

ZHOUC
TOUYING

轴测投影

徐宏文

天津大学出版社

内 容 提 要

随着科学技术事业的发展,绘制立体图的要求日益迫切。作者整理过去发表的有关轴测的论文,编成此书,系统论述了轴测理论,是一本有特色有深度的专著。

本书内容包括:投影理论;曲线、曲面以及立体截断、贯穿和相贯问题的作图理论。最后一章是作图法、阴影和润饰。

本书可作为工程制图学研究生、教师的教材或参考书,也可供有关工程技术人员学习参考。

轴 测 投 影

徐 宏 文

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省昌黎县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 12³/₄ 字数 278 千字

1986 年 8 月第一版 1986 年 8 月第一次印刷

印数: 1—3000

统一书号: 15401·3 定价: 2.20 元

前 言

我国早在明代,在宋应星所著《天工开物》一书中,就曾大量使用轴测投影插图。当代国内外科技资料里的立体图,也大多是轴测图。轴测投影对于人们理解和掌握物体形态是十分有利的。五十年代末,苏联学者格拉祖诺夫和切特维鲁新的名著《轴测投影学》问世后,引起人们对轴测理论的探索。1983年我国图学会在济南召开了轴测研讨会,与会同志一致认为,应该切实提高我国的轴测投影水平,以适应“四化”建设的需要。会后出现了不少专业学习班和专业图书,轴测投影正在稳步进入工程实用和理论提高的阶段。

本书以论述轴测理论为主,有以下特点:

- 1.内容取材于作者发表过的十数篇论文,以教材的结构形式编写,供图学工作者使用。
- 2.基本理论一律用画法几何算画结合的方式论述,以便系统掌握。
- 3.一切轴测问题强调以选择投影方向为出发点,不受GB提供的三种固定的轴测投影方法限制。
- 4.考虑实际需要,本书所研究的几何形体除一般画法几何介绍的锥、柱和回转面外,增补了各种螺旋面和各种二次曲面。
- 5.所有图解问题严格遵循尺规作图通则:可解的问题只用直尺和圆规作图,不可解的问题有肯定的分析,绝不“强解”。

简单介绍本书内容如下:

- 1.第一章基本理论有三个主要内容,它们是:
 - a.轴测投影的各种参数关系、计算公式和图解方法。
 - b.在选定投影方向的前提下,使用等测或二等轴测以简化绘图工作的方法。
 - c.强调使用正轴测投影。书中给出了正轴测各种参数的综合图表和此图表的绘制过程。
- 2.第二章曲线曲面。其中:
 - a.曲线部分包括工程常用的各种平面曲线和空间曲线。对二次曲线的轴测投影,有较全面的论述。
 - b.曲面部分包括:锥面、柱面、回转面、二次曲面、螺旋面、盘旋面和螺旋柱面的轴测投影。对各种二次曲面的投影轮廓线都作了算画结合的证明。
- 3.第三章截断、贯穿和相贯问题的轴测投影:
 - a.本章依次研究了上章所举各种曲面的截断、贯穿和相贯问题的轴测投影,着重讲述了二次曲面的有关问题。

b.对于二次曲面,按射影变换把它们归纳成:圆锥、球和单叶等角双曲回转面三种原形。由原形揭示各种二次曲面的截断性质和截断的投影性质用以作为图解各种相交问题的基础。

4.第四章绘图问题包括:画法、阴影和润饰三个问题。有一些几何体和机件的轴测题例。

1983年以来,本书一直是天津大学机械学应用几何硕士研究生的必修教材。1984年曾作为高教部委托天津大学所办制图教师提高班的主要教材。本书可作为图学教师、研究生和一般科技人员学习轴测投影的参考。有不当之处,敬请读者指教。

徐宏文

1986.4.

目 录

前 言

第一章 轴测投影的基本理论	(1)
§ 1 引言	(1)
§ 2 变形系数	(4)
§ 3 轴测轴、轴间角和变形系数的关系	(7)
§ 4 波尔凯 (Pohlke) - 许华兹 (Schwarz) 定理	(13)
§ 5 一般轴测投影的参数图解问题	(16)
§ 6 正轴测投影的参数图解问题	(23)
§ 7 投影方向	(29)
§ 8 等轴测和二等轴测	(33)
§ 9 正轴测投影的参数图表	(39)
第二章 曲线和曲面	(42)
§ 10 引言	(42)
§ 11 一般平面曲线的画法	(44)
§ 12 二次曲线	(48)
§ 13 常用的平面曲线	(55)
§ 14 空间曲线	(60)
§ 15 锥面和柱面	(66)
§ 16 回转面	(68)
§ 17 二次曲面	(79)
§ 18 螺旋面、盘旋面和螺旋线柱面	(89)
第三章 立体表面的截交线、贯穿点和相贯线	(106)
§ 19 锥或柱的截交线	(106)
§ 20 锥或柱的贯穿点	(113)
§ 21 回转曲面的截断和贯穿问题	(116)
§ 22 螺旋面和盘旋面的截交线	(120)
§ 23 二次曲面的截交线	(124)
§ 24 二次曲面的截交线求法	(138)
§ 25 直线和二次曲面的交点	(148)

§ 26 锥面、柱面和锥面与柱面的相贯	(153)
§ 27 二次曲面的相贯	(157)
第四章 有关绘制轴测图样的一些问题	(167)
§ 28 轴测图的画法	(167)
§ 29 轴测图的阴影	(175)
§ 30 轴测图的润饰	(182)

第一章 轴测投影的基本理论

§ 1 引 言

(一) 工程上常用正投影或轴测投影描写物体的形状。两者的目的不同,但所用的方法却是一致的。前者是多面的平行投影;后者是单面的平行投影。例如,图1.1(a)表示物体在 H 、 V 和 W 三个互相垂直的平面上,进行正投影的情况;图1.1(b)是这三个投影平面按规定展开方法的展平结果。这种展平的多面投影图 叫作物体的正投影图。

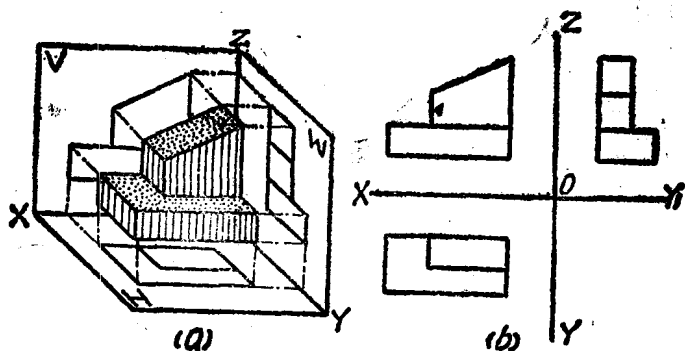


图 1.1

用这种方法,在放置物体或布置投影面时,必须使物体的各主要平面平行于投影平面,使投影反映它们的真实形状以便施工。然而读图时,必须将三个投影联系起来,才能掌握物体的空间形状。因此,读图人必须习惯这种展平作法和具备综合多面投影想象物体形状的能力,才能解决问题。所以正投影图是以便于施工为目的,着重度量性的一种图样,其直观性较差。

图1.2(a)表示同一物体进行另一种平行投影的情况。图中 A 表示投影方向*, F 是投影平面。在选择 A 时照顾了物体表面的更多部分(与正投影图比较),使投影图1.2(b)能够更好地反映整体形状,这就是轴测投影了。这里需要注意:

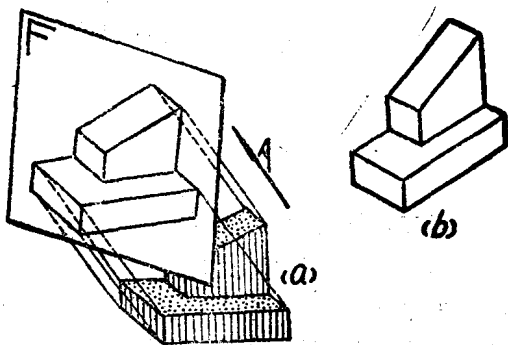


图 1.2

• 按一般习惯投影方向应与观察方向相同。本章为了叙述和图解问题的方便,以视向的相反方向作为投影方向 A 。

1. 图样所表示的物体可见部分仅与投影方向A有关，不受选取投影平面F的限制。因为在选定A后，物体的投影射线束就被确定了。不同的F面只要能截到其中的一条射线，就能截到其余的所有射线。各F面上所成的投影图形，成透视仿射对应，它们所描写的物体可见部分是相同的。由此可见，投影方向A的选择，是决定图样表达能力的主要因素，本章将详细地研究这个问题。选好A后，可以进一步选择F，以便提高图样的直观性和进一步简化绘图工作。

2. 我们知道，平面形的平行投影，只在以下的两种情况下反映实形：

(1) 平面形所在的平面平行F；

(2) 投影方向A垂直于F和平面形之间的分角平面。

所以能否反映实形将取决于F面的位置。然而物体表面上的可见部分不可能完全符合以上情况，为了照顾整体形状，势必要使某些平面形的投影失真（不反映实形）。因此轴测投影的度量性较差，不能作为独立的施工资料。

3. 所谓“整体形状”，毕竟不过是对物体表面上几个比较主要的、有一定说明能力的平面或曲面的描写。单面投影决不可能解决全部的形状问题。例如图1.2(b)就不能反映物体的下、后、右三面。它们可能都是单一的平面，也可能成为另外的形式。然而无论如何图1.2(b)总比图1.1(b)容易理解，因此工程上常将轴测投影作为正投影图的一种辅助图样使用。

总之，轴测投影就是以尽量反映物体的整体形状为目的，利用平行投影法得到的单面投影图。

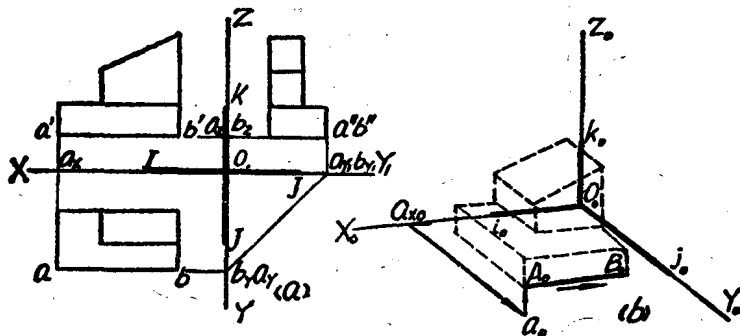


图 1.3

(二) 任何图样（包括中心投影和平行投影）都不是直接通过投影得到的。投影仅是思维过程，作投影图时，要靠人们所掌握的投影规律。例如正投影从度量的角度选取了投影平面H、V和W，因此可以通过各投影所反映的部分实形完成全图。反之，轴测投影要同时照顾物体表面的更多部位，它们一般都不反映实形，因此要利用平行投影的其它规律。最简单的作法就是利用由“直线上三点简比不变”和“平行直线的投影平行”这两个规律所导出的点的坐标概念。例如在图1.3(a)中，取OI、OJ和OK分别为X、Y、Z各轴上的单位测尺，它们等长。 x 、 y 、 z 为点A的三个坐标。即 $x = \frac{Oa_x}{OI}$ ，

$y = \frac{Oay}{OJ} = \frac{a_x a}{OJ}$; $z = \frac{Oaz}{OK} = \frac{a_x a'}{OK}$ 。作图时按选好的投影方向和投影平面，先将坐标轴及各单位测尺的投影求出。在图1.3(b)中， O_0X_0 、 O_0Y_0 和 O_0Z_0 表示各轴的轴测投影，称轴测轴。它们之间的夹角 $\angle X_0O_0Y_0$ 、 $\angle Y_0O_0Z_0$ 和 $\angle Z_0O_0X_0$ 叫做轴间角。习惯上，常将 O_0Z_0 画成铅直线以便符合人们的观察结果。 O_0i_0 、 O_0j_0 和 O_0k_0 是单位测尺的投影。由于 OI 、 OJ 、 OK 等长（笛卡尔直角坐标系），因此以此长度度量 O_0i_0 、 O_0j_0 和 O_0k_0 所得的数值就是各坐标轴的变形系数了。这三个变形系数分别用 a 、 b 和 c 表示之。图1.3(b)中的指标 $O_0 \text{---} i_0j_0k_0$ 既表示轴间角又表示变形系数，称轴测指标。由已知的轴测指标可以作出任一点的轴测投影。例如，为了确定点 A 的轴测投影 A_0 ，可以先定 a_x 的投影 a_{x_0} 。按点线从属关系和直线上三点简比不变的道理，于 O_0X_0 上截 $O_0a_{x_0} = a \cdot x$ (OI)得到 a_{x_0} 。由于 $a_{x_0}I \parallel OY$ ，所以过 a_{x_0} 沿 O_0Y_0 方向引直线 $a_{x_0}a_0$ ，并于其上截 $a_{x_0}a_0 = b \cdot y$ (OJ)可得 a_0 。同法，再过 a_0 引 $a_0A_0 \parallel O_0Z_0$ 并截 $a_0A_0 = c \cdot z$ (OK)可得 A_0 ，这就是点 A 的轴测投影了。点 B 在点 A 的右方，它们之间的连线平行 X 轴，所以由 A_0 沿 X_0O_0 的方向引直线，并于其上截 $A_0B_0 = a(AB)$ 可得 B_0 。这就是 B 点的投影，而 A_0B_0 就是棱线 AB 的投影了。依此类推可以逐点完成整个物体的轴测投影图。由作图方法可以看到这种投影图需要沿轴测量长度，所以叫做“轴测”投影。轴测指标是绘制轴测图的主要依据，因此在进一步研究轴测投影问题之前，必须仔细地弄清其中各参数的各种联系，这是本章所要研究的另一个主要问题。

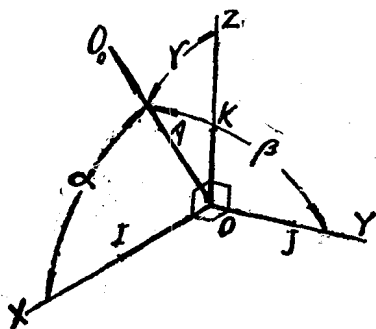


图 1.4

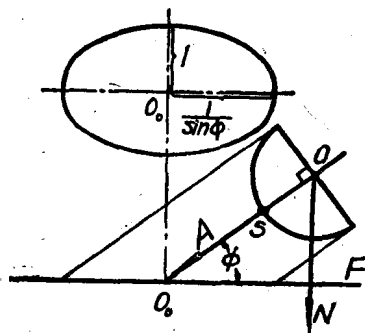


图 1.5

(三) 为了便于作图，在选坐标系时应使各轴平行于物体的主要棱线。选定坐标系后，由原点 O 所引的平行于投影方向 A 的射线 OO_0 (图1.4)，必在为坐标轴所划分的八个卦角里的一个卦角之中。我们规定这个卦角的三条射线（轴）为坐标轴的正方，各轴的顺序（ X 、 Y 、 Z ）按右手原则布置，如图1.4。图中的 α 、 β 、 γ 是 OO_0 对 $O-XYZ$ 的方向角。

按上述规定， α 、 β 、 γ 均不大于 90° ，因此如果固定 OO_0 ，则各单位测尺必均在以 O 为中心， S 为极点的单位半球以内（图1.5）。单位半球的赤道在 F 面上的投影一般成椭圆，椭圆心就是 O 点的投影 O_0 ，而各单位测尺端点 I 、 J 、 K 的投影（ i_0 、 j_0 、 k_0 ）必均在此椭圆的内部。单位测尺的投影长度表示其所在坐标轴的变形系数，所以任何变形系

数的值, 均不大于 $1/\sin\phi$ 。这里角 ϕ 是投影方向 A 与投影平面 F 之间的夹角, 其值不大于 90° 。当 $\phi = 90^\circ$ 时叫做正轴测投影; $\phi < 90^\circ$ 时, 叫做斜轴测投影。显然对于正轴测投影, 图1.5中的椭圆将变成圆, 因此任何变形系数均不大于1。

图1.5中的 ON 表示投影平面 F 的法线。以 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 表示它们对 $O-XYZ$ 的方向角(图中未示)。由图中可以看到它们的值可能大于 90° 但不超过 $180^\circ - \phi$ 。

以上: α, β, γ 说明 A 与 $O-XYZ$ 之间的联系; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 说明 F 与 $O-XYZ$ 之间的联系; ϕ 只表示 A 与 F 间的倾斜情况, 其值由 α, β, γ 和 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 所确定, 所以不是一个独立的参数。当投影方向 A 和投影平面 F 固定以后, 只有唯一的一套轴测指标($O-IJK$ 只有唯一的投影); 反之, 由已知的轴测指标也可以图解投影方向 A 和投影平面 F 的位置, 本章即将详细地研究这些问题。

§ 2 变 形 系 数

(一) 在图2.1中, $O-IJK$ 表示空间的单位测尺组, 其在 F 面上的投影构成轴测指标 $O_0-i_0j_0k_0$ 。各单位测尺的投影长度分别为 X, Y, Z 各轴的变形系数 a, b 和 c 。现在以 OK 为轴旋转 $O-IJ$, 则 OI 和 OJ 将在垂直于 OK 的平面内活动。其端点的轨迹是半个单位圆周, 此半圆周与半球的赤道交于 D, E 两点。半圆周在半球的表面上, 其投影是半椭圆 $D_0i_0j_0E_0$ 。 $D_0i_0j_0E_0$ 与赤道的投影切于 D_0, E_0 两点, 如图所示。

在旋转过程中, OK 不动, 所以变形系数 c 的值不变, 但 a 和 b 却在变化着。然而半圆 $DIJE$ 与半椭圆 $D_0i_0j_0E_0$ 成透视仿射对应, OI 和 OJ 是半圆的一对垂直半径, 因此其投影 o_0i_0 和 o_0j_0 将是半椭圆的一对共轭半径。我们知道, 椭圆两共轭半径长度的平方和是一定值(等于该椭圆两主半径的长度平方和), 因此 $(a^2 + b^2)$ 或 $(a^2 + b^2 + c^2)$ 的值, 在旋转过程中不变。同理, 如果以图2.1所示的位置开始以 OI 或 OJ 为轴旋转 $O-JK$ 或 $O-KI$ 时, 则三变形系数的平方和也是一个定值, 此值就是开始旋转(图2.1)时的 $(a^2 + b^2 + c^2)$ 。所以说: 当 A 和 F 的相对位置固定(即 ϕ 值固定)以后, 三变形系数的平方和是一常数*。

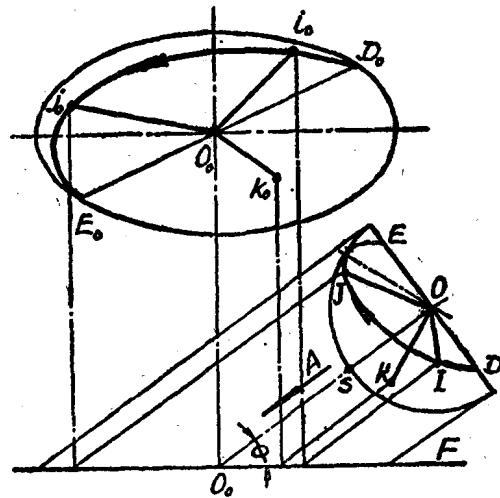


图 2.1

为了确定这个常数, 按上述, 可把 $O-IJK$ 转到任意的位置。最方便的位置就是使

* 此结论的这种证法是1951年10月19日布尔席(М·В·Бурде)在莫斯科画法几何习明纳尔会议上提出的。这个结论的解析证法可参看一般的画法几何或轴测投影教材。

1. 正轴测投影中的等轴测和标准二等轴测 (国家标准中称正等轴测图和正二等轴测图) 两种;

2. 斜轴测中, $a=c=1$, $b=0.5$, $\angle X_0O_0Z_0=90^\circ$, $\theta=45^\circ$ 的一种 (国家标准中称斜二等轴测图)。

(三) 我们知道, 变形系数是一个比值, 要用一定的长度单位把它表示成轴测指标。当所用的长度单位与单位测尺 OI 、 OJ 、 OK 的长度 u 相等时, 轴测图是物体的真正投影; 反之, 若所用长度 $u' \neq u$ 时, 则所得的轴测图是物体真正投影的相似形。然而, 相似形同样能够说明物体的空间形状, 因此轴测指标上的长度单位可以任意选择。

以 u' 和 a 、 b 、 c 按已知的轴间角可以做成轴测指标。用此指标所作的轴测图要较真正投影放大 u'/u 倍。同样, 这一事实也可以换一种说法, 即表示轴测指标的长度还是 u , 而变形系数却是 a' 、 b' 和 c' 。这里 $a' = a \frac{u'}{u}$, $b' = b \frac{u'}{u}$, $c' = c \frac{u'}{u}$ 。由此可见, 每个变形系数的值也有变化的余地, 只要保持 $a' : b' : c' = a : b : c$, 就能保证图样是真正投影的相似形; 但是变形系数 a' 、 b' 、 c' 只能用于绘图, 不能代入 (1) 式计算 ϕ 值。为了方便, 今后我们以 m 表示 a/c 或 a'/c' , 用 n 表示 b/c 或 b'/c' 。 m 、 n 与 a' 、 b' 、 c' 具有同等意义。

以上的作法对于绘图是更为有利的。例如: 对于正轴测中的等测, 可取 $a' = b' = c' = 1$; 对于标准二等测, 可取 $a' = c' = 2b' = 1$ 。这种作法只是将前者的投影放大了 $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1.22$ 倍; 后者放大了 $\frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.06$ 倍而已, 而作图步骤就被大大地简化了 (参看图 1.3 的作图过程)。

(四) 为了进一步研究变形系数的问题, 应该回顾 (1) 式。此式表示坐标系 $O-a^2b^2c^2$ 中的一个平面 P (图 2.3)。 P 与 $O-a^2b^2c^2$ 中的三个坐标轴交成等角。由于 a^2 、

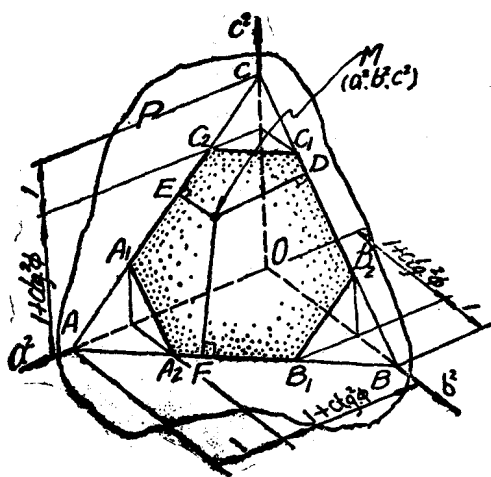


图 2.3

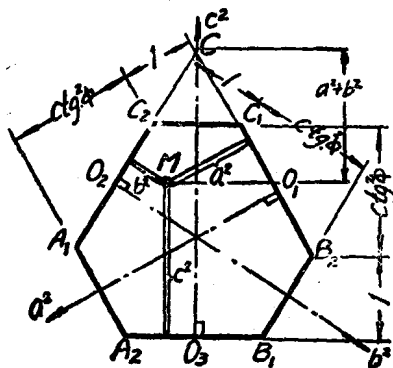


图 2.4

b^2 、 c^2 都是正值，所以 P 面只有被三个坐标平面截成的 $\triangle ABC$ 部分有效。然而任何变形系数均只能 $\leq \frac{1}{\sin\phi} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\phi}$ ，因此 P 面的真正有效区域只是六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 所示的部分。任何合理的（可能存在的）一组变形系数，均对应这个区域里的一点，如 $M(a^2, b^2, c^2)$ 。由图2.3可以看出，由 M 向 B_2C_1 所作之垂线 $MD = a_2 \times \sqrt{\frac{8}{2}}$ ，或 $a^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(MD)$ 。同理 $b^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(ME)$ ； $c^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(MF)$ 。因此只要适当地调整比例尺度，就可以在 P 平面上研究问题了，如图2.4。

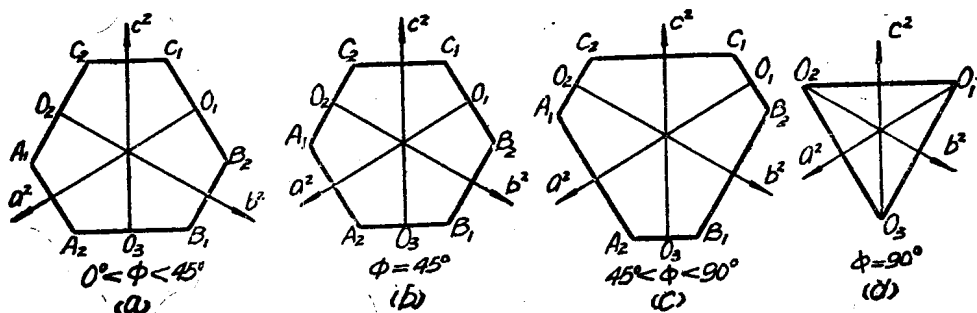


图 2.5

六边形的形状与 ϕ 值有关：当 $0^\circ < \phi < 45^\circ$ 时， C_1B_2 边大于 A_1A_2 边（图2.5(a)）；当 $\phi = 45^\circ$ 时，六边形变成正六边形（图2.5(b)）；当 $45^\circ < \phi < 90^\circ$ 时， C_1B_2 小于 A_1A_2 边（图2.5(c)）；当 $\phi = 90^\circ$ 时（正轴测），六边形变成正三角形（图2.5(d)）。图2.5是按公式（1）绘制的。这里只能说明任何一组合理的变形系数都可以用图中的一点表示。§3将进一步说明六边形中的每一个点都对应一组合理的变形系数，所以有充分的理由用这种图形来研究变形系数的问题。§3中还将说明：对于斜轴测一组变形系数可以对应不同的轴间角组，由变形系数不能确定轴测指标。正轴测则相反。一组变形系数只对应唯一的一组轴间角，可以确定轴测指标，因此可在图2.5(d)的基础上制作正轴测投影的各种参数图表*。关于这一问题详见本章最后一节。

§ 3 轴测轴、轴间角和变形系数的关系

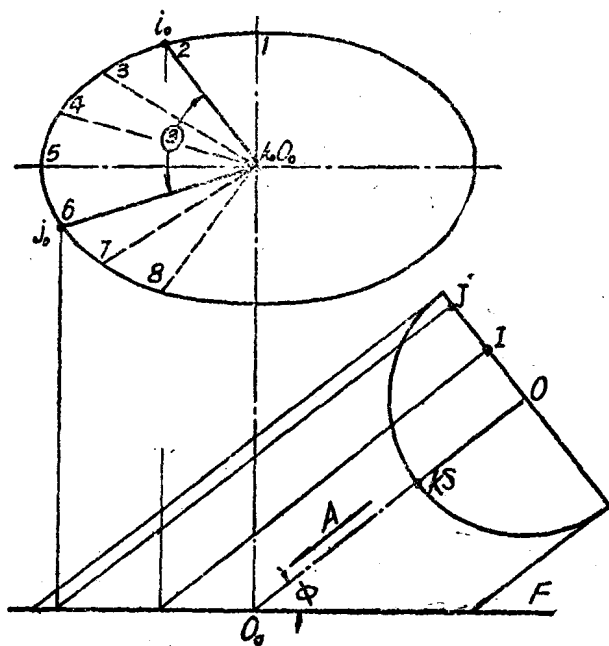
（一）为了研究变形系数和轴间角等各种参数之间的关系，我们仍从图2.1谈起。在下面的说明中：以 $O_0-X_0Y_0Z_0$ 表示坐标系 $O-XYZ$ 在 F 面上的投影（轴测轴），以①、②和③分别表示各轴测轴之间的夹角 $\angle Y_0O_0Z_0$ 、 $\angle Z_0O_0X_0$ 和 $\angle X_0O_0Y_0$ （轴间

* 奥斯特罗夫斯基（А.И.Островский）和布尔席（М.В.Бурде）曾提出了另一种形式的三角形图算表。请参看格拉祖诺夫（Е.А.Глазунов）和切特维鲁新（Н.Ф.Четверухин）所著轴测投影（Аксенометрия）一书§30，1953年版。

角)。在图2.1中变动单位测尺组的空间位置,可以掌握轴测指标的全部情况。由于 OI 、 OJ 和 OK 处于完全平等的地位,因此只以 OK 为例来说明问题。 OK 之端点 K 在单位半球表面的位置,可以分作以下三种:

1. K 与极点 S 重合(图3.1): 这时 OK 与 A 的方向一致,其在 F 面上的投影积聚成点(O_0); OI 和 OJ 在赤道平面上,其端点 I 和 J 的投影在赤道的投影(椭圆周)上。赤道与其投影成透视仿射对应, $OI \perp OJ$, 因此 o_0i_0 和 o_0j_0 是椭圆的一对共轭半径, 如图所示。

如果以 OK 为轴按右手方向旋转 $O-IJ$ 则当 o_0i_0 的长度由1增至 $1/\sin\phi$ (图中的1、2、3、4、5)时, o_0j_0 将由 $1/\sin\phi$ 减至1。这就是图3.2中的直线 B_1A_2 。以 OK 为轴可将 $O-IJ$ 旋转一周,但其后半周是重复的。在旋转 180° 的过程中,轴间角③由 90° 减至某一固定数值($2\text{tg}^{-1}\sin\phi$), 这时 $a=b$, o_0i_0 和 o_0j_0 成为椭圆的一对等长的共轭半



2. K 在赤道上(图3.3): 这时 $OK \perp OO_0$, OI 、 OJ 和 OO_0 三线共面, 而 i_0 、 j_0 和 o_0 三点共线, 所以轴间角③永远是一平角。在这里以 OK 为轴可将 $O-IJ$ 旋转 90° 。旋转过程中: 轴间角①和②均成定值, 它们只与 OK 的位置有关: 而 $o_0 i_0$ 和 $o_0 j_0$ 的长度却在变化着。 $o_0 i_0$ 由 $o_0 D_0$ 减到零的过程, 正是 $o_0 j_0$ 由零增到 $o_0 E_0$ 的过程, 反之亦然。由于

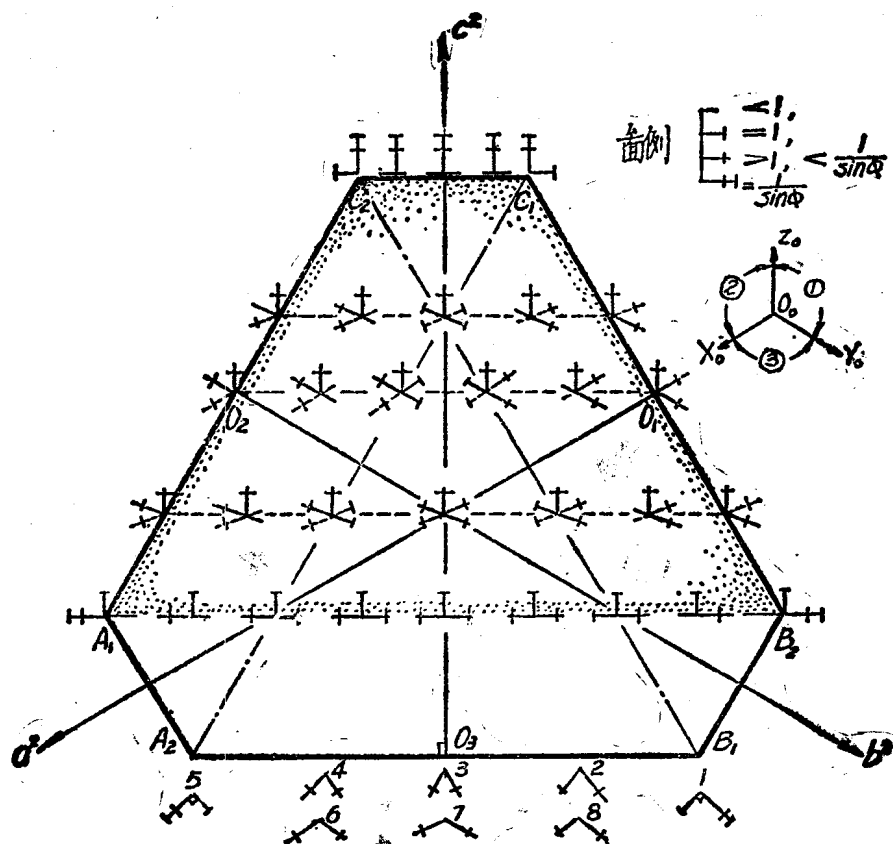


图 3.2

$OD \perp OK$, 它们是赤道的一对垂直半径, 而赤道与其投影(椭圆周)成透视仿射对应, 因此 $o_0 k_0$ 和 $o_0 D_0$ 是椭圆的一对共轭半径。轴间角②与图3.1中的③处于同等地位, 其值仅与 OK 的位置有关。

图3.2中的等腰梯形 $A_1 B_2 C_1 C_2$ 及其边界表示 K 在赤道上活动的全部情况。同理, 等腰梯形 $B_1 C_2 A_1 A_2$ 及其边界表示 I 在赤道上活动的全部情况; 等腰梯形 $C_1 A_2 B_1 B_2$ 及其边界表示 J 在赤道上活动的全部情况。所以六边形中的每一个点都对应于一个单位测尺在赤道上其余两测尺的投影重合成直线的某一位置, 然而两轴测轴重合时, 物体平行于其对应坐标平面的平面, 将积聚成直线, 因此也不能使用。

3. 当 K 不与极点重合, 同时也不在赤道上(图3.4)时, 轴测轴一般成为相交于一

点 (o_0) 的三条直线。说明任何平行于坐标平面的平面，在 F 上的投影均无积聚性。这是绘制轴测图的首要前提。因此必须对图 3.4 进行比较详细的分析。

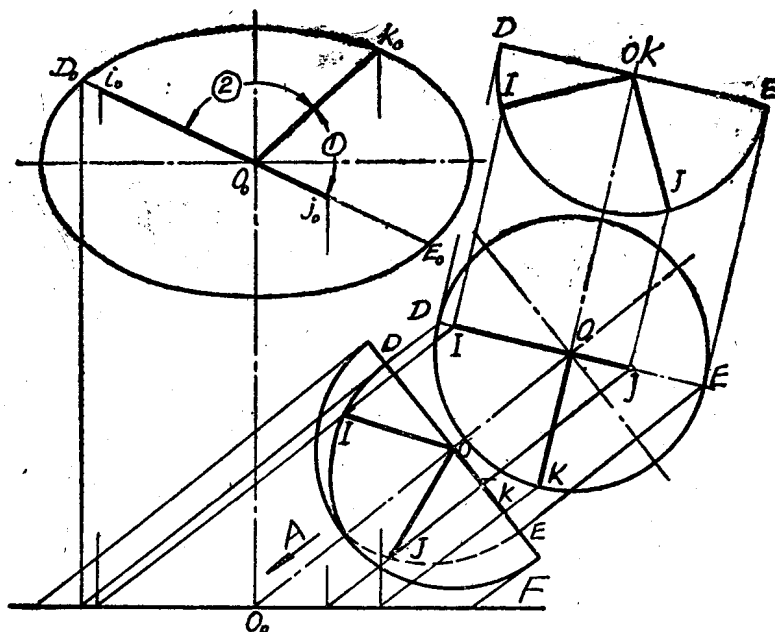


图 3.3

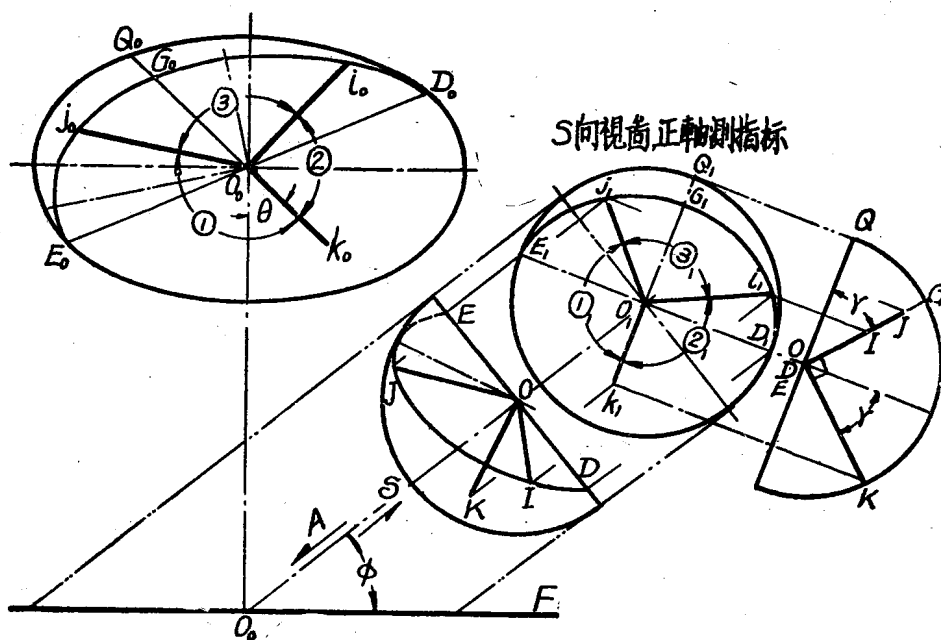


图 3.4

(二) 在图3.4中可以看到:

1、 $O-IJK$ 在赤道平面上的投影 $o_1-i_1j_1k_1$ 是以 A 为投影方向的正轴测指标。在这里:

(1) 半圆 $DIJE$ 与半椭圆 $D_1i_1j_1E_1$ 对应。 OI 、 OJ 是半圆的一对垂直半径。所以 o_1i_1 和 o_1j_1 是半椭圆的一对共轭半径。

(2) 半圆 $DIJE$ 与赤道平面交于直径 DE 。按直线垂直平面的正投影规律, 我们有 $o_1k_1 \perp D_1E_1$ 。即 o_1k_1 应在共轭半径 o_1i_1 和 o_1j_1 所确定的椭圆短主轴中。

(3) 设 γ 为 OO_0 与 OZ 之间的夹角(方向角), 则 o_1k_1 的长度为 $\sin\gamma$, 而半椭圆 $D_1i_1j_1E_1$ 的短半径 o_1G_1 应为 $\cos\gamma$ 。所以 o_1k_1 与半椭圆的焦距等长。

(4) 若以 OK 为轴旋转 $o-IJ$, 则 o_1i_1 将由 O_1D_1 转至 O_1G_1 , 而 o_1j_1 将由 O_1G_1 转至 O_1E_1 。由此可见轴间角 $\angle i_1o_1j_1$ 不小于 90° 或大于 180° 。当此角等于 90° 或 180° 时, 则成为图3.3所示的情况了。对于其它两轴间角也是如此。总之: 正轴测投影的轴间角必须是小于 180° 的钝角。或者说: 任一测尺的投影(如 o_1k_1)必在其余两测尺投影(如 o_1i_1 、 o_1j_1)之间所夹大于 180° 的角度之内。

这个结论的前提是方向角 α 、 β 、 γ 均不大于 90° (见§1(三)中的规定)。如方向角超出此范围时, 轴间角的值将不受这种限制(见§4)。这种情况只相当于在第一卦角以外选择了投影方向。如果将此卦角“当作”第一卦角, 则某些测尺要逆向引长, 其结果又回到了上述结论。

(5) $\triangle i_1o_1j_1$ 是 $\triangle IOJ$ 的正投影。其面积与 OO_0 和 OZ 之间的夹角 γ 有关。即:

$$\triangle i_1o_1j_1 = (\triangle IOJ) \cos\gamma = \frac{1}{2} \cos\gamma$$

或

$$a_1 \cdot b_1 \sin\textcircled{3}_1 = \cos\gamma$$

同理

$$b_1 \cdot c_1 \sin\textcircled{1}_1 = \cos\alpha$$

$$c_1 \cdot a_1 \sin\textcircled{2}_1 = \cos\beta$$

(3)

这里 a_1 、 b_1 、 c_1 和 $\textcircled{1}_1$ 、 $\textcircled{2}_1$ 、 $\textcircled{3}_1$ 分别表示正轴测投影的变形系数和轴间角。

(6) 关于正轴测投影变形系数和轴间角的其它关系详见本节(三)。

2、 $O-IJK$ 在 F 面上的投影是一般斜轴测的指标 $O_0-i_0j_0k_0$ 。 F 面上的图形与赤道平面上的图形成透视仿射对应。因此可按这种对应的性质将正轴测的一些结论由赤道平面引申到 F 面, 从而得到斜轴测投影的一些相应的结论。例如:

(1) O_0i_0 和 O_0j_0 是椭圆 $D_0i_0j_0E_0$ 的一对共轭半径。

(2) D_0E_0 是半椭圆 $D_0i_0j_0E_0$ 与椭圆 $O_0-D_0Q_0E_0$ 的公共直径。两椭圆于 D_0 、 E_0 两点相切, O_0k_0 平行它们的公共切线。

$$(3) \quad Q_0O_0 : G_0O_0 : O_0k_0 = Q_1O_1 : G_1O_1 : O_1k_1$$

$$= 1 : \cos\gamma : \sin\gamma \quad (4)$$

或

$$(Q_0O_0)^2 = (G_0O_0)^2 + (O_0k_0)^2 \quad (5)$$

(4) 任何轴间角不大于 180° , 任何测尺的投影必在其余两测尺投影之间所夹大