请交还

气象统计预报讲义

中国人民解放军空军第三专科学校

一九七四年二月

马 克 思 语 录

在科学上面是没有平坦的大路可走的，只有那在崎岖小路的攀登上不畏劳苦的人，有希望到达光辉的顶点。

恩 格 斯 语 录

……；被断定为必然的东西，是由纯粹的偶然性构成的，而所谓偶然的东西，是一种有必然性隐藏在里面的形式，如此等等。

列 宁 语 录

我们不需要死读硬记，但是我们需要用基本事实的知识来发展和增进每个学习者的思考力，因为不把学到的全部知识融会贯通，共产主义就会变成空中楼阁，就会成为一块空招牌，共产主义者也只会是一些吹牛家。你们不仅应当领会你们学到的知识，并且要用批判的态度来领会这些知识，使自己的头脑不被一堆无用的垃圾塞满，而能具备现代有学识的人所必备的一切实际知识。

毛主席语录

你们学自然科学的，要学会用辩证法。

在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。

胸中有“数”。这是说，对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析。任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量。

要自学，靠自己学。

目　　录

第一章　概率统计基础

“人的认识物质，就是认识物质的运动形式”[①]。人们对大气运动规律的认识，长期以来存在着两种基本观点。一种认为：大气运动规律是确定的，只要观测资料足够多，根据流体力学和热力学的原理，对大气运动进行数学描述，借助于大型数字电子计算机的计算，做出天气预报，这就是流体力学数值预报。另一种观点则认为：天气现象不是完全确定的而是随机的，即使观测资料足够多，也不能把大气过程完全描写出来，因而必须应用数理统计的方法预报未来天气出现的可能性，这就是概率统计预报。概率统计预报法有客观定量、能预报具体的天气（如降水、云高、能见度、大风等）之优点。随着概率统计预报的发展，人们还有可能通过对大气运动的统计规律的了解，进一步增进、加深对大气动力学规律的认识，促进数值预报和天气学预报方法的发展。

为了学好后续各种统计预报方法，首先必须对此种预报方法直接需要的数学工具——概率论与数理统计的基本知识有所了解。本章正是为此目的而编写，专门介绍概率统计的基本概念和运算法则，其内容共分基本概念和基本定理，随机变量及其分布函数，随机变量的数字特征，统计假设检验等四个部分。

第一节　基本概念和基本定理

一、事件和概率

（一）事件、事件的种类

在大气中有各种各样的天气现象：如夏半年冷锋过境可能出现雷暴；强寒潮入侵时可能引起霜冻；盛夏副热带高压脊控制时会有酷热等等。这些现象在概率统计中常被称为事件。事件是概率论中最基本的概念，它是指在一定的条件下，在试验（观测）的结果中所有可能出现或可能不出现的各种现象之统称。一种现象发生我们就叫一个事件发生，所以说事件与现象是一个意思、一回事情。自然现象或事件的出现、发生是各式各样的，为了研究各种现象或事件的规律性，常常把事件分为下列三种类型：

1．必然事件（U）：

在进行一项试验（观测）之前，如果我们可以断定某一现象必定会在试验（观测）结果中出现，我们就把这一类现象称为必然事件。换句话说，在一定的条件下，不可避免地要发

---

① 《矛盾论》，《毛泽东选集》（合订一卷本），人民出版社1967年11月64开横排本（下同），第283页。

生的事件叫必然事件。用符号U表示之。

如在标准大气压力下，水加热到$100°C$时，必然会沸腾；又如某平原测站在受到寒潮侵袭时，气温必然会下降等等，都是必然事件。

2．不可能事件（V）：

如果在进行一项试验（观测）之前，我们可以断定某一现象决不会在试验（观测）结果中出现，则称这种现象为不可能事件。换句话说，在一定的条件下，必然不会发生的事件叫不可能事件。用符号V表示之。

如在总云量为0的条件下，决不会有连续性降雨现象出现；又如某地在同一天里同时出现当年的极端最高气温和最低气温等等，都是不可能事件。

从上面所举的例子中可以看出，必然事件和不可能事件之间有着很密切的联系。事实上如果在一定的条件下，某个事情是必然事件，那么在同样的条件下，那件事情的反面就必然是不可能事件。反过来也一样。

3．随机事件：

在自然现象中，除了上面提到的必然事件和不可能事件之外，还存在着另一类与此有本质不同的事件，这就是所谓随机事件。

在进行一项试验（观测）之前，我们既不能完全断定某一现象必然会在试验（观测）结果中出现，也不可能事先完全断定该现象决不会在试验中出现，而是在一项试验（观测）结果中既可能出现也可能不出现的现象，就叫做随机事件或偶然事件，简称事件。换句话说，这种在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称之为随机事件，一般用符号A、B、C等表示之。

如冷锋影响某测站时，该站可能有雷暴出现，也可能无雷暴出现，故冷锋影响某测站出现雷暴这一事件就是随机事件（偶然事件）；又如寒潮侵入某地时引起降温是必然事件，但气温下降的具体数值事先并不能完全肯定，可能降温$10°C$，也可能降温$12°C$或$8°C$等，所以它也是个随机事件。

随机事件在一次试验（观测）中，可能出现，也可能不出现，似乎没有什么规律性。其实，**"被断定为必然的东西，是由纯粹的偶然性构成的，而所谓偶然的东西，是一种有必然性隐藏在里面的形式"**。① 必然性与偶然性之间并无不可逾越的鸿沟。虽然个别随机现象有其特殊性，但对大量同一类型的随机现象而言，在多次试验对长期的观测资料分析中，人们就可以发现其中具有某种规律性。天气预报的对象都是随机现象，我们的任务就是要从大量的气象要素的随机变化中，去寻找、总结出预报因子与预报对象之间的统计规律性，利用这种规律性作出天气预报。

（二）概率的概念

1．概率的定义：

前面曾介绍过的随机事件，在自然现象中是大量存在的，只不过有些随机事件或许有较大的出现可能性，而另一些随机事件则具有较小的出现可能性。如在我国北方冬季出现雨日

① 恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社1972年第1版，第35页。

的可能性比南方要小一些，而北方冬季出现大风的可能性要比南方大一些。这些随机事件（如下雨、大风等）出现可能性的大小，都是由它们本身的客观规律所确定的。也就是说，随机事件发生的可能性的大小是事件本身的客观规律所确定的。即随机事件发生的可能性的大小，是事件本身所固有的不随人们主观意愿而改变的一种属性。随机事件的这种属性，正是可以对它发生的可能性大小进行度量的客观基础。因此，我们可以用一个数$P(A)$来作为事件A发生的可能性大小的数值表征。称这个数值$P(A)$叫事件A发生的概率。

上面所述是概率的概念，现在我们给出概率的定义如下：假设我们重复地进行同一试验，如果随机事件A在n次试验中出现了m次，则我们把$\frac{m}{n}$称为事件A在n次试验中出现的频率。如果试验的次数n逐渐加大时，事件A的频率愈来愈稳定地于某一个常数p的附近作微小的摆动，我们便说事件A发生的概率是p，亦即：

$$P(A)=p$$

在一般情况下，常数p是不可能精确地得到的。因此，通常便以n充分大时事件A的频率作为事件A的概率p的近似值。亦即：

$$P(A)=p\approx\frac{m}{n} \qquad (1—1—1)$$

因此，频率是概率的近似估计值，它通过大量的重复试验将概率显示出来了。[1]

例如上海1881—1970年逐年雨日如表1所列：

表1　上海1881—1970年逐年雨日资料

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1880	135	149	142	144	127	117	119	132	167	135
1890	141	116	132	122	122	139	146	134	136	133
1900	107	126	119	124	147	142	132	141	148	140
1910	152	139	120	133	121	144	118	137	138	147
1920	132	133	126	128	123	130	123	112	113	147
1930	154	134	143	108	153	134	150	120	96	89
1940	115	92	96	109	93	113	96	101	121	147
1950	148	147	143	161	120	134	147	127	133	135
1960	139	129	116	132	126	128	106	113	140	133

从表1所给出的资料中发现，在90年中雨日最多的年份有167天(1889年)，最少的年份只有89天（1940年），如果把这些雨日分别除以该年的总日数（365天或366天），就得到

[1] 理论上有贝努里大数定律来描述频率与概率之间的关系：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

即“事件A的概率p与其频率$\frac{m}{n}$之差的绝对值小于任意小的正数ε”的概率，在观测次数n无限增多的过程中极限为1——事件A出现的频率依概率收敛于事件A的概率。

了每年雨日的频率。频率最大的是 45.7%，最小的是 24.4%，假如把每相隔五年、十年、二十年、四十年、四十五年求一个频率，则可得到如表 2 所给出的结果（以%为单位）。

表 2：每隔 n 年求一个频率（n = 5,10,20,40,45）

（1）

每隔 5 年求一个频率						
1881—1885 38.2	1886—1890 36.7	1891—1895 36.5	1896—1900 37.7	1901—1905 34.1	1906—1910 38.5	1911—1915 36.4
1916—1920 37.5	1921—1925 35.2	1926—1930 34.2	1931—1935 37.9	1936—1940 32.2	1941—1945 27.7	1946—1950 31.9
1951—1955 39.3	1956—1960 37.0	1961—1965 34.8	1966—1970 33.9			

（2）

每隔 10 年求一个频率					
1881—1890 37.5	1891—1900 37.1	1901—1910 36.3	1911—1920 37.0	1921—1930 34.7	1931—1940 35.1
1941—1950 29.8	1951—1960 38.2	1961—1970 34.3			

（3）

每隔 20 年求一个频率			
1881—1900 37.3	1901—1920 36.7	1921—1940 34.9	1941—1960 34.0

（4）

每隔40年求一个频率	
1881—1920 37.0	1921—1960 34.5

（5）

每隔45年求一个频率	
1881—1925 31.1	1926—1970 34.2

若用 90 年的资料计算雨日的频率则其值为 32.7%。从上面的例子中进一步看出，随着计算频率时间的增加(即 n 不断增加)，雨日频率有稳定于某一个常数值（即为 p）的趋势，这里的频率 32.7%就是概率 p 的近似估计值。所以在实际工作中只要有较长的记录，就可以把计算的频率作为概率的近似值。但要注意若资料年代较短，则算出来的频率是不稳定的，它并不能作为概率的估计值，因此无法反映出某随机事件（气象要素）在客观上出现可能性的大小。

2．概率的基本性质：

根据概率的定义，可以得到它的几个基本性质：

（1）必然事件的概率等于 1。

$$P(U)=1 \qquad (1-1-2)$$

这是很明显的，因为必然事件在n次试验中必定出现n次，所以必然事件的频率恒为1，则频率稳定于某一个常数值p当然就是1。

在实际应用中，若一事件的概率接近1，则我们认为该事件叫实际必然事件。例如用某种统计预报方法计算出本站未来24小时内出现雷暴的概率为0.92，则我们把未来24小时内出雷暴看成是实际必然事件，因此预报未来24小时内将会有雷暴出现。

（2）不可能事件的概率等于0。

$$P(V)=0 \qquad (1-1-3)$$

这个性质也同样是很明显的，因为不可能事件在n次试验中必定出现零次，所以不可能事件的频率恒为零，则实际频率稳定所趋的那个数值当然是零，即概率p为零。

在实际应用中，若一事件发生的概率很小，接近0，则称该事件叫实际不可能事件。例如用某种统计预报方法计算出本站未来出低云的概率是0.16，则我们认为未来出低云的可能性很小，看成实际不可能事件，报未来不出低云。

（3）随机事件A的概率永远不会小于0，也不会大于1。

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \qquad (1-1-4)$$

因为$0\leqslant m\leqslant n$，所以随机事件A的频率$\frac{m}{n}$决不能小于零（$\frac{0}{n}=0$），也决不可能大于$\frac{n}{n}=1$，则频率趋于稳定的数值p当然不可能小于零或大于1。

二、概率的基本定理

上面我们讨论了事件和它的概率这两个概率论中最基本的概念，今后我们将用A、B、C等表示事件，而用符号$P(A)$、$P(B)$、$P(C)$等表示A、B、C等所对应的概率。

大家知道，**“在自然界中没有孤立发生的东西”**①。如果我们只是一个个地、孤立地来研究事件及其概率是很不够的，实际生活中往往要求我们在考虑任何一个随机事件时，还需同时考虑与之联系的种种事件以及这些事件之间的关系，它们的概率之间的联系等等。详细地分析事件之间的种种关系，不仅会帮助我们更深刻地认识事件的本质，而且还可以大大简化一些复杂事件的概率计算（这将在后面的叙述中详加讨论）。

（一）事件间的几种关系

1. 事件的和：

事件A与事件B之和$A+B$仍是事件，当A发生或B发生或A、B都发生（即A、B中至少发生一个时）称和事件$A+B$发生。一般的定义是：如果A发生等价于A_1，A_2，……，A_n中至少有一个发生，则称事件A是事件A_1，A_2，……，A_n的和。

---

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年第1版，第157页。

$$A=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i \qquad (1-1-5)$$

例 1 设A_1为降雨；A_2为降雪；A_3为降雹；A_4为降冰粒；A_5为降霰。

按事件和的概念有：

降水＝降雨＋降雪＋降雹＋降冰粒＋降霰

即
$$A=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$$

例 2 三次预报暴雨试验。设

A_0为“三次预报中，一次也没有报对”。

A_1为“三次预报中，报对一次”。

A_2为“三次预报中，报对二次”。

A_3为“三次预报中，报对三次”。

则 $A_0+A_1+A_2=$ “三次预报中，报对的次数不多于2次”

$A_1+A_2+A_3=$ “三次预报中，报对的次数不少于1次”

为了更直观的理解事件和的概念，我们可以从下面的图形中得到解释。

在图（1—1）中，A、B两事件分别用两个圆表示，因为$A+B$是表示或者出现A，或者出现B，或者A、B都同时出现，则两个圆相交外围线所围成的横线条面积的部分表示了$A+B$。由于$A+B$是表示有三种可能性：或A，或B，或A及B皆出现。若两圆不相交，则没有A，B同时出现的部分，所以两圆相交就清楚地反映了事件$A+B$的几何意义。

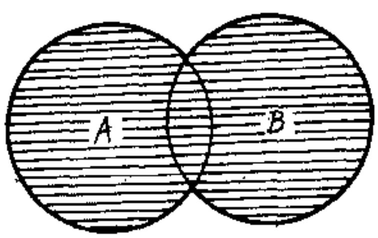

图1—1

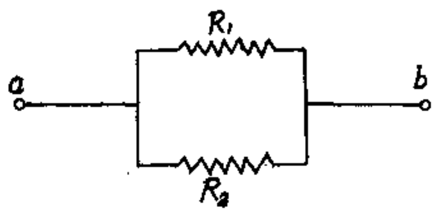

图1—2

图（1—2）是一个并联电路示意图，在图中E_1表示开关R_1构成的通路事件，E_2表示开关R_2构成的通路事件，则E_1+E_2表示了a，b间的通路事件。E_1+E_2也包含有三种可能性：或者是E_1为通路，或者是E_2为通路，或者E_1、E_2皆为通路。

通过上述例子的分析，我们可以清楚看出“事件的和”与过去代数运算中求和在概念上是有本质上的区别的，千万不能将两者混为一谈。代数中，若$a=b$，则有$a+b=2a$；但在事件和的运算中有$A+A=A$，而决不能有$A+A=2A$之结果。因为这里的“事件和”是表示事件中至少出现其中之一：或此或彼，或同时都出现，这是一种“逻辑运算”而不是过去的“数量运算”。因此，由“事件和”的定义不难得出下列三个等式：

$$A+A=A \qquad (1-1-6)$$

$$A+U=U \qquad (1-1-7)$$

$$A+V=A \qquad (1-1-8)$$

例如，事件A与必然事件U之和$A+U$仍是事件，因A、U中至少发生个一U，所以（$A+U$）是必事件，因此$A+U=U$。

2．事件的积：

若事件C是由事件A与B同时发生所构成的，则称C为事件A与B之积。

$$C=AB \tag{1—1—9}$$

事件之积的一般式是：

$$A_1A_2\cdots\cdots A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i \tag{1—1—10}$$

例如设　A为降雨事件，B为降雪事件，则有C为雨夹雪事件。写成等式有：$AB=C$

即　　“降雨”“降雪”＝“雨夹雪”

又如设　A为第一次射中靶事件，B为第二次射中靶事件，则C为两次都中靶事件，有等式：　$AB=C$

事件积之几何说明见图（1—3）：事件A与B分别用两个圆表示，两个圆相交的部分（有斜线的部分）即是既出现A又同时出现B的部分。

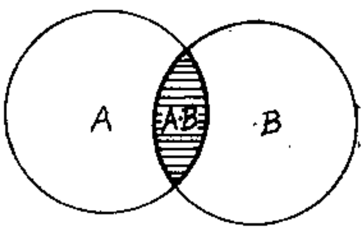

图1—3

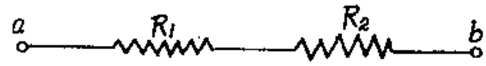

图1—4

事件积的概念还可以从串联电路图中获得解释（见图1—4）：事件积E_1E_2表示a，b间通路事件，只有当R_1和R_2都同时为通路时，a，b间才能构成通路。若R_1或R_2中有一个不是通路，则a，b间也不能形成通路。所以“事件积”是表示诸事件同时出现，而“事件和”是表示诸事件中至少出现其中之一，两者是有区别的。由事件积的定义可以得出下列等式：

$$AA=A \tag{1—1—11}$$

$$AU=A \tag{1—1—12}$$

$$AV=V \tag{1—1—13}$$

若　$\sum_{i=1}^{n}B_i=U$，　则$A=AB_1+\cdots\cdots+AB_n$　(1—1—14)

例如，事件AV是事件A与不可能事件V同时发生的事件，而这是不可能的，因此$AV=V$。从上面四个等式中，我们可以加深对事件积的定义的理解，显然它与过去的数量积运算（如$a\cdot a=a^2$等）是有本质上的区别，事件积只是表示各事件同时出现，它不表示什么数量乘积之大小。

事件的和与积的概念，是概率加法定理和乘法定理的基础，也是概率论中十分重要的概念，因此对它们要有清楚的理解，否则会在概率运算中出现混乱和荒谬的结果。

3．互不相容事件：

不可能同时发生的事件叫互不相容事件。

$$AB = V \qquad (1—1—15)$$

即A，B没有公共事件，A发生则B不发生，B发生则A不发生。

例如某站同一时刻"晴"与"雨"构成互不相容事件，因两者无公共事件，不可能同时发生。晴出现则雨在同一时刻就不可能出现；反之出现雨，则同一时刻就不会出现晴。

非互不相容事件就称相容事件，如A表示云量在4成以上的事件，B表示云量在8成以下的事件，则A，B间是相容事件，因A，B可以同时出现。

4．互逆事件（对立事件）：

是指不能同时发生，而又必然发生其中之一的两事件。若 $AB = V$且$A + B = U$则称A，B为互逆事件，记作$A = \overline{B}$，$B = \overline{A}$。

例如A为"有雨"事件，则A的逆事件是"无雨"记为$\overline{A}$。显然$A + \overline{A} = U$，$A\overline{A} = V$，即"有雨"和"无雨"在同一时刻不能同时出现（$A\overline{A} = V$）而"有雨"与"无雨"又必然出现其中之一（$A + \overline{A} = U$）。

5．完备事件组：

若试验的结果必然在某些事件（所有可能事件）中出现一件，则这些事件就构成一个完备事件组$\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\}$。

例如本站某观测时间出现"晴"，"少云"，"多云"，"阴"，就构成一个完备事件组。因为这四种天气事件之和是必然事件，而某时刻的天气又必然出现这四种天气中的某一种天气。

（二）概率的加法定理与乘法定理

为了得到事件和与事件积的概率计算公式，我们用一个例子来进行分析。

设A表示"下雨"这一事件，B表示"打雷"这一事件。另外已取得某地一组每天观测数据N。

对于某一天而言，"下雨"和"打雷"这两个事件不外乎有下列四种情况：

1．既下雨又打雷，即A，B同时出现。　　2．下雨无雷，即A出现B不出现。

3．无雨打雷，即A不出现B出现。　　4．无雨无雷，即A，B都不出现。

假定上列四种情况发生的次数分别为n_1，n_2，n_3，n_4，则$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = N$。因此

$$出现A的频率 f(A) = \frac{n_1 + n_2}{N}$$

$$出现B的频率 f(B) = \frac{n_1 + n_3}{N}$$

$$出现A或出现B的频率 f(A + B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N}$$

A与B同时出现的频率$f(AB)=\frac{n_1}{N}$

根据上述关系可以得到：

$$\frac{n_1+n_2+n_3}{N}=\frac{n_1+n_2}{N}+\frac{n_1+n_3}{N}-\frac{n_1}{N}$$

或 $$f(A+B)=f(A)+f(B)-f(AB)$$

当N很大时，频率可以代替概率，所以有下列等式：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1—1—16)$$

上式就是相容事件和的概率公式。

如果A，B为互不相容时，有$AB=V$，$P(AB)=0$，

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1—1—17)$$

此公式称为概率的加法定理。它的意思是：两个互不相容事件A与B的和的概率等于A事件与B事件各自的概率之和。

利用加法定理可以得到互逆事件概率之和为1。即

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad (1—1—18)$$

因为$A+\overline{A}=U$，则$P(A+\overline{A})=P(U)=1$，又因A与$\overline{A}$互逆，则必为互不相容事件，故可直接由加法定理得$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$。利用此公式可由$P(\overline{A})$来间接计算$P(A)$往往是很简便的。例如作某站的晴雨概率预报时，若报出晴的概率为$P(\overline{A})=0.3$，则$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.3=0.7$就是出现雨天的概率。

加法定理还可作如下的推广：如果事件A_1，A_2，……，A_k个等k事件是两两互不相容的，则有：

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_k) \qquad (1—1—19)$$

上式即两两互不相容事件和的概率等于各事件概率之和。例如南京1月份吹北风概率为23%，东北风概率为26%，西北风概率为8%，因此南京1月份吹偏北风的概率为23%+26%+8%=57%

在许多场合下，我们往往要研究在事件B已发生的条件下，事件A的概率。

由前面的假设条件可以得到在B已发生的条件下，A出现的频率为

$$f(A|B)=\frac{n_1}{n_1+n_3}$$

同理可得在A已发生的条件下，B出现的频率为

$$f(B|A)=\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

则有 $$\frac{n_1}{N}=\frac{n_1+n_2}{N}\cdot\frac{n_1}{n_1+n_2}=\frac{n_1+n_3}{N}\cdot\frac{n_1}{n_1+n_3}$$

即 $$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \qquad (1—1—20)$$

上式的意义即两事件积的概率等于其中某一个的概率乘上另一事件在该事件发生条件下

的条件概率。

若将（1—1—20）式改写成

$$\left.\begin{aligned} P(A|B)&=\frac{P(AB)}{P(B)} \\ P(B|A)&=\frac{P(AB)}{P(A)} \end{aligned}\right\} \qquad (1-1-21)$$

则$P(A|B)$叫在事件B发生的条件下，事件A发生的概率，或称A对B的条件概率。

若事件A的出现或不出现，对于事件B的出现或不出现的概率互不影响，则称此两事件是互相独立的。当事件A与事件B互相独立时，则有

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (1-1-22)$$

上式就是独立事件的乘法定理。其含义是两独立事件同时出现的概率等于该两事件的概率的乘积。

乘法定理可以推广到k个事件（A_1，A_2，……，A_k）相互独立的情形，即其中任一事件是否出现对其他事件是否出现的概率互不影响的情形，则有：

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_k)=P(A_1)P(A_2)\cdots\cdots P(A_k) \qquad (1-1-23)$$

式中$P(A_1A_2\cdots\cdots A_k)$表示这$k$个事件同时出现的概率。

例如：已知上海6月份降水量大于300*mm*的概率为10%，又设前一年6月降水多少与该年6月降水多少无关，求连续两年、连续三年6月降水量大于300*mm*的概率各为多少？

设　　　A为“第一年降水量大于300 *mm*”这一事件，

　　　　B为“第二年降水量大于300 *mm*”这一事件，

　　　　C为“第三年降水量大于300 *mm*”这一事件。

根据假设A,B,C互相独立，因此连续两年6月降水量都大于300 *mm*的概率为：

$$P(AB)=P(A)P(B)=10\%\cdot 10\%=1\%$$

连续三年6月降水量都大于300 *mm*的概率为：

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.1\%$$

也就是说平均1000年出现一次连续三年6月降水量都大于300 *mm*的事件。

独立事件的乘法定理在统计预报中很有用处，因为它可以使计算大大简化，具体应用在后面有关内容中将作详细介绍。

对非独立事件的乘法定理由（1—1—20）式可以推得：

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_k)=P(A_1)P(A_2A_3\cdots\cdots A_k|A_1)=P(A_2A_3\cdots\cdots A_k|A_1A_2)P(A_2|A_1)$$

$$P(A_1)=\cdots\cdots=P(A_k|A_1A_2\cdots\cdots A_{k-1})\cdots\cdots P(A_2|A_1)P(A_1),$$

即　$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_k)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots\cdots P(A_{k-1}|A_1A_2\cdots\cdots A_{k-2})$$

$$P(A_k|A_1A_2\cdots\cdots A_{k-1}) \qquad (1-1-24)$$

（三）条件概率

概率的乘法定理（1—1—22）是指A事件与B事件为两个相互独立的事件，但是这种情况在气象预报的实践中常常是不能全部满足的，**“因为一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”**①。运动着的大气中，各现象之间也是相互影响、相互制约的，一些现象的发生是依一定条件而存在的，因此就要计算条件概率。条件概率的定义及计算公式已由（1—1—21）式给出。下面举例说明条件概率的计算。

例如，用南京8年资料算得南京1月份出现各种风向时，每天为雨日的概率$P(R|w_i)$，用R表示降水，w_i表示各种风向（$i=1, 2, \cdots\cdots, 17$）。

w_1代表出现NNE风，w_2代表出现NE风，

w_3代表出现ENE风，w_4代表出现E风，

……………………，……………………，

w_{16}代表出现N风，w_{17}代表出现静风。

由（1—1—21）式可直接得到：

$$P(R|w_i)=\frac{P(Rw_i)}{P(w_i)}$$

事件（Rw_i）的概率$P(Rw_i)$如下：

NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S
0.0254	0.0206	0.0135	0.0104	0.0035	0.0001	0.0000	0.003

SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	N	静风
0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0010	0.0034	0.0065	0.0136	0.0007

而各种方向的风在1月份出现的概率$P(w_i)$为

NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S
0.165	0.161	0.063	0.070	0.050	0.041	0.036	0.023

SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	N	C(静风)
0.030	0.042	0.030	0.022	0.021	0.037	0.076	0.114	0.015

$P(Rw_i)$及$P(w_i)$都已求出，于是$P(R|w_i)$由上面的条件概率的计算公式得到：

---

① 《矛盾论》，《毛泽东选集》，第288页。

$P(R\|NNE)$	$P(R\|NE)$	$P(R\|ENE)$	$P(R\|E)$	$P(R\|ESE)$	$P(R\|SE)$
0.154	0.128	0.215	0.148	0.070	0.003
$P(R\|SSE)$	$P(R\|S)$	$P(R\|SSW)$	$P(R\|SW)$	$P(R\|WSW)$	$P(R\|W)$
0.001	0.015	0.006	0.004	0.011	0.015
$P(R\|WNW)$	$P(R\|NW)$	$P(R\|NNW)$	$P(R\|N)$	$P(R\|C)$	
0.048	0.091	0.086	0.119	0.044	

从上面的计算中可以看出，虽然各种风向下降水的条件概率都很小，但比较起来，还是吹偏东北风时下雨的条件概率比吹其他风时下雨的条件概率要大些，这与民间流行的天气谚语："东北风，雨太公"是一致的。

如果在（1—1—21）式中，利用（1—1—22）式进行代换则可得

$$P(A|B)=P(A) \quad \text{或} \quad P(B|A)=P(B)$$

因此当$P(A|B)=P(A)$或$P(B|A)=P(B)$时称A,B互相独立。即表明"已知事件A(或B)发生"这一条件并不影响B（或A）发生的概率。

（四）全概率公式

把概率运算的两个基本定理——加法定理和乘法定理结合起来，就产生了全概率公式。

设要确定某事件B的概率，它能而且只能与互不相容的完备事件组A_1，$A_2,\cdots\cdots,A_n$中的一个同时发生，那么B事件的概率叫做全概率，全概率的公式为：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i) \qquad (1—1—25)$$

全概率公式的含义是事件B的概率是以每个事件A_i(A_i是互不相容的完备事件组中的一个事件)的概率$P(A_i)$与它在这同一A_i为已知的条件下的概率$P(B|A_i)$的乘积之和来计算的。

证明：

因为$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=U$，所以 $B=BU=B(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)=BA_1+BA_2+\cdots\cdots+BA_n$，由于$A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$是互不相容的，（即$A_iA_j=V$，$i\neq j$）则应用推广的加定理（1—1—19）得到：法

$$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots\cdots+P(BA_n)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)\text{。}$$

由乘法定理(1—1—20）可以直接得到：

$$P(BA_i)=P(A_i)P(B|A_i)$$

最后就得到了全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$