数学、物理、化学三门学科的分册．目的为了引导学生开发思维，拓广知识视野，充实数、理、化各门学科本身的知识及这些知识在实际中的应用．但所涉及的基本知识不超过全日制中学数、理、化教学大纲所规定的范围．

本《丛书》的特点是知识性与趣味性相结合．注意揭示数、理、化知识本身内在的联系与规律；重视联系实际应用，联系邻近学科，使学生学到的知识能融会贯通；同时适当介绍学科领域里的新进展，以帮助学生开阔眼界．

本《丛书》的体例不拘泥于章节编排，而以专题篇目的面貌出现．各篇内容既有相对联系的系统性，又有相对的独立性，既体现生动活泼，又注意科学严谨．适合于广大初、高中学生阅读．

在本《丛书》编写过程中，曾得到了上海市教育局教研室有关同志的热忱指教与协助，在此致以衷心谢意．

由于编写出版时间仓促，《丛书》中的缺点及不当之处在所难免，欢迎广大读者提出批评指正．

编 者 的 话

解三角形是初中代数第四册的一个重要内容，它的特点是综合性强，把初中代数、几何的知识综合运用，一方面介绍了三角函数、三角形解法等新知识，另一方面又沟通了代数与几何知识的相互联系，还提供一些新的解题思想与方法.

为了帮助初三同学们进一步领会解三角形的特点与方法，我们编写了《解三角形》这本小册子。它由十五个专题所组成，相互之间有一定的联系又有相对的独立性。从内容上来看，大致可以分成三类：一类是介绍三角函数与解三角形的基础知识；另一类是介绍这些基础知识在代数、几何及实际问题中的应用；最后一类是介绍这些基础知识所引出的一些数学思想与解题方法。这些内容一般都不超过中学数学教学大纲的要求，与数学课本有较为紧密的联系，同时又有一定的延伸。在编写中，力求做到既有知识性、趣味性，又有较强的实用性。如果读者通过对本书的阅读与研究，能在对初中数学知识的融会贯通、开拓知识的视野以及领会某些初等数学思想方法等方面有所收益的话，作者将感到由衷的高兴。

本书不仅可以作为初三学生的课外读物也可供中学数学教师、对数学有兴趣的其他读者阅读参考.

在本书的编写过程中，曾得到上海市教育局教研室张福生同志及本书的责任编辑赵序明同志的热情指导，在此表示

衷心的感谢．由于作者水平有限，书中难免有些缺点与不足之处，恳请读者批评指教。

作　者

记于 1988 年夏

目　录

〔一〕

从三角函数定义谈起

1 泰利斯与金字塔高度的测定

在世界建筑史上，与中国的万里长城一起名扬全球的还有埃及的金字塔．大约在公元前3200年，埃及形成了一个统一国家．金字塔就是埃及的法老（即国王）为自己建造的巨大陵墓（图1.1）．金字塔塔基呈正方形，越往上越狭窄，直到塔顶．从四面看来，很象我国的“金”字，因此称为金字塔．

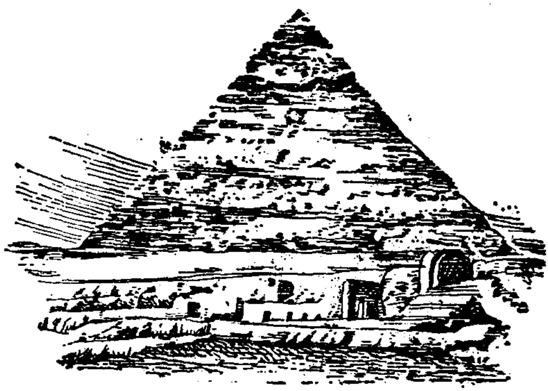

图 1.1

相传古希腊学者泰利斯（Thales 约公元前640～546）（图1.2）游埃及时，利用相似三角形的性质测定了胡夫（古埃

及法老的名字）金字塔的高度，这是西方测量学上的第一例。那是一个炎热而又晴朗的日子，他和神殿的司祭长一块从胡夫金字塔旁走过。

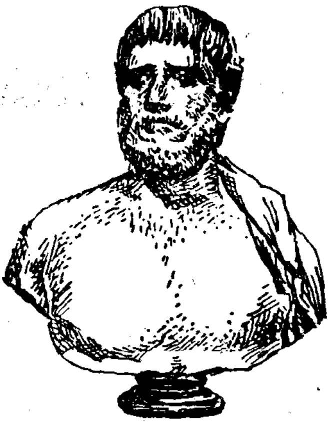

图1.2 泰利斯

"有谁知道金字塔有多高吗？"他问司祭长。

"没有，我的孩子。"司祭长回答。

"我马上就能把它准确地测定出来。"泰利斯一边说一边从白长袍下面取出一条用绳结分成许多等分的细绳，每一对绳结之间的距离约合半米。

泰利斯先量了自身的影子长度，立即把绳子在金字塔影子的顶端系牢，并把绳子朝与金字塔影子同侧的底边的中点拉直，测得长为 28 米，再量得边长的一半为 103 米，他一边用长袍的前襟揩干脸上不停流淌着的汗珠，一边对耐性注视着的司祭长说："131 米，金字塔确实就是这么高。"

2 线段比值的不变性与三角函数的定义

泰利斯测定金字塔高度的依据是什么呢？在测量金字塔高度的这一时刻，他的身高与影子长度相等，由此推出金字塔的高度与它投下的阴影长度也相等。在图 1.3 中，AB 表示泰利斯的身高，BC 表示他的影子，$\triangle ABC$ 为一个等腰直角三角形。$A'B'$ 表示金字塔的高度，$D'C'$ 表示金字塔的阴影，

$\triangle A'B'C'$ 也是一个等腰直角三角形，$B'D'$是金字塔底部一条边长的 $\frac{1}{2}$，$D'C'$ 是泰利斯测得的影长．由于 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，所以

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'},$$

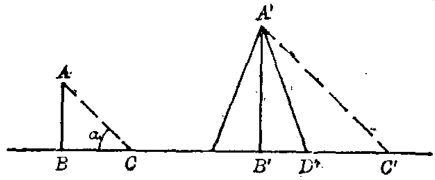

图 1.3

这个比值仅与 $\angle BCA$ 的大小有关，与边长无关，记 $\angle BCA=\alpha$，$\frac{AB}{BC}=\operatorname{tg}\alpha$，当角度 α 确定后，就是一个定值。我们把上面的结果放在直角坐标系中研究，就可定义三角函数，在图 1.4 中 $A(x,y)$，$B(x,0)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_1,0)$；$OA=r=\sqrt{x^2+y^2}$，$OC=r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$．$Rt\triangle ABO\sim Rt\triangle CDO$．所以

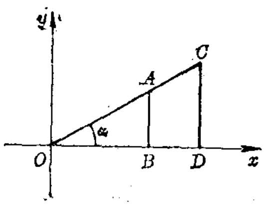

图 1.4

$$\frac{AB}{OB}=\frac{CD}{OD}=\text{定值，也即 } \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

类似地有 $\frac{y}{r}=\frac{y_1}{r_1}\left(\frac{AB}{OA}=\frac{CD}{OC}\right)$，$\frac{x}{r}=\frac{x_1}{r_1}\left(\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC}\right)$，$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}\left(\frac{OB}{AB}=\frac{OD}{CD}\right)$，这表明上述比值 $\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$ 都是一些不变量．我们知道，它们被分别记作 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$*)，ctg**)．称为角 α 的三角函数．它们的英文全称及读音如下面表 1.1 所示。

---

*) $\operatorname{tg}\alpha$ 的另一种写法为 $\tan\alpha$.

**) $\operatorname{ctg}\alpha$ 的另一种写法为 $\cot\alpha$.

表 1.1

函数名称	记　号	英文全称	读　音
正　弦	sin	sine	sain
余　弦	cos	cosine	koúsain
正　切	tg	tangent	tæ'ndʒənt
余　切	ctg	cotangent	koútæ'ndʒənt

由三角函数的定义可知三角函数值的正负号由角α终边所在的象限决定.

3 应用三角函数的定义解题

1) 三角函数的求值

例 1 已知角α终边上的一点$P(-\sqrt{3}, \sqrt{13})$，求角α的各三角函数值.

解 如图 1.5 所示，

$x=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{13}$.

$$\therefore r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{13})^2}=4,$$

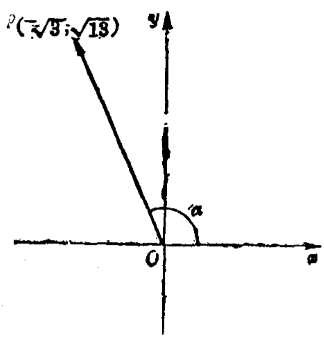

图 1.5

由三角函数定义，得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{13}}{4},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{13}}{-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{39}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{-\sqrt{39}}{13}.$$

例 2 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，求 α 的其它三角函数的值.

解 因为 $\sin\alpha=\frac{1}{2}=\frac{y}{r}$，所以可设 $r=2k(k>0)$，

则 $$y=k,\ x=\pm\sqrt{r^2-y^2}=\pm\sqrt{3}k.$$

当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\sqrt{3}$.

当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ 时，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\sqrt{3}.$$

例3 根据下列条件，确定 α 是锐角还是钝角：

(1) $\operatorname{tg}\alpha<0$ 与 $\sin\alpha>0$；

(2) $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 异号；

(3) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ 是正值.

解 (1) 因为 $\operatorname{tg}\alpha<0$，$\alpha$ 应为钝角；$\sin\alpha>0$，α 为锐角或钝角都可以，所以满足 $\operatorname{tg}\alpha<0$ 与 $\sin\alpha>0$ 的角必为钝角.

(2) α 为锐角时，$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$；α 为钝角时，

$$\sin\alpha>0,\quad \cos\alpha<0,$$

所以满足题设条件的 α 必为钝角。

(3) $\operatorname{tg}^2\alpha$ 无论 α 为锐角还是钝角均为正值，故 $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ 的符号仅由 $\cos\alpha$ 决定，所以满足条件的 α 必为锐角.

2）三角函数式的计算化简

例 4 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\frac{4\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\sin\alpha-3\cos\alpha}$ 的值.

解 因为 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$，

设 $x=k$，$y=2k$，则 $r=\sqrt{5}k$，所以

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

代入原式求值，得

$$\text{原式}=\frac{10}{7}.$$

例 5 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(90^\circ<\alpha<180^\circ)$，求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

解 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\therefore$ $\sin\alpha+\cos\alpha$

$=\frac{x+y}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设 $r=k$，则 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}k$，两边平方，得 $x^2+y^2+2xy=\frac{1}{2}k^2$，所以 $2xy=-\frac{1}{2}k$. 因而 $(x-y)^2$

$=x^2+y^2-2xy=\frac{3}{2}k^2$， 又已知 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，所以

$$\cos\alpha<0,\ \sin\alpha-\cos\alpha>0.$$

所以

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{x-y}{r}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 6 当 $\alpha\neq 90^\circ$ 时，化简

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

解：把 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 代入原式，得

$$\sqrt{\frac{1+\frac{y}{r}}{1-\frac{y}{r}}}-\sqrt{\frac{1-\frac{y}{r}}{1+\frac{y}{r}}}$$

$$=\sqrt{\frac{r+y}{r-y}}-\sqrt{\frac{r-y}{r+y}}=\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r-y}-\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r+y}$$

$$=\sqrt{r^2-y^2}\cdot\frac{2y}{r^2-y^2}=\frac{2y}{\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{2y}{|x|}$$

$$=\begin{cases}2\operatorname{tg}\alpha,\ \alpha\text{ 为锐角时；}\\-2\operatorname{tg}\alpha,\ \alpha\text{ 为钝角时.}\end{cases}$$

利用三角函数的定义进行化简时，可以先用坐标表示式代入原式，把三角函数式化为代数式，然后化简代数式，最后再利用三角函数的坐标表示式回代得到三角函数式.

3）三角函数恒等式的证明

例 7 求证 $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

证 $\because$ $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，

$\therefore$ 左边$=\frac{1-\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{r-x}{y}$；

右边$=\frac{\frac{y}{r}}{1+\frac{x}{r}}=\frac{y}{r+x}=\frac{y(r-x)}{r^2-x^2}=\frac{r-x}{y}$.

∴ 原式成立.

例8 求证$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$.

证 ∵ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{y_1}{x_1}$,

$\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{x_1}{y_1}$. 代入原式左边;

$$左边=\frac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{x_1}{y_1}}{\dfrac{y_1}{x_1}-\dfrac{x}{y}}=\frac{\dfrac{yy_1-xx_1}{xy_1}}{\dfrac{yy_1-xx_1}{x_1y}}=\frac{yx_1}{xy_1}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta=右边.$$

∴ 原式成立.

证明三角函数恒等式的方法较多：一可以从左边证到右边；二可从右边证到左边；三可以左右两边都证到某一相同的式子. 对具体问题要具体分析，灵活应用各种证明方法.

想与练（一）

1. 已知$\angle OPQ$，顶点P的坐标为$(-1,0)$，终边经过点$Q(2,4)$，求$\cos\angle OPQ$.

2. 求$\dfrac{1-\cos^6\alpha-\sin^6\alpha}{1-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$的值.

3. 已知$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{3}$. 求$\dfrac{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$的值.

4. 求证$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

5. 求证$(2-\cos^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=2+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

〔二〕

对三角公式的记忆与应用

三角的公式是很多的．在初中数学中解三角形部分所出现的公式虽然仅仅是其中的一小部分，但也有十几个公式之多，要记忆这些公式是件烦恼的事．但要灵活应用它们，又必须牢牢地记住它们。这里特向同学们介绍记忆这些公式的一些诀巧以及它们的应用．

1 找规律记公式

爱因斯坦是一位举世闻名的物理学家。一次他询问他的朋友家里的电话号码，那位朋友告诉他，“我家的电话号码很难记，是 24361”，爱因斯坦立刻告诉这位朋友说：“不难记，只要记住两打(12×2)、19的平方”。这个例子告诉我们，杂乱无章的知识不容易记忆，有规律的知识是容易记忆的。因此，要记住三角公式及定理，最好的方法是在理解的基础上，先揭示它们之间的内在规律，然后抓住这个规律来记忆。下面通过分析一些三角公式（包括特殊角的三角函数值）的内在规律来说明记忆方法．

1）特殊角的三角函数值

正弦与余弦的 30°、45°、60°、90°角的函数值在记忆时往往容易混淆．但如果把这些特殊角从小到大排列起

来，把相应的正、余弦函数值也顺次放在$\frac{\text{“}\sqrt{\ \ }\text{”}}{2}$形式里，得出下表：

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}(0)$	$\frac{\sqrt{1}}{2}(\frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}(1)$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}(1)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}(\frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{0}}{2}(0)$

观察上表，可以得到 0°、30°、45°、60°、90° 这些特殊角的正弦值与余弦值的规律：它们都是形如$\frac{\sqrt{a}}{2}$的数，对正弦值来说，a 分别取 0、1、2、3、4，对余弦值来说，a 取值的顺序正好倒过来：4、3、2、1、0. 根据这些规律，同学们是不难把这些特殊角的正、余弦值记住的.

2） 互为余角、互为补角的三角函数关系式

互为余角、互为补角的三角函数间的八个关系式是三角学中“诱导公式”的一部分。观察这些公式，不难得出“纵变横不变，符号看象限”的变化规律。这里的“纵”是指纵轴（y 轴），“横”是指横轴(x 轴）.

例如，对于 $\cos(90°-\alpha)$，由于 90° 角终边在纵轴（y 轴)上，所以函数名称要“变”，余弦变成正弦. 而 $(90°-\alpha)$ 在第一象限，所以 $\cos(90°-\alpha)$ 值的符号为正，因此，$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$.

又如：对于$\mathrm{ctg}(180°-\alpha)$，由于 180° 角的终边在横轴($x$ 轴)上，所以函数名称不变，仍为余切，而$(180°-\alpha)$在第二象限，$\mathrm{ctg}(180°-\alpha)$ 值的符号为负，因此 $\mathrm{ctg}(180°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$.

值得指出的是，这个规律对三角学中的诱导公式（共有54个）普遍适用．

3）　同角三角函数间的关系式

同角三角函数间的关系，可以通过图形直观而形象地表示出来．例如，在直角$\triangle ABC$中（图2.1），设斜边$AB=1$，则由直角三角形的边角关系（即三角函数的比值定义）可以得到：$AC=\sin\alpha$，$BC=\cos\alpha$．

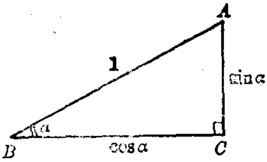

图　2.1

由勾股定理得$AC^2+BC^2=AB^2$，所以$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$（平方关系）；

$$\text{由 } \mathrm{tg}\alpha=\frac{AC}{BC}，\text{得到 } \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\text{（商关系）；}$$

$$\text{由 } \mathrm{ctg}\alpha=\frac{BC}{AC}，\text{得到 } \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\text{（商关系）；}$$

$$\text{由 } \frac{AC}{BC}=\frac{1}{\frac{BC}{AC}}，\text{得到 } \mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}\text{（倒数关系）．}$$

因此，记住了图2.1的直角三角形，就能把同角三角函数间的三组关系四个公式牢牢地记住．

2　三角公式在三角运算中的应用

三角公式虽然很多，但从解题的应用来说，大体上可以分为化简(三角函数式)、求值、证明(三角恒等式)三种类型．

1）　三角函数式的化简

三角函数式的化简，是利用特殊角的三角函数值．互为