中等专业学校函授教材

代　数

DAISHU

北京邮电学院函授部编

人民教育出版社

本书是北京邮电学院函授部为中等专业学校函授生编写的一套数学教材中的“代数”部分．其特点是教材、学习指导书与习题三者合并在一起．又为适应函授教学的情况，有些地方的讲解比一般教材细致些，除了适用于中等邮电专业的函授生外，对其他中等专业学校的函授生和自学者也有参考价值。

中等专业学校函授教材

代　　数

北京邮电学院函授部编

人民教育出版社出版　高等学校教学用书编辑部　北京宣武门内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业许可证出字第2号）

工人印刷厂印装　新华书店发行

统一书号13010·838　开本850×1168 1/32　印张9 5/16

字数284,000　印数00001—50,000　定价(4)¥0.80

1960年8月第1版　1960年8月北京第1次印刷

編者的話

为了貫彻党的教育方針，提高邮电函授教育质量和满足函授生的要求，需要一套适合函授教学和在职干部学习特点的教科书。为此，在党的領导下，我組編出了这套課本。

本課本是根据邮电函授中技数学教学大綱（草案），結合几年来函授教学的經驗、各地函授輔导站教师和函授生意見，以原高教出版社出版的中等专业学校数学課本为基础，又参考了其他一些适合工农干部学习特点的教材，采取分工执笔、集体討論的办法編写的。

在教材編写方面尽量体現下列几个特点：

1．內容的叙述上尽量体現辯証唯物主义的思想方法，以期适合于学者的認識过程。

2．对較难領会的抽象概念都用实例引出，尽量做到从具体到抽象，使学者容易領会。

3．对一些定理尽量采用例証或几何图形来解释，避免繁瑣的証明。

4．每章有学习目的与要求和学习方法的指示。

5．每章的重点力求突出、文字叙述力求通俗易懂。

6．重視实际应用，尽量与相近課程、后学課程相結合。

7．对学者在学习中易犯的錯誤，都提出注意并指出如何来避免。

8．每章末尾有小結、問題和习題，使函授生自学完一章之后便于复习、巩固和自我檢查。

本課本在安排上有些章节与原高教出版社出版的中专教材不同，例如

代数部分，其中"冪与根"和"冪的概念推广"合并为一章；"函数概念"、"一次函数及其图象"和"二次函数及其图象"合并为一章；"一元二次方程"、"可化为二次方程的方程"和"二次方程組"合并为一章；虚数概念(定义、单位、性质)放在二次方程中学习。

几何与三角部分，其中"加法定理"、"倍半角的三角函数"、"和差化积"、"积化和差"、"三角方程"和"反三角函数"合并为一章；"勾股定理的推广"和"余弦定理"放在"斜三角形解法"中学习。

高等数学部分，其中"两个重要的极限"、"連續函数的概念"等移到"极限"一章里；"自然对数"的概念移到代数里的"对数"一章里；"二級导数及其力学意义"移到导数一章里。

这样做我們認为不但照顧到函授生自学的特点而且也加强了系統性。

此外，还删除了过分追求邏輯严密、形式完整的理論教材(如几何中的最大公度定理及两条綫段最大公度的求法；三角中的銳角三角函数值为已知时，該角唯一存在的定理)和与专业联系不大，且对以后学习沒有多大影响的教材(如代数中的二次方程里的韦达定理；近似計算里的精密誤差計算；級数里的收斂等比級数；几何中的位似变换；高等数学中的应用二級导数求极大与极小、曲綫的凹、拐点和函数图象的作法等)。另外几何中的圓周长、圓面积与多边形面积的一些公式，函授生早已能熟練应用，也給删除了。

为了保証学习質量起見，我們在代数部分第一章之前着重复习了初中代数中和以后学习有关系的部分，这样，就可以使函授生在复习完这一部分以后，能够顺利地轉入新課学习。

初稿在試用过程中，各地輔导站教师和函授生曾提出許多宝貴意見，在这版中我們根据这些意見进行了一次修改，在这里謹向这些同志致以深切的謝意。

由于时間仓促，同时我們的函授教学水平很低，其中缺点和錯誤的

地方一定很多，希望各地教师和讀者給以批評和指正。

北京邮电学院函授部

1960.5.

目　录

初中代数的复习
代数式的恒等变换与一次方程

这里主要是复习初中代数中和以后学习有关部分的内容，以便轉入中技数学的学习。

I. 因式分解

§1. 因式和因式分解

因式 整式 a 如果能整除 b，那么整式 a 叫做整式 b 的因式。

例 a 是 $3a^2$ 的因式；$x+1$ 是 x^2-1 的因式。

質式 一个整式如果除了 1 和本身外不再有其他的因式，那么这个整式叫做質式。

例 x；a^2+1；$x-1$ 等都是質式。

因式分解 把一个整式表示为几个因式的連乘积叫做因式分解。通常要把因式分解到質式为止。

例 $a^2-1=(a+1)(a-1)$；

$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$。

但 $3x^2-3=3(x^2-1)$ 时，我們說它尚未分解完。

因式分解的方法通常有以下三种：(1)提取公因式法；(2)应用公式分解法；(3)分組分解法。

§2. 提取公因式法 如果多項式的各項中有相同的因式，就可以把它分解为这个因式和多項式除以公因式所得的商的乘积。

例 $$ax+bx-cx=x(a+b-c);$$

$$6ab^2-10a^2b^3+4a^2b^2=2ab^2(3-5ab+2a)。$$

§3 应用公式分解法 根据简乘公式,我們可以把某些多項式很快地分解因式。

(1) 平方差公式:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)。$$

(2) 二項式平方公式:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2。$$

(3) 立方和与立方差公式:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)。$$

(4) 二項式立方公式:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3;$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3。$$

例 $$9x^2-\frac{1}{4}=(3x)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)。$$

$$a^4-1=(a^2)^2-1^2$$
$$=(a^2+1)(a^2-1)$$
$$=(a^2+1)(a+1)(a-1)。$$

$$a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)$$
$$=ab(a+b)(a-b)。$$

$$8x^3-1=(2x)^3-1^3$$
$$=(2x-1)(4x^2+2x+1)。$$

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$$
$$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)。$$

$$y^4+2b^2y^2+b^4=(y^2)^2+2(y^2)(b^2)+(b^2)^2$$
$$=(y^2+b^2)^2。$$

$$8x^3-24x^2+18x=2x(4x^2-12x+9)$$
$$=2x[(2x)^2-2(2x)\cdot 3+3^2]$$
$$=2x(2x-3)^2。$$

$$8z^3-12z^2+6z-1=(2z)^3-3(2z)^2\cdot 1+3\cdot(2z)\cdot 1^2-1^3$$
$$=(2z-1)^3。$$

正确的理解和熟記簡乘公式当然是应用公式进行因式分解的关鍵，然而仅注意了公式的記忆，而不善于把所給代数式中的各項变换为簡乘公式中各項的形式，那要把上述各例进行分解还是有困难的，因此我們必須通过練习，做到灵活应用公式，才能掌握应用公式的分解法。

§4. 分組分解法　如果某个多項式分为若干組后，各組里面都有公共的因式，就可以利用提取公因式的方法来进行分解因式。

例　$2x^3-5x^2+2x-5=(2x^3-5x^2)+(2x-5)$
$$=x^2(2x-5)+(2x-5)$$
$$=(2x-5)(x^2+1)。$$

$$x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6$$
$$=x(x+2)+3(x+2)$$
$$=(x+2)(x+3)。$$

$$x^2-3x-4=x^2+x-4x-4$$
$$=x(x+1)-4(x+1)$$
$$=(x+1)(x-4)。$$

后面两个例子說明二次三項式利用分組分解法一般的都可以分解

为两个因式。而且二次三項式的第一項等于它的两个因式中第一項之积；第三項等于它的两个因式中第二項之积；第二項等于它的因式中两个单項的交叉乘积之和。

这种关系可以表示为

x^2……………两个因式中第一項之积＝二次三項式的第一項

$+6$……两个因式中第二項之积＝二次三項式的第三項

$(x \quad +2)$……二次三項式的第一个因式

$(x \quad +3)$……二次三項式的第二个因式

$+2x \quad +3x$

$+5x$ ………因式中两个单項的交叉乘积之和＝二次三項式的第二項

x^2……………两个因式中第一項之积＝二次三項式的第一項

-4……两个因式中第二項之积＝二次三項式的第三項

$(x \quad +1)$……二次三項式的第一个因式

$(x \quad -4)$……二次三項式的第二个因式

$+x \quad -4x$

$-3x$ ………因式中两个单項的交叉乘积之和＝二次三項式的第二項

根据这个表示法，二次三項式可以利用下法来分解因式。

第一、因为二次三項式的第一項等于它两个因式中第一項之积，所以在分解因式时，就要把它的第一項分解为两个单項因式。

第二、因为二次三項式的第三項等于它两个因式中第二項之积，

所以在分解因式时，就要把它的第三项分解为两个因数，并且如果第三项为負，那么两个因数的符号該是一正一負；如果第三項为正，則两个因数的符号相同。而且当第二項为負数时，两个因数均为負，当第二項也为正时，两个因式均为正。

第三、二次三項式的第一項和第三項分別分解为两个单項因式时，一般的总不只是一种分法，但是分解的結果必須要求第一項的两个单項因式和第三項的两个单項因数交叉乘积之和等于二次三項式的第二項。

例 1. 分解 $x^2-8x+12$ 的因式。

解 第一项分解成两个单项因式，得

$$x,\ x。$$

第三项分解成两个因数，有三种

$$-1,\ -12;-2,\ -6;-3,\ -4$$

（$\because$ 第三项为正，第二项为負，$\therefore$ 两因数均为負）。

把第一項和第三項的各种分法結合起来就有三种：

$$\begin{array}{cc} x & -1 \\ x & -12 \\ \hline -x & -12x \\ \multicolumn{2}{c}{-13x \neq \text{第二項}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & -2 \\ x & -6 \\ \hline -2x & -6x \\ \multicolumn{2}{c}{-8x = \text{第二項}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & -3 \\ x & -4 \\ \hline -3x & -4x \\ \multicolumn{2}{c}{-7x \neq \text{第二項}} \end{array}$$

結果只有第二种是对的，

$$\therefore\ x^2-8x+12=(x-2)(x-6)。$$

例 2. 分解 x^2+x-6 的因式。

解 第一项分解成两个单项因式，得

$$x,\ x。$$

第三项分解成两个因数，有四种

$$+1,\ -6;-1,\ +6;+2,\ -3;\ \ 2,\ +3$$

(∵第三項为負，∴两因数的符号应相反)。

把第一項和第三項的各种分法結合起来就有四种:

$$\begin{array}{cc} x & +1 \\ x & -6 \\ \hline +x & -6x \\ \multicolumn{2}{c}{-5x \neq \text{第二項}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & -1 \\ x & +6 \\ \hline -x & +6x \\ \multicolumn{2}{c}{+5x \neq \text{第二項}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & +2 \\ x & -3 \\ \hline +2x & -3x \\ \multicolumn{2}{c}{-x \neq \text{第二項}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & -2 \\ x & +3 \\ \hline -2x & +3x \\ \multicolumn{2}{c}{+x = \text{第二項}} \end{array}$$

結果只有最后一种是对的，

$$\therefore \quad x^2+x-6=(x-2)(x+3)。$$

例 3. 分解 $6x^2+29x+35$ 的因式。

解 第一項分解成两个单項因式，有两种

$$x,\ 6x;\ 3x,\ 2x。$$

第三項分解成两个因数，有两种

$$1,\ 35;\ 5,\ 7。$$

把第一項和第三項的各种分法結合起来，就有 8 种:

$$\begin{array}{cc} x & +1 \\ 6x & +35 \\ \hline +6x & +35x \\ \multicolumn{2}{c}{+41x \neq \text{第二項}} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 6x & +1 \\ +x & +35 \\ \hline +x & +210x \\ \multicolumn{2}{c}{+211x \neq \text{第二項}} \end{array} \quad \begin{array}{cc} x & +5 \\ 6x & +7 \\ \hline +30x & +7x \\ \multicolumn{2}{c}{+37x \neq \text{第二項}} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 6x & +5 \\ x & +7 \\ \hline +5x & +42x \\ \multicolumn{2}{c}{+47x \neq \text{第二項}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 3x & +1 \\ 2x & +35 \\ \hline +2x & +105x \\ \multicolumn{2}{c}{+107x \neq \text{第二項}} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 2x & +1 \\ 3x & +35 \\ \hline +3x & +70x \\ \multicolumn{2}{c}{+73x \neq \text{第二項}} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 3x & +5 \\ 2x & +7 \\ \hline +10x & +21x \\ \multicolumn{2}{c}{+31x \neq \text{第二項}} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 2x & +5 \\ 3x & +7 \\ \hline +15x & +14x \\ \multicolumn{2}{c}{+29x = \text{第二項}} \end{array}$$

結果只有最后一种是对的，

$$\therefore \quad 6x^2+29x+35=(2x+5)(3x+7)。$$

一般的情形，所結合起来的种数相当地多，如果象举例那样一个一个的去試驗，非常麻煩，但也沒有一种固定的方法，只有反复練习才能掌握这个方法。“熟能生巧”，当我們用熟了这个方法，就会体会到它比分組分解法要方便得多。这个方法叫做**十字相乘法**。

例　要分解 $3x^2-5x-12$ 的因式，当我們熟練后就能一望而知地把它分为 $\begin{array}{ccc} 3x & & +4 \\ & \times & \\ x & & -3 \end{array}$　$\therefore\quad 3x^2-5x-12=(3x+4)(x-3)$。

除了二次三項式可以用“十字相乘法”进行因式分解之外，一般的多項式应按下列步驟来分解因式：

第一、先看一看这个多項式的各項有沒有公因式，如果有，就先提取公因式。

第二、沒有公因式的式子（或者是提取公因式后得到的式子），就看它能不能应用簡乘公式来分解，如果能够，就应用公式进行分解。

第三、不能应用公式来分解的式子，就試用分組分解的方法。

应該注意分得的因式，如果还可以分解，就再継續分解，直到每一个因式都不能再分解为止。

习　題　一

分解下列各式的因式：

1. a^2b-ab^2;　　2. $x^5+x^3-x^2-1$;

3. $2m(x-3)+n(3-x)$;　　4. $x^2-10x+9$;

5. $2a+4ab+2ab^2$;　　6. $x^2-4x-12$;

7. $x^3z-4x^2yz+4xy^2z$;　　8. $2x^2+7x+6$;

9. $y^6-\frac{1}{8}$;　　10. $10x^2+8x-2$。

II. 分　　式

分式及其运算在化簡代数式与解分式方程的时候，常遇到应用分