# 奥林匹克

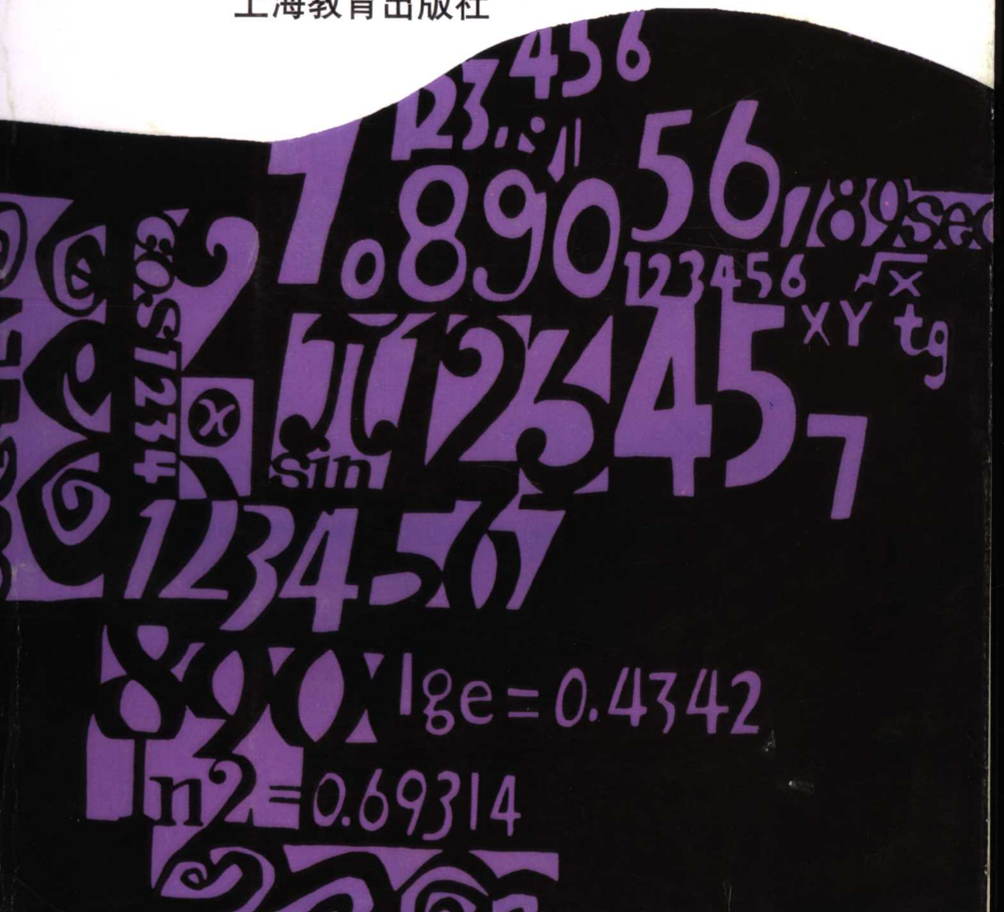
## 数学教育的理论和实践

冯跃峰　编著

AOLINPIKE

SHUXUE JIAOYU DE LILUN HE SHIJIAN

上海教育出版社



# 奥林匹克

## 数学教育的理论和实践

上海教育出版社

# 奥林匹克
## 数学教育的理论和实践

AOLINPIKE
SHUXUE JIAOYU
DE LILUN
HE SHIJIAN

冯跃峰　编著

上海教育出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

奥林匹克数学教育的理论和实践 / 冯跃峰著. —上海：上海教育出版社，2006.1
ISBN7-5320-9981-4

I.奥... II.冯... III.数学课-中小学-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第005496号

**奥林匹克数学教育的理论和实践**

冯跃峰 编著

上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号 邮编：200031）

各地新华书店经销 上海颛辉印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 12.5 插页 2 字数 338,000

2006年1月第1版 2006年1月第1次印刷

印数 1－5,000本

ISBN 7-5320-9981-4/O·0038 定价：21.00元

## 作者介绍

冯跃峰，特级教师，中国数学奥林匹克高级教练，深圳市学科带头人。曾参加中国东南数学竞赛、中国西部数学竞赛命题，获“九章”优秀试题奖。在省级以上刊物发表论文170余篇，其中在美国、英国、台湾等地发表7篇，出版专著8本。总结出数学教育的3个基本模式：数学学习模式、数学思维模式、数学创造模式，培养2名学生在国际数学竞赛中获得金牌，十多人（其中深圳2人）在全国数学冬令营获得金、银牌，数十人获得全国高中数学联赛一等奖。曾获长沙市“十佳中青年教师”，湖南省“金牌教师”，中国教育基金会“孺子牛金球奖”。曾受到中央电视台《变化中的中国》栏目组专访报道。

# 前　言

我国自1985年参加中学生国际数学奥林匹克(IMO)以来,已取得了举世瞩目的成绩. 1989年,我国中学生代表队首次获得团体总分第一,特别是1990年在我国北京首次成功地举办了第31届IMO,并再一次摘取桂冠,她标志着我国已成为国际数学奥林匹克的强国. 近几年来,我国中学生参加国际数学竞赛的成绩一直保持着领先地位,数学竞赛的高潮已在全国范围内兴起,而且已成为国人瞩目的热点之一. 为了保证我国中学生在国际数学竞赛中保持长胜不衰的势头,使数学奥林匹克活动不断深入、持久、健康地发展下去,有必要对数学奥林匹克进行系统的研究,以形成科学的理论,指导数学奥林匹克的实践. 这是一个内容丰富而深邃的科研课题,有广泛的研究领域. 她需要广大奥林匹克数学工作者共同为此付出艰辛的努力. 本书仅仅是作者从事这一研究的肤浅体会,权作抛砖引玉.

本书较全面地论述了奥林匹克数学的概念、内容、方法、特点、命题和教育等方面的问题,提出了一些新的初步的观点,以求教于专家、读者.

尽管作者潜心于奥林匹克数学研究,但限于课题的难度以及个人的学识浅薄,其中谬误在所难免. 敬请专家、读者不吝指正.

冯跃峰

2005年5月于深圳高级中学

# 目　　录

# 第一章 绪 论

奥林匹克数学是新近产生的一个数学概念.

在科学技术日益发达的今天，世界各国都越来越重视科技人才的培养. 作为一切科学的基础——数学，已越来越显示出它的重要性. 数学奥林匹克，作为一种全球性的群体智力活动，在发现和培养人才中发挥着重要的作用，因而受到世界各国的重视和积极参与. 与此同时，奥林匹克数学的研究，也就成了数学奥林匹克工作者的一个重要研究课题.

研究奥林匹克数学，首先要对数学奥林匹克活动及奥林匹克数学内容有比较全面的了解. 对此，我们从三个方面加以阐述.

## 1.1 数学奥林匹克

数学奥林匹克，俗称数学竞赛，它是一种有组织的、在规定时间之内进行的解数学题的竞赛；是人类智慧的灵活、力量与完美的较量.

最初的数学竞赛是民间自发进行的一些解数学难题的比赛. 最早进行这项活动的要算古希腊. 公元前 2000 年，东方国家开始出现有文字记载的数学，巴比伦人积累了大量的资料，按当今的分类大体属于初等数学的范畴. 数学作为近代意义的科学直到很久以后才在古希腊开始形成. 波斯王朝时期，希腊人开始与东方人进行接触，它促成希腊人熟悉巴比伦人在数学和天文学上的成就. 不久，在希腊的城邦中，以数学为主题的哲理探讨便蓬勃发展起来，并开始组织一些解数学难题的挑战. 其中最富有吸引力的是一些几何作图难题的求解. 如著名的三大几何难题：化圆为方问题、倍立方体问题、三等分角问题，就是当时讨论最热烈的问题之一. 这些活动可以看作是最早的数

学竞赛.

在16世纪的欧洲,解方程是数学的核心问题,它当然也就是当时的解难题比赛的主要内容. 1530年,意大利自学成才的著名数学家塔格利亚(N. Tartaglia)在一次应战中解出了这样两个三次方程:$x^3+3x^2=5$, $x^3+6x^2+8x=1\ 000$. 但对其解法秘而不宣. 当时的数学家菲奥尔(A. M. Fior)得知后,心中不服,他和塔格利亚商定,于1535年2月22日在米兰市大教堂进行公开比赛. 双方各出30个三次方程,其中包括形如:$x^3+mx=n$的方程. 不到两小时,塔格利亚宣布解决了所有的方程,而菲奥尔却一筹莫展,一个方程也未解决. 从而塔格利亚以30∶0的绝对优势赢得这场比赛. 这是一场闻名世界的数学对抗赛,它把解数学难题的比赛推向了一个新的阶段.

后来,塔格利亚把解形如$x^3+mx=n$的方程的方法告诉了卡丹(Cardan),而一般的三次方程:$ax^3+bx^2+cx+d=0$只要通过一个平移变换:$x'=x-\frac{b}{3a}$即可化为这种方程求解. 塔格利亚一再交代卡丹保守秘密,但卡丹不守信用,将其方法公布于众,这就是后来人们熟悉的所谓"卡丹公式". 这些活动,可以看作是早期的非正式的数学竞赛.

早年的数学竞赛还包括一些著名的有奖征解. 费马(Fermat)是法国的一名律师,但他也是一名数学爱好者,一生中获得了许多著名的结果. 1670年,费马的儿子在整理他父亲的遗物时,偶然发现在一本丢番图的著作《算术》上,他父亲于1637年在"将一个平方数分解为两个平方数的和"这一命题旁边,用拉丁文写下了如下的一段批注:

"将一个正整数的立方表示为两个正整数的立方的和;将一个正整数的4次方表示为两个正整数的4次方的和;或者一般地,将一个正整数的高于2次的幂表示为两个正整数的同次幂的和,这是不可能的. 对此,我确信已经找到了一种美妙的证法,可惜这里空白的地方太窄,无法把它写下."

上述结论可简单地表示为:"对大于2的自然数,方程$x^n+y^n=z^n$

无正整数解”.

费马的上述一段批注，引起了人们的极大兴趣，许多数学家为重新得到它的证明，不知付出了多少艰辛的劳动，但都毫无结果. 于是人们非常希望知道费马究竟是如何证明的. 大家找遍了他留下的所有书籍、手稿、信件，希望能看到那个“美妙的证明”，但只找到了他对 $n=4$ 的证明的概要. 此后，费马的批注一直是人们无法解开的数学之谜. 不知从何时起，人们将费马批注中的结论称为费马大定理.

1779 年，著名的数学家欧拉(Euler)首次吹响了进军费马大定理的号角，他证明了 $n=3,4$ 时，费马大定理成立. 此后，与费马大定理有关的一些结果不断涌现：1823 年，法国数学家勒让德(Legendre)证明了 $n=5$ 的情形；1831 年，一位自学成材的法国女士索菲亚证明：若 $x,y,z$ 互质，则当 $n$ 为小于 100 的质数时，费马大定理成立；此后，1840 年，法国数学家勒贝格又证明了 $n=7$ 的情形；1849 年，德国数学家库默尔(Kummer)进一步证明了：$n$ 为小于 100 的自然数但不等于 37，59，67 时，费马大定理成立.

200 多年的漫长岁月，使人们意识到这个问题看似简单，实则深邃. 尽管人们获得了不少结果，但离费马定理的彻底解决却是多么遥远！1850 年和 1853 年，法国科学院先后两度悬赏两千法郎，征求对费马大定理的一般证明. 消息一传出，数学家们群情振奋，试图在此问题上有所收获. 但虽经不懈努力，却久攻不破，大家慢慢地都失去了以往的热情. 为了激励人们奋起攻坚，1908 年，德国哥廷根科学院再次悬赏十万马克，向全世界征求此定理的彻底证明，并限期 100 年. 从那时起，不知有多少数学家为此而奋斗，但都未能获得成功. 1944 年，这一问题有了较大的进展，尼可(C. A. Nicol)等人证明：$n<4\,002$ 时，费马大定理成立. 到 19 世纪 70 年代末，人们借助大型计算机证明了 $n<125\,000$ 时，费马大定理成立. 但这些工作都只能算是验证，而不是“证明”. 令人感到惊奇的是，20 世纪的数学大师德国哥廷根大学教授希尔伯特居然声称自己找到了打开费马大定理这一神圣殿堂之门的钥匙，但他又同时声明：留着这个问题比解决这个问题

更有意义，因为它更能促进后人对数学的开拓创新. 希尔伯特的表白，使费马大定理又增添了神秘的色彩，它留给了人们一个同样的谜.

第一个接近费马大定理的结论是：方程 $x^n+y^n=z^n$ 最多有有限个正整数解. 他是由西德一位年仅 29 岁的大学讲师法尔丁斯(G. Faltings)给出的. 这一结果在国际数学界引起了很大的反响：人们称之为"本世纪解决的最重要的问题，至少对数论来讲，已达到本世纪的顶峰."尽管如此，这离问题的"彻底解决"还有一段遥远的距离. 第一个宣称证明了费马大定理的是日本东京大学的宫冈誉市教授，他在 1988 年公开了自己的证明，但没有得到人们的认可. 直到 1993 年，年方 40 的英国数学家安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)终于给出了费马大定理的一般证明，这一成果被称为 1993 年世界科学十大成就之一. 不过人们后来发现他的证明中的某些细节上似乎还存在漏洞，1994 年，怀尔斯终于补正了原来的漏洞，他的长达 108 页的论文在美国《数学年刊》41 卷第 3 期上发表，这期杂志仅刊登了怀尔斯的一篇论文！开创了一期杂志只有一篇论文之先河. 这一成就被认为是"20 世纪最重大的数学成就"，怀尔斯也因此获得沃尔夫数学奖.

上述寻求费马大定理证明的曲折过程，实质上就是一场不限时域的无形的数学竞赛.

正式有组织的现代数学竞赛是在 19 世纪从匈牙利开始的. 1894 年，匈牙利数学物理学会通过一项决议，为中学生举办数学竞赛，并于当年举办了首届匈牙利中学生数学竞赛.

由于匈牙利组织中学生进行数学竞赛获得成功，因而对世界各国产生了积极的影响. 其中受影响最快的算是罗马尼亚，它是继匈牙利之后第二个举办中学生数学竞赛的国家. 该国于 1902 年举办了首届中学生数学竞赛. 但此后到其他国家相继举办数学竞赛却时隔了 30 多年，直到 1934 年前苏联列宁格勒举办中学生数学竞赛后，世界上许多国家才争相效仿. 随着时间的推移，举办数学竞赛的国家不断涌现，下面是有关各国开始举办中学生数学竞赛的年份时间表：

| 年份 | 国家 |
|---|---|
| 1894 | 匈牙利 |
| 1902 | 罗马尼亚 |
| 1934 | 前苏联列宁格勒 |
| 1935 | 前苏联莫斯科 |
| 1938 | 美国普特南数学竞赛 |
| 1949 | 波兰 |
| 1950 | 保加利亚，南斯拉夫 |
| 1951 | 捷克斯洛伐克 |
| 1956 | 民主德国，中国北京、天津、上海、武汉 |
| 1958 | 加拿大，印度 |
| 1961 | 全俄，瑞典 |
| 1962 | 前苏联，荷兰，意大利，越南，古巴 |
| 1963 | 蒙古，卢森堡 |
| 1964 | 西班牙 |
| 1965 | 英国，芬兰，阿根廷，比利时 |
| 1967 | 全苏 |
| 1968 | 以色列 |
| 1969 | 希腊 |
| 1970 | 奥地利，联邦德国 |
| 1976 | 澳大利亚 |
| 1978 | 中国八省 |
| 1983 | 美国数学邀请赛 |

近年来，还出现一些地域性的数学竞赛，比如：奥地利—波兰数学竞赛(1982)，由希腊、罗马尼亚、保加利亚参加的巴尔干数学竞赛(1984)，由丹麦、冰岛，挪威、芬兰、瑞典共同举办的斯堪德那维亚地区数学竞赛(1986)以及由埃及、利比亚、突尼斯、阿尔及利亚、摩洛哥参加的马格里布地区数学竞赛(1986)。

下面简要介绍几个主要国家的国家级数学竞赛的情况.

1. 匈牙利数学竞赛

上面已经提到,匈牙利数学竞赛是世界上具有最早历史的数学竞赛.它自1894年创办以来,每年都举办一次,其中仅因两次世界大战中断了6年和1956年匈牙利事件中断了1年.每年都在10月份举行,每次竞赛共3道题,限4小时完成.考试中允许使用任何参考书.这些数学竞赛为匈牙利选拔了不少优秀人才,有些成了世界著名学者.比如:1897年的金牌得主利波特·费叶尔(L. Fejer)在复变函数与傅里叶级数方面做了许多卓越的工作,被誉为匈牙利现代数学之父;1898年的优胜者忒奥多耳·冯·卡门(T. Von. Karman),后来成了现代航天动力学的奠基人,我国著名科学家钱学森、钱伟长、郭永怀等都是他的学生.1903年的金牌得主阿尔伏瑞德·哈尔(A. Harr),提出了哈尔测度、哈尔积分,为测度理论的发展做出了贡献.1904年的金牌得主马赛尔·黎兹(M. Riesz),在泛函分析中提出了黎兹凸性定理.1912年的金牌得主舍苟(G. Szego),在逼近论方面的贡献引人注目,他和著名数学家波利亚(G. Pōlya)合著的《分析中的定理和问题》至今仍享有盛誉.其他如寇尼希(D. König)、拉多(T. Radó)等都是世界著名数学家.

匈牙利数学竞赛对世界各国数学竞赛以及国际数学竞赛的影响和贡献是不言自喻的.比如,每年一次的竞赛周期就被后来的各国数学竞赛及国际数学竞赛采用.匈牙利数学竞赛试题,从形式到内容都对后来世界各国的数学竞赛命题产生了很大的影响:题目生动有趣,不涉及过多的知识,只需利用初等的方法就可解决,但问题又常常含有深刻的数学背景,着重考查学生的数学思维能力等.特别是还有不少竞赛试题,经过改造,演变,发展后就成为其他国家数学竞赛乃至国际数学竞赛中的试题.

2. 前苏联数学竞赛

前苏联是数学竞赛大国,也是开展数学竞赛活动最早和最广泛的国家之一.据文献记载,早在1886年,当时的俄罗斯帝国便已举办过数

学竞赛，但没有持续下来.因而当今人们仍把举办正式数学竞赛的发源地归于匈牙利.前苏联的具有延续性的数学竞赛开始于 20 世纪 30 年代. 1934 年，在著名数学家 B・H・狄隆涅教授主持下举行了首届列宁格勒数学竞赛，并把此次数学竞赛定名为数学奥林匹克.因此，苏联是最早将数学竞赛与体育比赛相提并论的国家.由于数学竞赛与体育比赛有许多相似之处：两者都提倡参与，重在普及；竞赛的目的都是为了激发人的不断开拓创新的进取精神以及百折不饶，奋力拼搏的意志力与创造力.两者的不同仅在于：一是思维和智慧的竞赛，另一是体力和技巧的较量，因此，数学奥林匹克一提出来就得到人们的认同.后来的许多数学竞赛都采用了这一名称.

列宁格勒数学竞赛每年都举行一次，它带动了数学活动在全苏范围内的开展. 1935 年，莫斯科举办了第一届数学竞赛，以后除第二次世界大战中断三年外，每年都举行一次.莫斯科数学竞赛试题许多都出自名家之手，如前苏联科学院院士、莫斯科大学教授 A・H・柯尔莫戈洛夫，不仅指导命题工作，而且还经常亲自审定甚至提供试题，在他深刻的数学思想的影响下，莫斯科数学奥林匹克试题，不仅形式上生动活泼，而且往往具有较深的数学思想方法背景.

莫斯科和列宁格勒两市的数学竞赛，是前苏联最富有特色、最引人注目的竞赛活动.从这两个市的数学竞赛中产生出来的城市代表队，每年都以独立的身份参加全苏数学竞赛，同来自其余 14 个加盟共和国的代表队及俄罗斯联邦的其他地区联队进行角逐.当然，以独立身份参加角逐的，还有来自各数学物理专门学校的代表队.

前全苏数学竞赛的前身是全俄数学竞赛，它开始于 1961 年，当时的全俄数学竞赛实际上已具有全苏的性质，因为参加的代表队除俄罗斯各州外，前苏联的大多数加盟共和国都派队参加. 1967 年，前苏联教育部成立了全苏数理化奥林匹克中央组委会，主持数理化奥林匹克工作.从这年起，全俄数学竞赛正式命名为“全苏数学奥林匹克”.全苏数学奥林匹克是前苏联最高层次的数学竞赛，它是在各加盟共和国各自的数学竞赛基础上分别组队参加的数学竞赛.在全苏数学奥林匹克之

后，还有为IMO选拔国家队队员而举办的全苏数学冬令营和培训这些选手而举办的数学夏令营.数学冬令营在每年元月举办，为期一周，数学夏令营则在六月至七月举办，为期一个月.这些培训，对前苏联代表队进军IMO起着极其重要的作用.苏联解体后，全苏数学竞赛不复存在，又还原成以前的全俄数学竞赛.这时的竞赛，才真正是在全俄范围内进行的“全俄数学竞赛”.

3. 美国数学奥林匹克

美国是世界上公认的超级大国，在数学竞赛上，他们在国际上的影响也是较大的.与别的国家不同，美国最先举行的数学竞赛不是中学生数学竞赛，而是大学生的数学竞赛.1938年，美国数学学会举办了首届由大学低年级学生参加的“普特南数学竞赛”(Putnam M.C.).每次竞赛在一天内完成，竞赛分两试，上午下午各赛一试，每试6－7题，用3小时完成.试题有一部分内容涉及到大学一二年级课程，但有相当一部分内容是初等数学问题，因而普特南数学竞赛对美国中学生数学竞赛产生很大的影响.

美国具有周期性的中学生数学竞赛是从1950年开始的，至今已有五十多年的历史.现在，美国中学生数学竞赛已发展成如下的三个层次：

(1) 美国高中数学竞赛(AHSME).它是美国最低层次的数学竞赛，这一竞赛开始于1950年，由美国数学协会(MAA)举办.第一届参加的人数很少，只限于纽约和哥伦比亚特区.直到1957年，这种数学竞赛才纳入国家方案，逐步发展成全国性数学竞赛，参赛人数逐年增多.1960年参加的人数达15万；到1972年，参加的人数却超过35万.现在，这一竞赛除美国本土的学生参加外，还有来自加拿大，澳大利亚，英国，爱尔兰，卢森堡，比利时，匈牙利，意大利等国的选手，使这一竞赛基本成为一种具有国际意义的数学竞赛.在1985年，有来自世界各地的5 917所学校的38万多中学生参加这一竞赛活动.对于非美国的其他国家参赛学生，其试卷都由美国寄出，由各参赛城市在规定的时间内自己组织学生参赛.1983年，我国北京、上海市也有学生参加了这一竞

赛.在 1986 年我国又有天津等市中学生参加了这一竞赛.

AHSME 在每年的二、三月举行.在 1974 年以前,每届竞赛共有 50 道题,从 1974 年开始改为 30 道题,一个半小时内完成.试题完全采用选择题的形式,其提问简洁、巧妙,设计精细.每道题有 5 个选择支,其中恰有一个正确选择支.考试范围则基本上以中学课程内容为准,但覆盖面广.全卷大致可以分为前后两个部分,其前部分主要是考查学生对有关数学的基本概念、简单运算、变形技巧等的掌握,而后部分考查的则是学生灵活运用数学知识、方法的能力及数学的探索创造力,颇具竞赛味道.自 1986 年起,AHSME 就一直采用比较独特的评分方法:某题答对,该题得 5 分;某题答错,该题得 0 分;某题不答,该题得 2 分.尽管采用的都是选择题,但试题还是有一定的难度,要得满分是比较困难的.据统计,从 1950 年到 1959 年的前 10 届竞赛中,得满分(150 分)者仅有 3 人.每届 AHSME 的优胜者(100 分以上)都被美国数学会载入光荣册,并作为大学录取的参考依据.

(2) 美国数学邀请赛(AIME).它是美国中间层次的数学竞赛,这一竞赛始于 1983 年,它是 AHSME 的基础上,邀请成绩在 100 分以上的学生参加的数学竞赛.它在 AHSME 结束后的一个月左右举行.

最初的 AHSME,其主要任务就是选拔 100 名左右的选手参加美国数学奥林匹克(USAMO),因此,AHSME 实际上就是美国数学奥林匹克的资格赛.但因试题全部采用选择题,其选拔存在某种局限性.于是,从 1983 年起,在美国高中数学竞赛与美国数学奥林匹克之间增加了一个美国数学邀请赛.

AIME 由美国数学会组织命题,试题全部是简答(填空)题,考生只须直接写出最后结果.且每个题的答案均是不超过 999 的正整数.试题涉及的范围广泛,内容新颖别致,要求考生具有一定的逻辑推理能力,灵活的思维能力和较强的空间想像能力.试题有一定的梯度,前几题较容易,后面的题则较难.每次考试共 15 个题,要求在两个半或三小时内完成.每题填对得 1 分,填错或不填得 0 分.凡在 AIME 中得 8 分以上者将取得公认的 AIME 证书.AIME 中的优胜者才有资格参加两个月