SPACES GENERATED BY BLOCKS

由块生成的空间

陆善镇　M.H.泰勃尔森　G.怀斯著

湖南教育出版社

SPACES GENERATED BY BLOCKS

由块生成的空间

陆善镇　M.H.泰勃尔森　G.怀斯著

湖南教育出版社

由块生成的空间

陆善镇，M. H. 泰勃尔森，G. 怀斯 著

责任编辑：胡 坚

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

850×1192 毫米 32 开 印张：5 字数：129,000

1996 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 1 次印刷

ISBN7—5355—2440—0/G・2435

定价：11.10 元

前　言

这是一本专著，它系统地介绍了自80年代初发展起来的一类由块生成的函数空间（以下简称块空间）的理论及其对调和分析问题的应用. 块空间的产生最初是同研究古典Fourier级数几乎处处收敛问题密切相关的，后经许多学者的深入研究,形成了一定的理论体系并显示出对研究调和分析问题所起的作用.

本书是在Guido Weiss教授最先用西班牙文写的讲义基础上扩充而成的. 全书分为十二章. 第一章提供了产生块空间的数学背景. 块空间的定义在第二章里给出. 第三章至第六章的内容涉及块空间的基本性质. 最后六章是关于块空间对调和分析问题的应用,其中第八章后半部和第十二章全部是由陆善镇执笔写成的.

Guido Weiss 教授和 Mitchell Taibleson 教授希望陆善镇能将本书译成中文介绍给中国读者，这便是出版本书的宗旨. 在此机会，要感谢美国St. Louis华盛顿大学的G. Weiss教授和M. H. Taibleson教授，陆在该校访问期间,同他们两位在块空间的研究领域中有过十分愉快的合作,受益匪浅.

最后，要感谢北京大学数学系刘和平博士，他将本书稿件详细地校阅了一遍，订正了不少错误.

著者

1993 年夏

目　录

第一章

背　　景

几年前，E. M. Stein，M. Taibleson 和 G. Weiss [STW] 考查了 $H^p(0<p<1)$ 上的某种极大算子，作为一个例子，考虑了 $\delta(\delta>-1)$ 阶 Cesàro 平均. 记 $T=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，它恒同于 $\boldsymbol{R}$ 模 1. 设 $f\in L^1(T)$，$S_n(f;x)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ 为 f 的 Fourier 级数的部分和，以及

$$\sigma_n^\delta(f;x)=\hat{f}(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n-k}^\delta}{A_n^\delta}\{\hat{f}(k)e^{2\pi ikx}+\hat{f}(-k)e^{-2\pi ikx}\}$$

为 δ 阶 Cesàro 平均，其中 $A_n^\delta=\binom{n+\delta}{n}=\frac{(n+\delta)\cdots(\delta+1)}{n!}=\frac{\Gamma(n+\delta+1)}{n!\Gamma(\delta+1)}$. 当 $\delta=0$ 时，有 $A_k^0=1$，$\forall k$，故 $\sigma_n^0=S_n$，今令 δ 固定，而考虑极大算子

$$Sf(x)=\sup_{n\geqslant 0}|\sigma_n^\delta(f;x)|$$

对给定的 p，$\frac{1}{p}-1$ 是 δ 的临界值，[STW] 建立了下述的结果.

定理　设 $0<p<1$，以及 $\delta=\frac{1}{p}-1$，若 $f\in H^p(T)$，则

$Sf(x)$a.e. 有限，且对一切的 $y>0$，有

$$|\{x: Sf(x)>y\}| \leqslant (A\|f\|_{H^p}/y)^p \tag{1.1}$$

其中，常数 A 与 f、y 无关.

注：①此结果当 $p=1$ 时不成立. 如 $p=1$，则 $\delta=0$，倘若极大部分和算子是弱 (H^1,L^1) 型的话，那末它就蕴含着 H^1 中函数的 Fourier 级数为 a.e. 收敛. 然而，如所周知：存在一 H^1 中的函数，其 Fourier 级数为 a.e. 发散（见 [Zy]，Vol I，P.310.）. 我们研究的宗旨之一在于以适当的方式将上面的定理拓展到 $p=1$ 的情形.

②让我们对上述定理的证明作一个说明，证明有两个主要的步骤. 考虑 $H^p(T)$ 的原子分解特征. 所谓一个 p 原子，是指满足下列条件的一个函数 a：

$$\operatorname{supp}a \subset I \subset T, I \text{ 为一区间；}$$

$$\int a(x)x^k\mathrm{d}x = 0, 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{1}{p}-1\right],$$

以及

$$|a(x)| \leqslant |I|^{-1/p}.$$

准确地说，上述的 a 是一个常规的 p 原子. 一个特殊的 p 原子，是指至多为$\left[\frac{1}{p}-1\right]$次的多项式，且多项式的绝对值不超过 1. H^p 原子理论的主要结果是 $f\in H^p$ 当且仅当 $f=\sum c_k a_k$，其中每一 a_k 为 p 原子，且 $\sum|c_k|^p<\infty$，此外，

$$\|f\|_{H^p} \sim \inf\{(\sum|c_k|^p)^{1/p}: f=\sum c_k a_k, a_k \text{ 为 } p \text{ 原子}\}$$

（见 [CW]，[LU]）. 不难证明，当 a 为 p 原子时，对于 $a\to Sa$，我们可以得到一个一致的弱 (H^p,L^p) 型的估计. 这就是第一步. 第二步是要建立一个引理，后者使我们能够将这些一致的弱型估计叠加起来.

引理 1.2 (X,μ) 为任一测度空间，及 $0<p<1$. 设 $\{f_k\}$ 为一列可测函数，满足

$$\mu(\{x: |f_k(x)| > y\}) \leqslant y^{-p}, \forall\ y > 0, \text{以及} \sum_k |c_k|^p \leqslant 1,$$

则 $\sum c_k f_k(x)$ a.e. 绝对收敛，且

$$\mu(\{x: |\sum c_k f_k(x)| > y\}) \leqslant \frac{2-p}{1-p} y^{-p}.$$

既然定理当 $p=1$ 时是不成立的，那末上述的两步中，至少有一步不能拓展到 $p=1$ 的情形. 在第二章，我们将证明：若 a 为一1 原子，则 $|\{x: Sa(x) > y\}| \leqslant cy^{-1}$，$\forall\ y>0$，其中 c 与 y、a 无关，S 为极大部分和算子. 其证明用到了 Carleson-Hunt 定理. 我们还将看到，证明中确实不需要 1 原子的消失矩条件. 这样，第二步显然是不成立的，即不可能将弱 (H^1,L^1) 型的估计作上述方式的叠加. 但是，可用下面的引理 1.3 来代替上述的第二步(引理 1.3 是属于 E. M. Stein 和 N. Weiss 的).

定义 对于数列 $c=\{c_k\}$，定义

$$N(c) = \sum_k |c_k| \left(1 + \log \frac{\sum_l |c_l|}{|c_k|}\right)$$

和

$$M(c) = \sum_k |c_k| \left(1 + \log^+ \frac{1}{|c_k|}\right)$$

注：$N(c) < \infty$ 当且仅当 $M(c) < \infty$.

引理 1.3 若 $\{f_k\}$ 为定义于一测度空间 (X,μ) 上的一列可测函数，使得

$$\mu(\{x: |f_k(x)| > y\}) \leqslant y^{-1}, \forall\ y > 0,$$

又 $c=\{c_k\}$ 为一数列，使得 $N(c) < \infty$，则 $\sum_k c_k f_k(x)$ a.e. 绝对收

敛，且

$$\mu(\{x:|\sum c_k f_k(x)|>y\})\leqslant 4N(c)y^{-1},\forall\ y>0.$$

这使我们被引向去研究一类由原子和数列 $c=\{c_k\}$ 所生成的空间，这里，原子是不带消失矩条件的（称为 block），而 $c=\{c_k\}$ 满足条件 $N(c)<\infty$.

第二章

块(block)及由它生成的空间 B_q

定义 一 q 块 $(1\leqslant q\leqslant\infty)$ 是指这样的一个函数 b：supp$b\subset I$，区间 $I\subset T$，并满足

$$\|b\|_q\leqslant|I|^{-\frac{1}{q'}}=|I|^{\frac{1}{q}-1}(\text{规定}\frac{1}{q}=0,\text{当}\ q=\infty)\tag{2.1}$$

或者等价地

$$\left(\int_T|b(x)|^q\frac{\mathrm{d}x}{|I|}\right)^{1/q}\leqslant|I|^{-1},\text{当}\ 1\leqslant q<\infty;\tag{2.1)'$$

$$|b(x)|\leqslant|I|^{-1},\text{当}\ q=\infty.$$

注：块的尺寸条件是同 1 原子的尺寸条件相一致的.

定理 2.2 存在一与 q 块 $b(1<q\leqslant\infty)$ 无关的常数 $c_q>0$，使得

$$|\{x:Sb(x)>y\}|\leqslant c_q y^{-1},\forall\ y>0.$$

证 不失一般性可设 supp$b\subset I=(-\delta,\delta)$.

①设 $y>|I|^{-1}$，由 Carleson-Hunt 定理 [Hu]，当 $1<q<\infty$

时，S 为弱 (q,q) 型的，此时

$$|\{x: Sb(x)>y\}| \leqslant c\|b\|_q^q y^{-q} \leqslant c|I|^{1-q} y^{-q}$$
$$\leqslant c y^{q-1} y^{-q}=c y^{-1}.$$

当 $q=\infty$时，b 也为一2 块. 从而，上述的论证给出了相同的结论.

②设 $y\leqslant|I|^{-1}$，显然

$$|\{x:Sb(x)>y\}|\leqslant|\{x:Sb(x)>y\}\cap\{x:|x|\leqslant|I|\}|$$
$$+|\{x:Sb(x)>y\}\cap\{x:|x|>|I|\}|$$

上式右端第一项被 $2|I|\leqslant 2y^{-1}$所控制. 如注意到 Dirichlet 核 D_n 满足

$$|D_n(t)|\leqslant ct^{-1},|t|\leqslant 1/2,$$

那末前一式右端第二项可用下述方法来估计.

当 $x>|I|=2\delta$ 时，有

$$|S_n(b;x)| = \left|\int_{-1/2}^{1/2} b(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \|b\|_1 \sup_{x-\delta\leqslant t<1/2}|D_n(t)|$$
$$\leqslant \sup_{x-\delta\leqslant t<1/2} ct^{-1}\leqslant c/(x-\delta)\leqslant 2cx^{-1}$$

当 $x<-|I|=-2\delta$ 时，同理可得同样的估计. 因此，$\{x:Sb(x)>y\}\cap\{x:|x|>|I|\}\subset(-2cy^{-1},2cy^{-1})$

故上面提到的第二项被 $4cy^{-1}$所控制，证毕.

引理 1.3 对我们来说是相当重要的，所以这里不妨重复一下 E. M. Stein-N. Weiss 引理的证明.

引理 1.3 的证明（见 [SnW]）：

设 $\{g_j\}$ 为测度空间 (X,μ) 上的一列可测函数，$g_j(x)\geqslant 0$，$\forall\, x\in X$，$\lambda_j(y)=\mu(\{x:g_j(x)>y\})\leqslant y^{-1}$，$y>0$，以及 $\sum c_j=1, c_j>0, \forall\, j$. 对固定的 $y>0$，令

$$l_j(x)=\begin{cases} g_j(x), & \text{当 } g_j(x)\leqslant y/2 \\ 0 & \text{,其它}\end{cases}$$

$$u_j(x)=\begin{cases} g_j(x), 当\ g_j(x) > y/2c_j \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

$$m_j(x)=\begin{cases} g_j(x), 当\ y/2 < g_j(x) \leqslant y/2c_j \\ 0 \quad ,其它 \end{cases}$$

则

$$l(x)=\sum c_j l_j(x) \leqslant \sum c_j y/2 = y/2, \forall\ x,$$

以及在除去测度不超过 $\sum 2c_j y^{-1} = 2y^{-1}$ 的点集外，$u(x) = \sum c_j u_j(x) = 0$. 如令 $m(x) = \sum c_j m_j(x)$，则

$$\begin{aligned}\int m(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \sum c_j \int m_j(x)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum c_j \left\{\int_{y/2}^{y/2c_j} \lambda_j(s)\mathrm{d}s - s\lambda_j(s)\Big|_{y/2}^{y/2c_j}\right\} \\ &\leqslant \sum c_j\left(\log\frac{1}{c_j}+1\right) = N(c), c=\{c_j\}\end{aligned}$$

故

$$\mu(\{x: m(x) > y/2\}) \leqslant 2N(c)y^{-1}.$$

置 $g(x) = \sum c_j g_j(x)$，显然 $g = l + m + u$，且

$$\begin{aligned}\{x: g(x) > y\} \subset \{x: u(x) \neq 0\} &\cup \{x: l(x) > y/2\} \\ &\cup \{x: m(x) > y/2\}.\end{aligned}$$

由于 $\{x: l(x) > y/2\} = \varnothing$，故

$$\begin{aligned}\mu(\{x: g(x) > y\}) &\leqslant \mu(\{x: u(x) \neq 0\}) \\ &\quad + \mu(\{x: m(x) > y/2\}) \\ &\leqslant 2y^{-1} + 2N(c)y^{-1} \\ &\leqslant 4N(c)y^{-1}\end{aligned}$$

注意到 $N(c)$ 为齐次的，那末 1.3 中的估计式对一般的 $c = \{c_j: c_j > 0\}$ 也成立. 由这一估计式可推出 $\sum c_j g_j(x)$ 的 a.e. 收敛性，1.3 证毕.

推论 2.3 设数列 $m = \{m_k\}$ 满足 $N(m) < \infty$，并且 $\{b_k\}$ 为一列 q 块 $(1 < q \leqslant \infty)$，则 $f = \sum_k m_k b_k$ 满足

$$|\{x:Sf(x)>y\}|\leqslant 4cN(m)y^{-1},\forall\ y>0 \tag{2.4}$$

其中，c 为定理 2.2 中的常数，特别地，$S_n(f;x)$a.e. 收敛于 $f(x)$.

证 因 $\sum_k |m_k|\leqslant N(m)<\infty$，以及 $\|b_k\|_1\leqslant 1,\forall\ k$，故定义 $f(x)$ 的级数 a.e. 绝对收敛，并且 $f\in L^1$，此外，由于 $S_n(f;x)=\sum_k m_k S_n(b_k;x)$，且级数为绝对及一致收敛的，所以 $Sf(x)\leqslant\sum_k |m_k|Sb_k(x)$. 于是，估计式(2.4)由 1.3 和 2.2 推得.

为证 f 的 Fourier 级数 a.e. 收敛，我们写

$$f=\sum_{k=1}^{N}m_kb_k+\sum_{k=N+1}^{\infty}m_kb_k=g+h.$$

g 为 q 块的有限线性组合，故 $g\in L^q$，因此，g 的 Fourier 级数 a.e. 收敛于 g. 记

$$\alpha=\sum_{k=N+1}^{\infty}|m_k|\left(1+\log\frac{\sum_l|m_l|}{|m_k|}\right)$$

注意到 $\|h\|_1\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}|m_k|\leqslant\alpha$ 以及 $\alpha\to 0$（当 $N\to\infty$）. 对任一 $\varepsilon>0$，

$$\begin{aligned}&|\{x:\limsup|S_j(f;x)-f(x)|>\varepsilon\}|\\&=|\{x:\limsup|S_j(h;x)-h(x)|>\varepsilon\}|\\&\leqslant|\{x:Sh(x)>\varepsilon/2\}|+|\{x:|h(x)|>\varepsilon/2\}|\\&\leqslant 8c\alpha\varepsilon^{-1}+2\|h\|_1\varepsilon^{-1}\leqslant 2\alpha(4c+1)\varepsilon^{-1}\end{aligned}$$

既然上式对一切 $\varepsilon>0$ 均成立，那末它就蕴含着

$$S_jf(x)\to f(x)\text{a.e.}$$

定义 函数空间 $B_q(1\leqslant q\leqslant\infty)$ 是由一切形如 $f=\sum m_kb_k$ 的函数 f 所构成，其中 b_k 为 q 块，且 $m=\{m_k\}$ 满足 $N(m)<\infty$，上述级数的收敛是在 a.e. 收敛意义下的.

借助 $N_q(f)=\inf\{N(m):f=\sum m_k b_k\}$ 定义了 B_q 上的一个拟范数.

注：由于 $\sum|m_k|\leqslant N(m)$，以及 $\|b_k\|_1\leqslant 1$，故定义 f 的级数在 L^1 中收敛，而且也为 a.e. 绝对收敛.

N_q 不是范数，它不具有次可加性. 事实上，我们有

$$N_q(f+g)\leqslant(1+\log 2)[N_q(f)+N_q(g)] \tag{2.5}$$

证 考虑 $\varphi(x)=x\log\frac{1}{x}+(1-x)\log\frac{1}{1-x}, 0\leqslant x\leqslant 1$. φ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处有最大值，且 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\log 2$. 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 f 和 g 的块分解：$f=\sum m_k b_k$ 和 $g=\sum n_j c_j$，使得

$$N_q(f)\geqslant N(m)-\varepsilon \text{ 及 } N_q(g)\geqslant N(n)-\varepsilon.$$

记 $A=\sum|m_k|, B=\sum|n_j|$，则

$$\begin{aligned}N_q(f+g)&\leqslant N(m)+N(n)+(A+B)\varphi\left(\frac{A}{A+B}\right)\\&\leqslant N(m)+N(n)+(A+B)\log 2\\&\leqslant(1+\log 2)[N(m)+N(n)]\\&\leqslant(1+\log 2)(N_q(f)+N_q(g)+2\varepsilon).\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，便推得(2.5).

在本节后面，将看出当 $1<q\leqslant\infty$ 时，$1+\log 2$ 是最好的常数.

回忆一下 $M(m)$ 的定义：$M(m)=\sum|m_k|\left(1+\log^+\frac{1}{|m_k|}\right)$. 现定义 $M_q(f)=\inf\{M(m):f=\sum m_k b_k, b_k \text{ 为 } q \text{ 块}\}$. 注意到 N_q 为正齐次的，但不是次可加的；M_q 不是正齐次的，却为次可加的. 故 $d_q(f,g)=M_q(f-g)$ 为一距离. 前面已提到：$N(m)<\infty$ 当且仅当 $M(m)<\infty$. 为了看出这一点，只需注意到以下两点：不妨只考虑 $0<m_k<1(\forall k)$ 的情形，以及 $N(m)-M(m)=(\sum m_k)\log(\sum m_k)$. 如设 $N(m)<\infty$ 或 $M(m)<\infty$，则 $\sum m_k<$

∞，从而 $|N(m)-M(m)|<\infty$. 于是，证实了前面的断言.

让我们详细地研究 N_q 和 M_q 之间的关系. 设 $c=\{c_j\}, c_j>0$，$\forall\ j, A=\sum_j c_j$，则 $M(c)=A+\sum c_j\log^+\frac{1}{c_j}$；$N(c)=A+A\log A+\sum c_j\log\frac{1}{c_j}$；$N(c), M(c)\geqslant A$. 由此看出 $N(c)=M(c)+A\log A-\sum_{j:c_j>1}c_j\log c_j$. 于是 $N(c)\leqslant M(c)+A\log A\leqslant M(c)+A\log^+A\leqslant M(c)+M(c)\log^+M(c)$. 另一方面，$M(c)=N(c)+A\log\frac{1}{A}+\sum_{j:c_j>1}c_j\log c_j$. 如 $A>1$，则 $\sum_{j:c_j>1}c_j\log c_j\leqslant\sum_{j:c_j>1}c_j\log A\leqslant A\log A$. 从而，$M(c)\leqslant N(c)+A\log\frac{1}{A}+A\log A=N(c)$. 如 $0<A\leqslant 1$，则 $\sum_{j:c_j>1}c_j=0$，从而 $M(c)=N(c)+A\log\frac{1}{A}\leqslant N(c)+1/e$，因此，$M(c)\leqslant N(c)+1/e$，今设 $N(c)\leqslant 1/e$. 则 $0<A\leqslant N(c)\leqslant 1/e<1$，以及 $M(c)=N(c)+A\log\frac{1}{A}\leqslant N(c)+N(c)\log\frac{1}{N(c)}$. 到此我们已经证明了：

$$\begin{cases}N(c)\leqslant M(c)[1+\log^+M(c)]\\ M(c)\leqslant\begin{cases}N(c)+1/e\\ N(c)\left[1+\log\dfrac{1}{N(c)}\right]，\text{当 } N(c)<1/e\end{cases}\end{cases}\tag{2.6}$$

这些不等式容易被拓广到 N_q 和 M_q 上：

$$\begin{cases}N_q(f)\leqslant M_q(f)[1+\log^+M_q(f)]\\ M_q(f)\leqslant\begin{cases}N_q(f)+1/e\\ N_q(f)\left[1+\log\dfrac{1}{N_q(f)}\right]，\text{当 } N_q(f)<1/e.\end{cases}\end{cases}\tag{2.7}$$

由(2.7)看出：函数列 $\{f_n\}$ 关于距离 d_q 收敛当且仅当它关于拟范 N_q 收敛；一族函数关于距离为有界当且仅当它关于拟范拓扑为有界；B_q 的距离和拟范拓扑是一致的.

现在研究 $N_q(f)$ 及 $M_q(f)$ 同 $\|f\|_1$ 之间的关系. 设 $f=$

$\sum m_k b_k$ 为 $f \in B_q$ 的块分解,如记 $A = \sum |m_k|$,则

$$\| f \|_1 \leqslant \sum |m_k| \int |b_k| \leqslant \sum |m_k| = A \leqslant N(m).$$

以及

$$\begin{aligned} M(m) &= \sum |m_j| \left(1 + \log^+ \frac{1}{|m_j|} \right) \\ &\geqslant \sum |m_j| \left(1 + \log^+ \frac{1}{A} \right) \\ &= A \left(1 + \log^+ \frac{1}{A} \right) \\ &\geqslant \| f \|_1 \left(1 + \log^+ \frac{1}{\| f \|_1} \right) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{cases} N_q(f) \geqslant \| f \|_1 \\ M_q(f) \geqslant \| f \|_1 \left(1 + \log^+ \dfrac{1}{\| f \|_1} \right) \end{cases} \tag{2.8}$$

下面，让我们转向 B_q 的其它某些性质.

命题 2.9 B_q 是完备的.

证 由 (2.7) 可知：一序列关于距离 d_q 为 Cauchy 序列当且仅当它关于拟范 N_q 为 Cauchy 序列. 由 M_q 的次可加性容易推出它的可数次可加性. 这就是说，如果 $\sum M_q(f_k) < \infty$,则 $\sum f_k$ 在 B_q 中收敛,且 $M_q(\sum f_k) \leqslant \sum\limits_k M_q(f_k)$. 现在,$B_q$ 的完备性可用标准的论证得到.

命题 2.10 若 $N(m) < \infty$,且每一 b_k 为 q 块,则 $\sum m_k b_k$ 同时在 L^1 中,a.e.,以及 B_q 的拓扑意义下收敛.

证 事实上，我们已经证明了头两个结论，而最后一个结论是平凡的.

命题 2.11 若 $f\in B_q$，g 为可测的，且 $|g|\leqslant|f|$，则 $g\in B_q$，$N_q(g)\leqslant N_q(f)$，以及 $M_q(g)\leqslant M_q(f)$，由此推出：若 f 为可测的，则 $f\in B_q$ 当且仅当 $|f|\in B_q$；以及若 f、$g\in B_q$，则 $\sup\{f,g\}\in B_q$，$\inf\{f,g\}\in B_q$.

证 设 $f\in B_q$，$|g|\leqslant|f|$，以及 g 为可测的，今记

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\begin{cases}g(x)/f(x), & \text{当 } f(x)\neq 0,\\ 0, & \text{当 } f(x)=0,\end{cases}$$

因 $f\in B_q$，故可写成 $f(x)=\sum m_k b_k(x)$，其中 $\{b_k\}$ 为一列 q 块，且 $N(m)<\infty$. 因 $\sum m_k b_k(x)$ 在 L^1 中及 a.e. 收敛，故 $\sum m_k\left(\frac{g}{f}\right)(x)b_k(x)$ 在 L^1 中及 a.e. 收敛于 g. 注意到 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)b_k(x)$ 仍为一 q 块，故 $g\in B_q$，再由 $N_q(g)\leqslant N(m)$ 和 $M_q(g)\leqslant M_q(m)$ 推出 $N_q(g)\leqslant N_q(f)$，以及 $M_q(g)\leqslant M_q(f)$.

命题 2.12 若 $1\leqslant q\leqslant\infty$，则 $L^q(T)\subset B_q$；若 $1\leqslant p<q\leqslant\infty$，则存在一 $f\in L^p(T)$，使得 $f\notin B_q$. 由此推出：若 $1\leqslant q_1<q_2\leqslant\infty$，则 $B_{q_2}\subsetneqq B_{q_1}$.

注： ①2.12 的第一部分是平凡的，而第二部分则是下面引理 2.13 中有关 N_q 和 M_q 的一个基本性质的直接结果.

②回忆一下第一章中有关 $H^p(0<p\leqslant 1)$ 的注，那里所写的原子是 (p,∞) 原子，而所得到的空间是 $H_{at}^{(p,\infty)}$，它同古典的实 Hardy 空间 H^p 是一致的. 我们也可以使用 (p,q) 原子来构造 $H_{at}^{(p,q)}(1<q<\infty)$. 所谓 (p,q) 原子 a，是指 $\operatorname{supp}a\subset$ 区间 I 的函数，且满足尺寸条件 $\|a\|_q\leqslant|I|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ 和消失矩条件 $\int a(x)x^k\mathrm{d}x=0$ $\left(0\leqslant k\leqslant\left[\frac{1}{p}-1\right]\right)$. 有关 H^p 原子理论的一个主要结果就是 $H_{at}^{(1,q_1)}=H_{at}^{(1,q_2)}$，对一切 q_1、q_2：$1<q_1<q_2\leqslant\infty$. 但对于空间 B_q，