



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

全程导学及习题全解

(上)

华东师大第三版

闫晓红 王贵鹏 主编

- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

全程导学及习题全解

(上)

华东师大第三版

闫晓红 王贵鹏 主编

- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

数学分析全程导学及习题全解. 上册/闫晓红,王贵鹏主编. —北京:中国时代经济出版社,2006.2

(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 7-80169-898-3

I. 数... II. ①闫...②王... III. 数学分析-高等学校-教学参考资料 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 157153 号

数学分析全程导学及习题全解(上册)

闫晓红 王贵鹏 主编

出版者	中国时代经济出版社
地址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦 11 层
邮政编码	100007
电话	(010)68320825 68320496
传真	(010)68320634
发行	各地新华书店
印刷	北京市白帆印务有限公司
开本	787×1092 1/16
版次	2006 年 3 月第 1 版
印次	2006 年 3 月第 1 次印刷
印张	18
字数	350 千字
印数	1~5000 册
定价	20.00 元
书号	ISBN 7-80169-898-3/G·381

版权所有 侵权必究

内容简介

本书是华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)的配套参考用书。为了便于学生学习,本书的编排严格与教材保持一致。全书对每一小节都总结了知识要点及思想方法,这部分内容不是对教材知识点的罗列,而是着重知识点之间的联系,帮助学生在更高层次上理解教材内容。

对课后习题,我们力争做到“全”、“详”、“精”。“全”是指本书包括了教材中所有习题的解答,包括横线下的习题和作为选修内容的习题。“详”是指我们对每一道习题都给出了详细的解题步骤。“精”则是对习题的解答都是在参考国内外现在资料基础上给出最好的方法,而且比较难的习题在解题之前有解题分析,比较典型的习题解后还有解后注意事项。

在每个内容单元之后,我们给出了几个有关本单元的综合练习与提高习题,这些习题都是各校考研习题或者是国内外数学竞赛习题,供学有余力的同学使用,习题之后有详细的答案和提示。

前 言

数学分析是数学系最重要的一门专业基础课,因为它不仅是大学数学系第一门重要课程,而且大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用,至于它的基本概念、思想和方法,更可以说是无处不在。数学专业后继专业课程如微分方程、实变函数和复变函数、概率论、统计及泛函分析、微分几何等课程都要以数学分析为基础。同时数学分析也是数学专业各个方向上考研必考的专业基础课。

数学分析逻辑性很强,只要在课堂上专心听讲,一般是可以听得懂的,但即使能听懂,习题还是难以顺利完成。这是因为数学分析习题的技巧性很强,只了解基本的理论和方法,不辅以相应的技巧,是很难顺利应用理论和方法解出习题的。这些都给学生的学习带来不少困难。针对这一问题,为了帮助学生克服困难,使学生尽快掌握这门课程的思想方法,我们编写了这套辅导用书。

当然,任何参考书都只是启发思维的辅助工具,只有在经过独立思考之后再对照相应的参考教材,才能有所收获。因此希望读者能正确使用本书,达到提高数学素养和学好数学分析的双重目的。当然限于编者的水平,本书一定有不少缺点和错误,欢迎读者批评指正。作者 email: wgpyxh@163.com

编者

目 录

第一章 实数集与函数	1
§1 实数	1
知识要点及思想方法	1
课后习题详解	2
§2 数集·确界原理	6
知识要点及思想方法	6
课后习题详解	7
§3 函数概念	10
知识要点及思想方法	10
课后习题详解	11
§4 具有某些特性的函数	15
知识要点及思想方法	15
课后习题详解	16
总练习题详解	20
第二章 数列极限	28
§1 数列极限概念	28
知识要点及思想方法	28
课后习题详解	28
§2 收敛数列的性质	33
知识要点及思想方法	33
课后习题详解	33
§3 数列极限存在的条件	38
知识要点及思想方法	38
课后习题详解	39
总练习题详解	45
第三章 函数极限	52
§1 函数极限概念	52
知识要点及思想方法	52
课后习题详解	53
§2 函数极限的性质	56
知识要点及思想方法	56
课后习题详解	57

§3 函数极限存在的条件	62
知识要点及思想方法	62
课后习题详解	63
§4 两个重要的极限	65
知识要点及思想方法	65
课后习题详解	65
§5 无穷小量与无穷大量	69
知识要点及思想方法	69
课后习题详解	70
总练习题详解	74
一元函数极限 练习与提高	80
答案与提示	81
第四章 函数的连续性	83
§1 连续性概念	83
知识要点及思想方法	83
课后习题详解	84
§2 连续函数的性质	88
知识要点及思想方法	88
课后习题详解	89
§3 初等函数的连续性	94
知识要点及思想方法	94
课后习题详解	95
总练习题详解	96
一元函数的连续性 练习与提高	100
答案与提示	100
第五章 导数和微分	102
§1 导数的概念	102
知识要点及思想方法	102
课后习题详解	103
§2 求导法则	107
知识要点及思想方法	107
课后习题详解	108
§3 参变量函数的导数	114
知识要点及思想方法	114
课后习题详解	115
§4 高阶导数	117
知识要点及思想方法	117
课后习题详解	117
§5 微分	123
知识要点及思想方法	123

课后习题详解	124
总练习题详解	128
第六章 微分中值定理及其应用	133
§1 拉格朗日定理和函数的单调性	133
知识要点及思想方法	133
课后习题详解	134
§2 柯西中值定理和不定式极限	140
知识要点及思想方法	140
课后习题详解	141
§3 泰勒公式	148
知识要点及思想方法	148
课后习题详解	148
§4 函数的极值与最大(小)值	151
知识要点及思想方法	151
课后习题详解	152
§5 函数的凸性与拐点	158
知识要点及思想方法	158
课后习题详解	159
§6 函数图象的讨论	163
知识要点及思想方法	163
课后习题详解	163
§7 方程的近似解	168
课后习题详解	168
总练习题详解	169
第七章 实数的完备性	177
§1 关于实数集完备性的基本定理	177
知识要点及思想方法	177
课后习题详解	178
§2 闭区间上连续函数性质的证明	180
知识要点及思想方法	180
课后习题详解	180
§3 上极限和下极限	181
知识要点及思想方法	181
课后习题详解	181
总练习题详解	184
一元函数微分学 练习与提高	186
答案与提示	186
第八章 不定积分	188
§1 不定积分概念与基本积分公式	188
知识要点及思想方法	188

课后习题详解	189
§2 换元积分法与分部积分法	191
知识要点及思想方法	191
课后习题详解	192
§3 有理函数和可化为有理函数的不定积分	200
知识要点及思想方法	200
课后习题详解	201
总练习题详解	204
第九章 定积分	209
§1 定积分概念	209
知识要点及思想方法	209
课后习题详解	209
§2 牛顿—莱布尼茨公式	211
知识要点及思想方法	211
课后习题详解	211
§3 可积条件	213
知识要点及思想方法	213
课后习题详解	214
§4 定积分的性质	216
知识要点及思想方法	216
课后习题详解	216
§5 微积分学基本定理·定积分计算(续)	222
知识要点及思想方法	222
课后习题详解	222
§6 可积性理论补序	229
知识要点及思想方法	229
课后习题详解	230
总练习题详解	233
第十章 定积分的应用	238
§1 平面图形的面积	238
知识要点及思想方法	238
课后习题详解	238
§2 由平行截面面积求体积	241
知识要点及思想方法	241
课后习题详解	241
§3 平面曲线的弧长与曲率	243
知识要点及思想方法	243
课后习题详解	243
§4 旋转曲面的面积	247
知识要点及思想方法	247

课后习题详解	247
§ 5 定积分在物理中的某些应用	249
知识要点及思想方法	249
课后习题详解	249
§ 6 定积分的近似计算	252
知识要点及思想方法	252
课后习题详解	252
第十一章 反常积分	255
§ 1 反常积分概念	255
知识要点及思想方法	255
课后习题详解	255
§ 2 无穷积分的性质与收敛判别	259
知识要点及思想方法	259
课后习题详解	260
§ 3 瑕积分的性质与收敛判别	265
知识要点及思想方法	265
课后习题详解	266
总练习题详解	269
一元函数积分学 练习与提高	273
答案与提示	273
主要参考文献	276

一元函数极限

第一章 实数集与函数

§1 实数

知识要点及思想方法

一、实数及其性质

1. 实数用无限小数表示的方法

为了把有限小数(包括整数)表示为无限小数,规定:对于正有限小数(包括正整数) $x, x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时,其中 $0 \leq a_i \leq 9, i = 1, 2, \cdots, n, a_n \neq 0, a_0$ 为非负整数,记 $x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)9999\cdots$;而当 $x = a_0$ 为正整数时,则记 $x = (a_0-1).9999\cdots$;对于负有限小数(包括负整数) y ,则先将 $-y$ 表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号;又规定数0表示为 $0.000\cdots$.

2. 实数的大小

(1) 实数大小

给定两个非负实数 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots, y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,其中 a_k, b_k 为非负整数, $0 \leq a_k, b_k \leq 9$.若有(i) $a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \cdots$ 则称 x 与 y 相等,记为 $x = y$;(ii)若存在非负整数 l ,使得 $a_k = b_k, (k = 0, 1, 2, \cdots, l)$,而 $a_{l+1} > b_{l+1}$,则称 x 大于 y (或 y 小于 x),分别记为 $x > y$ (或 $y < x$).

对于负实数 x, y ,有一 $-x > -y$,则称 $x < y$ 或 $y > x$;规定任何非负实数大于任何负实数;

(2) 不足近似与过剩近似

设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数,称有理数 $x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似值,而有理数 $\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ 称为 x 的 n 位过剩近似值.

3. 实数的性质

(1) 四则运算封闭性.

(2) 有序性:任何两个实数 a, b , 必满足下述三个关系之一:

$$a < b, a = b, a > b.$$

(3) 实数大小有传递性, 即 $a > b, b > c$ 则有 $a > c$.

(4) 阿基米德性: 对于任意 $a, b \in \mathbf{R}, b > a > 0$, 存在 $n \in \mathbf{N}$, 使得 $na > b$.

(5) 稠密性: 有理数和无理数的稠密性.

(6) 实数集的几何表示: 数轴.

二、绝对值与不等式

1. 绝对值

(1) 定义: $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ 为 a 的绝对值.

从数轴上看的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

(2) 绝对值的性质

(i) $|a| = |-a| \geq 0$; 当且仅当 $a = 0$ 时 $|a| = 0$.

(ii) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(iii) $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h; |a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h, h > 0$.

(iv) $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

(v) $|ab| = |a| |b|$.

(vi) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$.

2. 几个重要的不等式

(1) 绝对值不等式: 定义 $|a| = \max\{-a, a\}$.

(2) 其它不等式

(i) $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$, $|\sin x| \leq 1$, $|\sin x| \leq |x|$.

(ii) 均值不等式: 对任意 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}^+$, 记

$$M(a_i) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \text{ (算术平均值)}$$

$$G(a_i) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}}, \text{ (几何平均值)}$$

$$H(a_i) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}. \text{ (调和平均值)}$$

平均值不等式:

$H(a_i) \leq G(a_i) \leq M(a_i)$, 等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时成立.

(3) 伯努利不等式: 任意 $x > -1$, 有不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx, n \in \mathbf{N}$.

当 $x > -1$ 且 $x \neq 0, n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 2$ 时, 有严格不等式 $(1+x)^n > 1+nx$.

课后习题详解

1. 设 a 为有理数, x 为无理数. 证明:

(1) $a+x$ 是无理数; (2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 是无理数.

证明 这种题目通常用反证法.

(1) 假设 $a+x$ 是有理数, 则 $(a+x)-a=x$ 是有理数, 这与题设 x 为无理数相矛盾. 故 $a+x$ 是无理数.

(2) 假设 ax 是有理数, 又 $a \neq 0$, 则 $\frac{ax}{a} = x$ 为有理数, 这与题设 x 是无理数相矛盾. 故 ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1) > 0$; (2) $|x-1| < |x-3|$;

(3) $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x-2}$.

解 (1) 由原不等式有

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

前一个不等式组的解是 $x > 1$, 后一个不等式组的解为 $-1 < x < 0$, 故 $x(x^2-1) > 0$ 的解为 $\{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$, 其在数轴上表示如图 1-1.

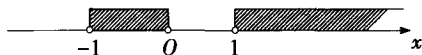


图 1-1

(2) 当 $x \neq 3$ 时, 由原不等式有 $\left| \frac{x-1}{x-3} \right| < 1$, 从而有 $\left| 1 + \frac{2}{x-3} \right| < 1$, 所以 $-1 < 1 + \frac{2}{x-3} < 1$, 解此不等式, 得 $x < 2$, 故 $|x-1| < |x-3|$ 的解为 $\{x | x < 2 \text{ 且 } x \neq 3\} = \{x | x < 2\}$, 其在数轴上表示如图 1-2.



图 1-2

(3) 由题设知

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{解之得: } x \geq 1.$$

$$\text{又 } \sqrt{3x-2} \geq 0, \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \geq 0,$$

从而不等式两端平方, 有 $x-1+2x-1-2\sqrt{(x-1)(2x-1)} \geq 3x-2$, 因之有 $2\sqrt{(x-1)(2x-1)} \leq 0$, 所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)} = 0$, 由此解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$, 又 $x \geq 1$, 故有 $x=1$, 但 $x=1$ 不符合原不等式, 所以原不等式无解.

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 证明: 若对任何正数 ϵ 有 $|a-b| < \epsilon$, 则 $a=b$.

证明 假设 $a \neq b$, 则根据实数集的有序性, 有 $a > b$ 或 $a < b$, 从而必有 $|a-b| > 0$, 令 $\epsilon = |a-b| > 0$, 则 ϵ 为正数且满足 $|a-b| = \epsilon$, 这与假设 $|a-b| < \epsilon$ 矛盾, 从而必有 $a=b$ 成立.

即原命题成立.

4. 设 $x \neq 0$, 证明 $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$, 并说明其中等号何时成立.

证明 由于 $\left(\sqrt{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}} \right)^2 = |x| + \frac{1}{|x|} - 2\sqrt{|x| \cdot \frac{1}{|x|}} \geq 0$,

所以 $|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$. 因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号, 从而 $\left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$.

等号成立当且仅当 $\left(\sqrt{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}\right)^2 = 0$ 成立, 即 $|x| = \frac{1}{|x|}$, 进而 $x = \pm 1$ 时成立.

5. 证明: 对任何 $x \in \mathbf{R}$ 有

$$(1) |x-1| + |x-2| \geq 1; \quad (2) |x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2.$$

证明 此题目运用绝对值的三角形不等式性质.

$$(1) \text{ 因为 } 1 - |x-1| \leq |1 - (x-1)| = |1-x+1| = |x-2|,$$

所以 $|x-1| + |x-2| \geq 1$.

$$(2) \text{ 因为 } 2 - |x-3| \leq |2 + (x-3)| = |x-1| \leq |x-1| + |x-2|,$$

所以 $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$.

6. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合), 证明

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证明 对任意的 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 由 $a^2(b-c)^2 \geq 0$, 有

$$2a^2bc \leq a^2(b^2+c^2), \text{ 两端同时加 } a^4+b^2c^2, \text{ 有}$$

$$a^4+b^2c^2+2a^2bc \leq a^2b^2+a^2c^2+a^4+b^2c^2,$$

$$\text{即 } (a^2+bc)^2 \leq (a^2+b^2)(a^2+c^2),$$

$$\text{所以 } a^2+bc \leq \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

$$\text{又 } 2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \leq -2bc,$$

两端再同加 b^2+c^2 , 则

$$(a^2+b^2)-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+(a^2+c^2) \leq a^2-2bc+c^2$$

$$\text{即 } |\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|.$$

不等式 $|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|$ 的几何意义为:

当 $b \neq c$ 时, 表示以 $(a, b), (a, c), (0, 0)$ 三点为顶点的三角形, 其两边之差小于第三边.

当 $b = c$ 时, 此时不等式为等式 $\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+c^2} = 0$, 三角形变为以 $(a, c), (0, 0)$ 为端点的线段.

7. 设 $x > 0, b > 0, a \neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

$$\text{证明 因为 } 1 - \frac{a+x}{b+x} = \frac{b-a}{b+x}, \frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{x(b-a)}{b(b+x)},$$

且 $x > 0, b > 0, a \neq b$, 所以

$$\text{当 } a > b \text{ 时, 有 } 1 - \frac{a+x}{b+x} < 0, \frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} < 0,$$

$$\text{从而 } 1 < \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}.$$

$$\text{当 } a < b \text{ 时, } 1 - \frac{a+x}{b+x} > 0, \frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} > 0,$$

$$\text{从而 } \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} < 1,$$

所以 $\frac{a+x}{b+x}$ 总介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

8. 设 p 为正整数. 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证明 反证法 假设 $\sqrt{p}$ 为有理数, 则存在正整数 m, n , 且 m, n 互质, 使得 $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, 于是 $p = \frac{m^2}{n^2}$, $m^2 = pn^2 = n \cdot (pn)$, 可见 n 能整除 m^2 , 由于 m, n 互质, 从而它们的最大公约数为 1 , 这与 m, n 互质矛盾, 所以 $\sqrt{p}$ 是无理数.

9. 设 a, b 为给定实数. 试用不等式符号 (不用绝对值符号) 表示下列不等式的解:

$$(1) |x-a| < |x-b|;$$

$$(2) |x-a| < x-b;$$

$$(3) |x^2-a| < b.$$

解 (1) 原不等可化为 $\left| \frac{x-a}{x-b} \right| = \left| \frac{b-a}{x-b} + 1 \right| < 1$, 因此有

$$-1 < \frac{b-a}{x-b} + 1 < 1, \text{ 即 } 0 < \frac{a-b}{x-b} < 2, \text{ 由此可得不等式组}$$

$$\begin{cases} x > b \\ 0 < a-b < 2x-2b, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < b, \\ 2x-2b < a-b < 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x > b \\ x > \frac{a+b}{2}, \\ a > b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < b, \\ x < \frac{a+b}{2}, \\ a < b \end{cases}$$

故当 $a > b$ 时, 不等式的解为 $x > \frac{a+b}{2}$; 当 $a < b$ 时, 不等式解为 $x < \frac{a+b}{2}$; 当 $a = b$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$.

$$(2) \text{ 原不等可化为 } \begin{cases} x > b \\ b-x < x-a < x-b, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x > b \\ a > b \\ x > \frac{a+b}{2}, \end{cases}$$

故当 $a > b$ 时, 不等式的解为 $x > \frac{a+b}{2}$; 当 $a \leq b$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$.

(3) 当 $b \leq 0$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$.

当 $b > 0$ 时, 原不等式等价于: $a-b < x^2 < a+b$, 因此有

当 $a+b \leq 0$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $a+b > 0$ 时,

(i) 如果 $a > b$, 则解为 $\sqrt{a-b} < |x| < \sqrt{a+b}$, 即 $\sqrt{a-b} < x < \sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a+b} < x < -\sqrt{a-b}$;

(ii) 如果 $a < b$, 则解为 $|x| < \sqrt{a+b}$, 即 $-\sqrt{a+b} < x < \sqrt{a+b}$.

§2 数集·确界原理

知识要点及思想方法

一、区间与邻域

1. 区间

- (i) $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) ;
- (ii) $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$;
- (iii) $\{x \mid a < x \leq b\}$ 和 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 称为半开半闭区间, 记作 $(a, b]$ 和 $[a, b)$.

2. 邻域

(i) 设 a 和 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 称点集 $U_\delta(a) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U_\delta(a)$.

(ii) 设 a 和 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 称点集 $U_\delta^0(a) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U_\delta^0(a)$.

二、有界数集、确界原理

1. 有界数集

设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若存在数 $M(L)$, 使得对一切 $x \in S$, 都有 $x \leq M(x \geq L)$, 则称 S 为有上界(下界)的数集, 数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界). 若 S 既有上界又有下界, 则称 S 为有界集.

2. 确界

(1) 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集, 若数 η 满足以下两条:

- (i) 对一切 $x \in S$ 有 $x \leq \eta$, 即 η 是数集 S 的上界;
- (ii) 对任何 $\alpha < \eta$ 存在 $x_0 \in S$ 使得 $x_0 > \alpha$ (即 η 是 S 的最小上界) 则称数 η 为数集 S 的上确界.

记作 $\eta = \sup S$.

(2) 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集, 若数 ξ 满足以下两条:

- (i) 对一切 $x \in S$ 有 $x \geq \xi$, 即 ξ 是数集 S 的下界;
- (ii) 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $x_0 \in S$ 使得 $x_0 < \xi + \epsilon$ (即 ξ 是 S 的最大下界), 则称数 ξ 为数集 S 的下确界. 记作 $\xi = \inf S$.

(3) 确界原理

设 S 为非空数集, 若 S 有上界, 则 S 必有上确界; 若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

注意 (1) 确界不一定属于原集合.

(2) E 的最值必属于 E , 但确界未必, 确界是一种临界点.

(3) 非空有界数集必有确界, 但未必有最值.

(4) 若 $\max E$ 存在, 必有 $\max E = \sup E$.

课后习题详解

1. 用区间表示下列不等式的解:

$$(1) |1-x|-x \geq 0;$$

$$(2) \left| x + \frac{1}{x} \right| \leq 6;$$

$$(3) (x-a)(x-b)(x-c) > 0 \quad (a, b, c \text{ 为常数, 且 } a < b < c);$$

$$(4) \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解 (1) 当 $1-x \geq 0$ 时, 不等式化为 $1-x-x \geq 0$, 其解为 $x \leq \frac{1}{2}$;

当 $1-x < 0$ 时, 不等式化为 $x-1-x \geq 0$, 无解.

综合, 原不等式的解为 $x \leq \frac{1}{2}$, 用区间表示为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

(2) 绝对值不等式 $\left| x + \frac{1}{x} \right| \leq 6$ 等价于 $-6 \leq x + \frac{1}{x} \leq 6$, 而这又等价于不等式组:

$$\begin{cases} x > 0 \\ -6x \leq x^2 + 1 \leq 6x \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -6x \geq x^2 + 1 \geq 6x \end{cases}$$

前者不等式的解集为 $[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$, 后者的解集为 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$, 从而原不等式的解集为 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$.

(3) 法一 运用不等式的等价形式来计算.

原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases} x-a > 0 \\ x-b > 0 \\ x-c > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-a > 0 \\ x-b < 0 \\ x-c < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-a < 0 \\ x-b > 0 \\ x-c < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-a < 0 \\ x-b < 0 \\ x-c > 0 \end{cases}$$

第一个不等式组的解集为 $(c, +\infty)$, 第二个不等式组的解集为 (a, b) ,

第三、四个不等式组的解集均为空集, 所以原不等式的解集为 $(a, b) \cup (c, +\infty)$.

法二 构造函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $x \in \mathbf{R}$, 则由 $a < b < c$, 知

$$f(x) \begin{cases} < 0, & \text{当 } x \in (-\infty, a) \cup (b, c) \\ = 0, & \text{当 } x = a, b, c \\ > 0, & \text{当 } x \in (a, b) \cup (c, +\infty) \end{cases}$$

因此 $f(x) > 0$, 当且仅当 $x \in (a, b) \cup (c, +\infty)$.

故原不等式的解集为 $(a, b) \cup (c, +\infty)$.

(4) 若 $0 \leq x \leq 2\pi$, 则当且仅当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right]$ 时, $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 再由正弦函数的周期性知: $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集是

$$\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\pi \right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$