同济考研数学辅导丛书
TONGCHAI KAOYAN SHUXUE FUDAO CONGSHU

历年考研数学试题分类解析与应试指导

（数学一）

主　编　陈光曙
副主编　陈学华　夏海峰

- 多年的考研数学辅导实践表明，让考生通过演练历年试题来把握复习重点，打开复习思路和掌握复习策略，是一种十分有效的复习方法.
- 本书由长期从事考研数学辅导的一线教师编写，在系统整理历年考研真题的基础上，根据试题类型和涉及的知识内容进行了分类解答，给出了一般的解题方法和常用技巧.
- 通过解答和研习历年考试真题，不仅可以分析出命题特点，把握主要知识点以及各知识点间的关联特性，感悟到常用的解题思路与方法，而且可以总结出复习的范围、重点和应试解题的思路及技巧，切实提高自己的数学素养和解题能力.

同济大学出版社

同 济 考 研 数 学 辅 导 丛 书
TONGCHAI KAOYAN SHUXUE FUDAO CONGSHU

历年考研数学试题分类解析与应试指导
（数学一）

主　编　陈光曙
副主编　陈学华　夏海峰

同济大学出版社

内容简介

本书汇编和整理了1987—2005年共19年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题(数学一),根据试题类型和涉及的知识内容进行了分类解答,给出了各题的一般解题方法和常用技巧。为了拓宽读者的解题思路,对部分题目还给出了多种解法或证法。本书还以教育部制订的最新"数学考试大纲"为依据,对每一道试题的主要知识点和解题思路等进行了评注,以帮助读者在较短的时间内理解和掌握高等数学、线性代数和概率论与数理统计等章节的内容、重点和方法。

本书试题解析详细,讲解透彻,除供参加全国硕士研究生入学统一考试(数学一)的考生复习使用,也可供大专院校在读学生学习大学数学的习题训练以及有关教师用作教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学试题分类解析与应试指导. 数学. 1/陈光曙主编. —上海:同济大学出版社,2005.8

(同侪考研数学辅导丛书)

ISBN 7-5608-3102-8

Ⅰ. 历… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第071729号

同侪考研数学辅导丛书

历年考研数学试题分类解析与应试指导(数学一)

主编 陈光曙 **副主编** 陈学华 夏海峰

责任编辑 曹 建 责任校对 杨江淮 装帧设计 李志云

出版发行	同济大学出版社
	(上海四平路1239号 邮编200092 电话021-65983475)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	同济大学印刷厂印刷
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	13.25
字 数	339000
印 数	1—4100
版 次	2005年8月第1版 2005年8月第1次印刷
书 号	ISBN 7-5608-3102-8/O·273
定 价	20.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

前 言

总结我们多年的考研数学辅导经验，我们认为，让考生通过演练历年考研数学试题来把握复习重点，打开复习思路和掌握复习策略，是一种十分有效的应考复习方法。因为考研复习是一种目的性很强的应试复习活动，考生必须紧紧围绕“应试”这个核心来复习，而最能反映这个核心特征的载体就是往年的考试试题。通过往年的考试试题解答、研习，可以分析出命题规律动向，把握主要知识点以及各知识点间的关联特点，感悟到常用的解题思路与方法，从而总结出复习的范围、重点和应试解题的思路及技巧，切实提高自己的知识水平和应试能力。

有鉴于此，我们汇集和分类整理了 1987—2005 年共 19 年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题(数学一)而编成本书。我们根据试题类型和涉及的知识内容进行了分类解答，给出了各题的一般解题方法和常用技巧。为了拓宽读者的解题思路，对部分题目还给出了多种解法或证法。同时，我们还以教育部制订的最新“数学考试大纲”为依据，对每一道试题的主要知识点和解题思路等进行了评注，以帮助读者在较短的时间内理解和掌握高等数学、线性代数和概率论与数理统计各章节的内容、重点和方法，训练和开拓数学思维，提高分析能力、解题能力和复习效果。

全书共分九章，每章包括考试内容和要求、填空题、选择题、解答题四部分。所有试题均按照年份排列，试题后面括号里给出的就是该试题的考试年份。各编者分工如下：陈光曙副教授编写第 1,2,3,9 章，夏海峰副教授编写第 4,5,6,7，章，陈学华副教授编写第 8 章，全书最后由陈光曙副教授统稿。

本书的编写还得到了闫超栋等同志的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中疏漏、错误和不足之处难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编者

2005 年 7 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 向量代数与空间解析几何

1.1 考试内容和要求

考试内容

向量的概念　向量的线性运算　向量的数量积和向量积　向量的混合积　两向量垂直、平行的条件　两向量的夹角　向量的坐标表达式及其运算　单位向量　方向数与方向余弦　曲面方程和空间曲线的概念　平面方程、直线方程　平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件　点到平面和点到直线的距离　球面　母线平行于坐标轴的柱面　旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程　常用的二次曲面方程及其图形　空间曲线的参数方程和一般方程　空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

考试要求

(1) 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

(2) 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积)，了解两个向量垂直、平行的条件.

(3) 理解单位向量、方向数和方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

(4) 掌握平面方程和直线方程及其求法.

(5) 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

(6) 会求点到直线以及点到平面的距离.

(7) 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

(8) 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

(9) 了解空间曲线的参数方程和一般方程，了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

1.2 填空题

1. 与两直线$\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$及$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$都平行且过原点的平面方程为______.

(1987)

解法 1 直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1}$ 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=\{0,1,1\}$，$\boldsymbol{v}_2=\{1,2,1\}$，由于这两条直线都平行于欲求平面，故它们的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 必垂直于平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=-\{1,-1,1\}$. 又平面过原点，所以，所求的平面方程为 $x-y+z=0$.

故应填：$x-y+z=0$.

解法 2 取已知两直线的方向向量为所求平面的方位向量，则所求平面的方程为

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

即 $x-y+z=0$.

解法 3 设所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，则 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}_2$，所以有 $\begin{cases}A\cdot 0+B+C=0,\\ A+2B+C=0.\end{cases}$ 从而，$A:B:C=1:-1:1$，因而平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$，故该平面的一般方程为 $x-y+z=c$. 又所求平面过原点，因此 $0-0+0=c$，知 $c=0$，故所求的平面方程为 $x-y+z=0$.

评注 *本题考查的知识点主要为平面的点法式方程以及直线方程中的方向向量，关键是会求平面的法向量.*

2. 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2,\\ y=3t-4,\\ z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是______. (1990)

解 已知直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{-1,3,1\}$，由于直线与平面垂直，所以直线的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 平行，不妨取 $\boldsymbol{v}$ 为平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，则所求平面为 $-1(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$ 即 $x-3y+4=0$.

故应填：$x-3y+4=0$.

评注 *本题考查的主要知识点为平面的法向量及平面的点法式方程.*

3. 已知两条直线的方程是 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$；$l_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$. 则过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程是______. (1991)

解法 1 已知两条直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=\{1,0,-1\}$，$\boldsymbol{v}_2=\{2,1,1\}$. 由题意，欲求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 应与 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 垂直，利用向量的叉积，可得平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\{1,-3,1\}$，因此，所求平面方程为：$1\cdot(x-1)-3\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0$，即：$x-3y+z+2=0$.

故应填：$x-3y+z+2=0$.

解法 2　本题也可取 v_1，v_2 为所求平面的方位向量，则所求平面为：

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0. \text{即 } x-3y+z+2=0.$$

解法 3　本题也可以利用有轴平面束求得. 此略.

评注　*本题考查的知识点主要是平面方程的点法式以及直线与平面的位置关系.*

4. 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ______.　(1995)

解　$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.$$

故应填：4.

评注　*本题考查的知识点主要为向量的点积、叉积、混合积运算以及各种运算的运算律.*

(1) 上述展开过程中有 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$ 及 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$，这些都是三个向量的混合积. 由于每个混合积中的三个向量都是共面的向量组，所以其混合积全为零.

(2) $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

5. 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为 ______.　(1996)

解法 1　由题意知，所求平面与 $\boldsymbol{v}_1=\{6,-3,2\}$，$\boldsymbol{n}_1=\{4,-1,2\}$ 平行，所以取所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{n}_1=-2\{2,2,-3\}$，这样，所求平面的方程为 $2x+2y-3z=0$.

故应填：$2x+2y-3z=0$.

解法 2　因为所求平面过原点，设平面方程为 $Ax+By+Cz=0$，由题意得 $\begin{cases}6A-3B+2C=0,\\4A-B+2C=0.\end{cases}$ 则 $A:B:C=2:2:-3$，故由平面方程的点法式，可得所求方程为 $2x+2y-3z=0$.

解法 3　取向量 $\{6,-3,2\}$ 以及 $\{4,-1,2\}$ 作为方位向量，故所求平面方程为 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$. 展开行列式即得所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

评注　*本题涉及的知识点主要为平面的法向量.*

6. 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是 ______.　(2003)

解　由曲面 $z=f(x,y)$ 上任一点的法向量为 $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right\}$，可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$. 由于切平面 $2x+4y-z=0$ 的法向量为 $\{2,4,-1\}$，它应平行于曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量，所以令 $\begin{cases}2x=2,\\2y=4.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$ 代入 $z=x^2+y^2$ 得 $z=5$，所以切点为 $(1,2,5)$，故所求切平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$,即 $2x+4y-z+5=0$.

故应填:$2x+4y-z+5=0$.

评注 本题考查的知识点主要是曲面上一点的切平面方程以及平面的点法式方程.

1.3 选择题

1. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2z+2y+z-1=0$,则点 P 的坐标是: ( ) (1989)

(A) $(1,-1,2)$ (B) $(-1,1,2)$ (C) $(1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

解 由曲面 $z=f(x,y)$ 上任一点的法向量为 $\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right\}$,可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$,令 $\begin{cases}-2x=2,\\-2y=2.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$ 代入曲面方程 $z=4-x^2-y^2$,得 $z=2$,所以求得 P 点坐标为 $(-1,-1,2)$.

故应选择(D).

评注 本题考查的知识点主要为曲面上点处的切平面方程.

2. 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线: ( ) (1992)

(A) 只有 1 条 (B) 只有 2 条 (C) 至少 3 条 (D) 不存在

解 曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 在 $t=t_0$ 处的切线的方向向量为 $\{1,-2t_0,3t_0^2\}$,若切线与已知平面平行,则必有 $\{1,-2t_0,3t_0^2\}$ 与 $\{1,2,1\}$ 垂直,从而有 $1-4t_0+3t_0^2=0$,而 $3t_0^2-4t_0+1=0$ 中的判别式 $\Delta=16-4\times 3=4>0$,即方程有两个不同实数解. 因而,只有 2 条切线与平面平行.

故应选择(B).

评注 本题考查的知识点主要为空间曲线的切线方程以及直线与平面的位置关系.

3. 设有直线 l_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 l_2: $\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 l_1 与 l_2 的夹角为( ) (1993)

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

解 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=\{1,-2,1\}$,$l_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}=\{-1,-1,2\}$. 设 l_1 与 l_2 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

故应选择(C).

评注　本题考查的知识点主要为空间两直线的夹角.

4. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\Pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L：(　　)(1995)

(A) 平行于 Π　　(B) 在 Π 上　　(C) 垂直于 Π　　(D) 与 Π 斜交

解　直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\{-28,14,-7\}=-7\{4,-2,1\}$，而平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\}$，所以，$\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{n}$，易知 L 与 Π 垂直相交.

故应选择(C).

评注　本题考查的知识点主要为直线与平面的位置关系.

5. 设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$　　(　　)(1998)

(A) 相交于一点　　(B) 重合　　(C) 平行但不重合　　(D) 异面

解　令 $a_1=b_2=c_3=1$，其他为 0，则题意中的两直线方程分别为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$ 和 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$，显然(1,1,1)为交点，且二直线不重合.

故应选择(A).

评注　本题的主要知识点为直线与直线的位置关系.

6. 设有三个不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$，$i=1,2,3$. 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三个平面可能的位置关系为　　(　　)(2002)

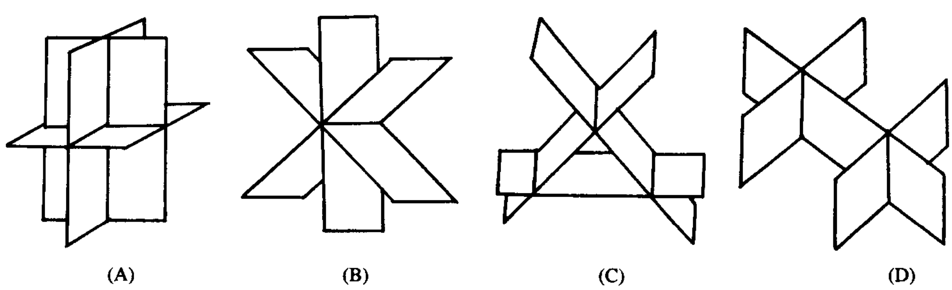

图 1-1

解　因为三个平面的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，所组成的线性方程组有无穷多解，从图形看，(A)只有一解，(C)，(D)无公共解.

故应选择(B).

评注　本题主要知识点为线性方程组的解以及空间平面的位置关系.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.4 解答题

1. 设直线$\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面Π上,而平面Π与曲面$z=x^2+y^2$相切于点(1,-2,5),求$a,b$之值?(1997)

解 由于平面Π与曲面$z=x^2+y^2$相切,故取平面Π的法向量为$\boldsymbol{n}=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},-1\right\}=\{2x,2y,-1\}$,又因为切点为(1,-2,5),得平面的法向量$\boldsymbol{n}=\{2,-4,-1\}$,所以平面Π的方程为$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$,即$2x-4y-z-5=0$.直线的方向向量$\boldsymbol{v}=\{1,1,0\}\times\{1,a,-1\}=\{-1,1,a-1\}$,由题意,$\boldsymbol{v}$垂直于$\boldsymbol{n}=\{2,-4,-1\}$.

故$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}=\{-1,1,a-1\}\cdot\{2,-4,-1\}=-5-a=0$,得$a=-5$.

所以直线方程可写为$\begin{cases}x+y+b=0,\\x-5y-z-3=0.\end{cases}$令$y=0$得$x=-b,z=-b-3$.

这样,直线有一点$A(-b,0,-b-3)$,A在平面上,将点A的坐标代入到平面Π的方程,得$-2b+b+3-5=0$,从而可求得$b=-2$,所以$a=-5,b=-2$.

评注 本题的主要知识点为曲面的切平面以及直线与平面的位置关系.

2. 求直线$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\Pi:x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程,并求$l_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程. (1998)

解 先作过L且与Π垂直的平面Π_0,取$\boldsymbol{n}_0=\{1,1,-1\}\times\{1,-1,2\}=\{1,-3,-2\}$,$\Pi_0$过点(1,0,1),得$l_0$:$\begin{cases}x-y+2z-1=0,\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=2y,\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1).\end{cases}$

于是l_0绕y轴旋转一周所成曲面的方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2.$$

即为$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

评注 本题的主要知识点为直线在平面上的投影以及空间曲线绕坐标轴旋转的旋转曲面的方程.

3. 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:ax+2by+3c=0;$$

$$l_2:bx+2cy+3a=0;$$

$$l_3:cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0$. (2003)

证明 必要性.设三条直线l_1,l_2,l_3交于一点,则线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b \end{cases} \quad (*)$$

有惟一解，故$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$的秩均 2，所以

$$\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = 6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

故知 $a+b+c=0$.（如果 $a=b=c$，则 l_1,l_2,l_3 为同一条直线方程，从而矛盾.）

充分性. 若 $a+b+c=0$，因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(b+a)+b^2] = -2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right] \neq 0$，所以方程（*）系数矩阵的秩为 2，而 $a+b+c=0$，$\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$的秩也为 2，故知（*）有惟一解，即 l_1,l_2,l_3 交于一点.

评注　本题的主要知识点为线性方程组的惟一解以及平面、直线的交点.

第2章　一元函数微分学

2.1　考试内容和要求

2.1.1　函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$　函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系式.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

(5) 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

(6) 掌握极限的性质及四则运算法则.

(7) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8) 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

(9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判断函数间断点的类型.

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

2.1.2　一元函数微分学

考试内容

导数和微分的概念　导数的几何意义和物理意义　函数的可导性与连续性之间的关系　平面曲线的切线和法线　基本初等函数的导数　导数和微分的四则运算　复合函数、反

函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法　高阶导数的概念　某些简单函数的 n 阶导数　一阶微分形式的不变性　微分中值定理　洛必达(L'Hospital)法则　函数单调性的判别　函数的极值　函数图形的凹凸性、拐点及渐近线函数图形的描绘　函数的最大值与最小值　弧微分 曲率的概念　曲率半径

考试要求

(1) 理解导数和微分的概念,理解导数与微分的关系,理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程,了解导数的物理意义,会用导数描述一些物理量,理解函数的可导性与连续性之间的关系.

(2) 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式,了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,会求函数的微分.

(3) 了解高阶导数的概念,会求简单函数的 n 阶导数.

(4) 会求分段函数的一阶、二阶导数.

(5) 会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

(6) 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理,了解并会用柯西中值定理.

(7) 理解函数的极值概念,掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,掌握函数最大值和最小值的求法及其简单应用.

(8) 会用导数判断函数图形的凹凸性,会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线,会描绘函数的图形.

(9) 掌握洛必达法则求未定式极限的方法.

(10) 了解曲率和曲率半径的概念,并会计算曲率和曲率半径.

2.2　填空题

1. 当 $x=$______时,函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.　(1987)

解　$y'=2^x+x\cdot 2^x\ln 2$,令 $y'=0$ 得 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$.

当 $x<-\dfrac{1}{\ln 2}$时,$y'<0$;当 $x>-\dfrac{1}{\ln 2}$时,$y'>0$.故,当 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$时,函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.

故应填:$-\dfrac{1}{\ln 2}$.

评注　本题的主要知识点为函数的极值点及其求解条件和方法.对于可导函数的极值点,应先求出驻点.如果在驻点的左侧函数单调减,在驻点的右侧函数单调增,则驻点为极小值点.如果在驻点的左侧函数单调增、在驻点的右侧单调减,则驻点为极大值点.

2. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$______.　(1988)

解 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}=te^{2t}$,所以,$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=(1+2t)e^{2t}$.

故应填:$(1+2t)e^{2t}$.

评注 本题的主要知识点为第二类重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$以及导数.

3. 已知 $f'(3)=2$,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$______. (1989)

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1.$

故应填:-1.

评注 本题的主要知识点为导数的定义.

4. 设 a 为非零常数,则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=$______. (1990)

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}}{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{x}}=\dfrac{e^{a}}{e^{-a}}=e^{2a}.$

故应填:e^{2a}.

评注 本题的主要知识点为第二个重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=$______. (1990)

解 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,根据 $f(x)$的定义,所以 $f(f(x))=1$.

故应填:1.

评注 本题的主要知识点为分段函数与复合函数.求解时应注意函数的定义域与值域.

6. 设$\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$______. (1991)

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{\sin t}{2t}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

故应填:$\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

评注 本题的主要知识点为由参数方程所决定函数的一、二阶导数.

7. 已知当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,则常数 $a=$______. (1991)

解　当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$，所以 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim -\frac{1}{2}x^2$，即有

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{-\frac{1}{2}x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{3}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2ax}{-x}\right]=-\frac{2}{3}a,$$

所以 $a=-\frac{3}{2}$.

故应填：$-\frac{3}{2}$.

评注　本题的主要知识点为等价无穷小的概念及性质.

8. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}=$______.　(1992)

解　对方程两边关于 x 求导数得

$$e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)(y+xy')=0,$$

解得

$$y'=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}.$$

故应填：$\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.

评注　本题的主要知识点为隐函数的导数及求导方法.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=$______.　(1994)

解　$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

故应填：$\frac{1}{6}$.

评注　本题的主要知识点为重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$、等价无穷小代换以及洛必达法则.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$______.　(1995)

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{6x}{\sin x}}=e^6$.

故应填：e^6.

评注　本题的主要知识点为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$.

11. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$______.　(1996)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com