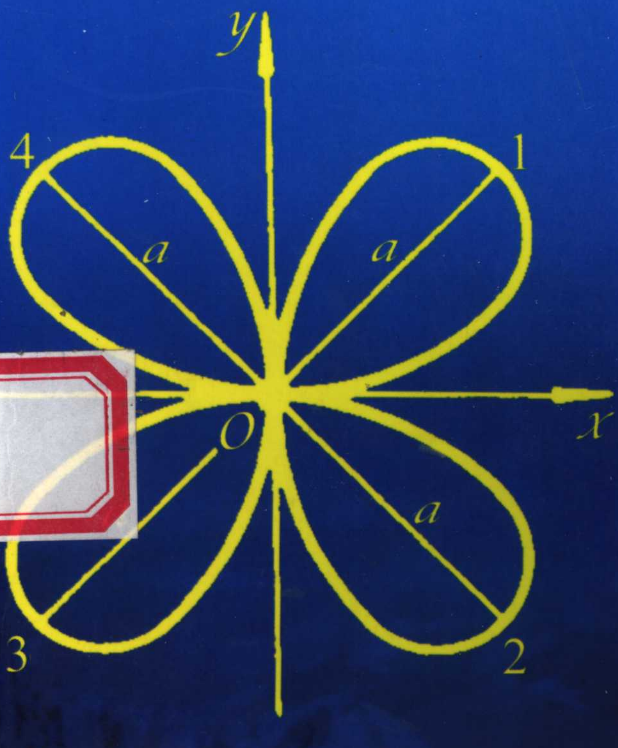
高 等 学 校 教 材

GAODENGSHUXUE

高等数学

上册

$r = a\sin 2\theta$



牟卫华 陈庆辉 张文国 主编

中国铁道出版社

高等学校教材

高 等 数 学

上 册

牟卫华 陈庆辉 张文国 主编

中 国 铁 道 出 版 社

2003年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本系列教材为大学工科各专业公共课教材,共5册:高等数学(上、下册)、线性代数与几何、概率论与数理统计、计算方法。编者根据工科数学教改精神、多年教改课题研究和试验编写,书中融入了许多新的教学思想和方法。本书为高等数学·上册,内容包括一元函数微积分及其应用。

本书也适合作为大专、函授、夜大、自考教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 上册/牟卫华,陈庆辉,张文国主编. —北京:中国铁道出版社,2002.8

ISBN 7-113-04783-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①牟…②陈…③张… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060963 号

书　　名:高等学校教材
高等数学·上册

作　　者:牟卫华　陈庆辉　张文国

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:李小军

编辑部电话:市电(010)63583214　路电(021)73133

封面设计:马　利

印　　刷:中国铁道出版社印刷厂

开　　本:787mm×960mm　1/16　印张:15　字数:316千

版　　本:2002年8月第1版　2003年5月第2次印刷

印　　数:4 501—10 500册

书　　号:ISBN 7-113-04783-1/O·93

定　　价:18.00元

前　言

本书是铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”的研究成果，通过几年的教学实践，广泛征求意见，反复修改而成的一套《高等数学》教材.

本书内容的深度和广度与现行的“高等数学课程教学基本要求”大体一致.编写中力求做到：渗透现代数学思想，淡化计算技巧，加强应用能力培养. 内容编排上：从实际问题出发——建立数学模型——抽象出数学概念——寻求数学处理方法——解决实际问题. 目的：提高学生对数学的学习兴趣，培养数学建模意识，使学生较好地掌握高等数学方法，提高数学应用能力.

本书在编写过程中，力求突出以下几个特点：

1. 突出微积分学的基本思想和基本方法，使学生在学习过程中能够整体把握和了解各部分内容之间的内在联系. 例如，把微分学视为对函数的微观(局部)性质的研究，而把积分学概括为对函数的宏观(整体)性质的研究；把定积分作为一元函数积分学的主体，不定积分仅仅作为定积分的辅助工具，这样既突出了定积分与不定积分的联系，又节省了教学时数；多元函数微分学中强调“一阶微分形式不变性”，使得多元函数(尤其是各变量之间具有嵌套关系的隐函数)的偏导与微分的计算问题程式化，大大提高学生的学习效率；在定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等积分学的应用中，采用“微元法”思想，使学生更容易理解与掌握.

2. 尽可能使分析与代数相结合，相互渗透，建立新的课程体系. 我们独立编写了《线性代数与几何》. 在多元函数微积分学、常微分方程等内容中，充分运用向量、矩阵等代数知识，使表述更简洁.

3. 重视数学应用能力培养，淡化某些计算技巧，删除过时(或不宜在《高等数学》中介绍)的教学内容.本书注重学生对数学概念的理解和应用，选编了较多的应用例题与练习，其内容涉及到工科各专业. 例如，常微分方程一章中，专门设立“微分方程应用举例”一节，以几何、流量、建筑、振动、运动等典型例题，阐述这些数学模型的建立、求解等. 根据工科学生的实际需要，在保证掌握基本方法的前提下，对工科学生难于掌握的某些特殊计算技巧适当淡化. 另外，随着计算技术的高速发展，某些“近似计算”已经失去意义，不再编入本书. 如，“微分在近似计算中的应用”. 通常作为多元微分学的应用之一的“最小二乘法”，对给定的

一组数据,仅能建立一个经验公式,受本课程内容及学生已有数学知识的局限,而不能说明该公式在何时是有意义的,可能产生误导.因此,还是放在《概率论与数理统计》中讲述较为合适.

4. 尽可能采用现代数学的思维方法,广泛使用现代数学语言、术语和符号,为学生进一步学习现代数学知识奠定必要的基础.内容阐述上尽量遵循深入浅出,从具体到抽象,从特殊到一般等原则,语言上做到描述准确、通俗流畅,并具有启发性.

5. 备有内容丰富、层次多样的习题.为适应不同层次的教学需要,上册习题分为两个部分:"A"部分,主要涉及基本概念、计算与应用;"B"部分,是"A"部分的深化与补充.在各章最后附有"综合习题",可作为学生自测题.此外,这部分习题还根据"硕士研究生入学数学考试大纲",结合学生的实际数学能力,适当编写或引入了部分考研题型,特别是综合题型,供基础较好的学生选用.

本书面向工科院校,可作为土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书,教学中与《线性代数与几何》配套使用.

本书是在石家庄铁道学院、石家庄铁道学院应用数学系的领导和全体教师的支持下完成的.本书分上、下两册.上册内容为一元微积分学,下册为多元微积分学、无穷级数、常微分方程.上册主编为牟卫华、陈庆辉、张文国,参加上册编写的有:牟卫华、陈庆辉、张文国;下册主编为张文国、牟卫华、陈庆辉,参加下册编写的有:张文国、牟卫华、胡荣、李忠定、陈庆辉、孙渤海、司德祯.在编写过程中,顾祝全教授、李高军副教授对书稿进行了认真地审阅,并提出了许多建设性的意见;范瑞琴、李向红、薛志群、王雅茹等老师对习题做了认真的解答.在此,我们表示诚挚的感谢.

本书的书稿虽经过多次试用和修改,但由于编者水平有限,难免有错误和不当之处,敬请读者批评、指正.

编　者

2002年5月

目　录

第一章　微积分基础知识 …… 1
第一节　集合　映射与初等函数 …… 1
1.1　集合(1)　1.2　映射与函数的概念(4)
1.3　函数的几种特性及初等函数(9)　习题1.1(16)
第二节　数列的极限 …… 19
2.1　数列极限的概念(19)　2.2　收敛数列的性质及数列收敛性的判定准则(23)　习题1.2(29)
第三节　函数的极限 …… 30
3.1　函数极限的概念(30)　3.2　无穷小量与无穷大量(35)
3.3　函数极限的性质及运算法则(38)　3.4　两个重要极限(42)
3.5　无穷小的比较(44)　习题1.3(46)
第四节　连续函数 …… 48
4.1　连续函数的概念与基本性质(48)　4.2　函数的间断点及其分类(53)
4.3　闭区间上连续函数的性质(55)　习题1.4(57)
第五节　阅读材料 …… 58
思考题(63)
综合习题一 …… 64
第二章　一元函数微分学 …… 65
第一节　导数的概念 …… 65
1.1　导数的定义及几何意义(65)　1.2　函数的可导性与连续性的关系(71)
1.3　变化率问题在其它学科中的应用举例(71)　习题2.1(75)
第二节　导数的运算 …… 76
2.1　函数的和、差、积、商求导法则(76)　2.2　复合函数的求导法则(78)
2.3　反函数的求导法则(80)　2.4　初等函数的求导问题(82)
2.5　高阶导数(83)　2.6　隐函数求导法(85)
2.7　由参数方程确定的函数的求导法则(87)　2.8　相关变化率问题(90)
习题2.2(91)
第三节　微分 …… 94
3.1　微分的概念(95)　3.2　微分的运算法则(97)
3.3　微分在近似计算中的应用(99)　习题2.3(100)

第四节　微分中值定理…………………………………………………… 101
习题 2.4(106)
第五节　罗必塔法则………………………………………………………… 108
习题 2.5(112)
第六节　泰勒定理…………………………………………………………… 113
习题 2.6(119)
第七节　函数性态的研究…………………………………………………… 119
7.1　函数的单调性(119)　　7.2　函数的极值及其求法(121)
7.3　函数的最大值与最小值及其应用(125)　　7.4　函数的凹凸性及拐点(128)
7.5　函数图象的描绘(131)　　习题 2.7(134)
第八节　曲率　曲率圆及曲率半径……………………………………… 137
8.1　弧长的微分(137)　　8.2　曲率及其计算公式(138)
8.3　曲率圆与曲率半径(142)　　习题 2.8(143)
综合习题二…………………………………………………………………… 145
第三章　一元函数积分学……………………………………………………… 147
第一节　定积分的概念及性质……………………………………………… 147
1.1　引例(147)　　1.2　定积分的概念(149)　　1.3　定积分的性质(151)
习题 3.1(154)
第二节　微积分基本定理…………………………………………………… 155
2.1　牛顿-莱布尼兹公式(155)　　2.2　不定积分(157)
2.3　积分上限函数及其导数(159)　　习题 3.2(162)
第三节　积分法……………………………………………………………… 164
3.1　凑微分法(164)　　3.2　换元积分法(第二类换元法)(168)
3.3　分部积分法(174)　　3.4　几种特殊类型函数的积分(178)
习题 3.3(184)
第四节　定积分的应用……………………………………………………… 187
4.1　元素法(187)　　4.2　定积分在几何中的应用(189)
4.3　定积分在物理中的应用举例(197)　　习题 3.4(200)
第五节　广义积分…………………………………………………………… 202
5.1　无穷区间上的广义积分(202)　　5.2　无界函数的广义积分(203)
习题 3.5(205)
综合习题三…………………………………………………………………… 206
附录Ⅰ　常用曲线……………………………………………………………… 209
附录Ⅱ　积分表………………………………………………………………… 212
习题答案………………………………………………………………………… 220

第一章　微积分基础知识

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究函数的一种基本方法．本章将通过介绍映射的概念，引出函数的概念，然后介绍极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些基本性质和基本运算，为进一步学习一元函数微积分打下一个良好的基础．

第一节　集合　映射与初等函数

1.1　集　　合

集合是数学中一个原始的概念．例如，某教室学生的全体构成了一个集合，某车间车床的全体构成了一个集合，一个书框中书的全体也构成了一个集合，等等．但是，要给集合下一个严格的数学定义是一件相当困难的事情．通常，所谓**集合**（简称为**集**）是指具有某种确定性质的对象的全体．组成集合的个别对象称为该集合的**元素**（简称为**元**）

习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素，用 $a\in A$（读作"a 属于 A"）表示 a 是 A 中的元，用 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$（读作"a 不属于 A"）表示 a 不是 A 中的元．含有有限个元素的集称为**有限集**；不含任何元素的集称为**空集**，记作 $\varnothing$；既不是有限集又不是空集的集称为**无限集**．

表示集合的方法有两种：一种是列举法，就是将集合的所有元素一一列出来，写在一个花括号内．例如，由元素 a,b,c 组成的集 A 可表示为 $A=\{a,b,c\}$，又如方程 $x^2-1=0$ 的解集 S 可表示为 $S=\{-1,1\}$．另一种是描述法，就是把集合中元素的共同特征描述出来，写在一个花括号内．例如，具有性质 P 的元素 x 所构成的集合可表示为 $\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$．

今后，我们用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集．

对于两个集 A 与 B，如果 A 的每一个元都是 B 的元，则称集 A 是集 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$，或者 $B\supseteq A$，（读作"A 含于 B"，或者"B 包含 A"）；如果 $A\subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$，或

者$B\supseteq A$;若 $A\subseteq B$ 且$B\subseteq A$,则称 A 与B 相等,记作 $A=B$.

显然,对任何集合 A,都有$\varnothing\subseteq A$,$A\subseteq A$.对于集 A,B,C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

集合的基本运算有三种:并、交、差.

设 A、B 是两个集.由属于 A 或属于B 的所有元素构成的集称为A 与B 的**并集**(简称为**并**),记作$A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由同时属于 A 与 B 的元素构成的集称为A 与 B 的**交集**(简称为**交**),记作$A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由属于 A 但不属于B 的元素所构成的集称为A 与B 的**差集**(简称为**差**),记作$A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\overline{\in} B\}.$$

特别,若 $B\subseteq A$,则称差 $A\backslash B$ 为B 关于A 的**余集**(或**补集**),记为 C_AB.通常我们所讨论的问题是在一个大的集合 X(称为全集)中进行,所以我们称集合$X\backslash A$为A 的余集,记作 A^{C}.两个集合的并、交、差可以用图形直观表示(图 1.1 的阴影部分).

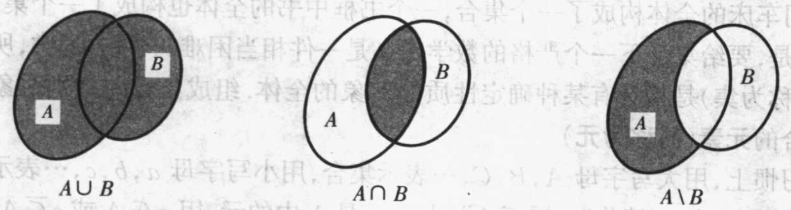


图 1.1

设A,B 是两个非空集合,$x\in A$,$y\in B$,称有次序的一对元素 x,y 为一个**序偶**,记作(x,y).由集合 A,B 中所有元素作成的序偶构成的集合,称为 A 与B 的**笛卡尔乘积**,简称为**积集**,记作 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

例如,设 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A\times B$ 就表示平面上以$(0,-1)$,$(1,-1)$,$(1,1)$,$(0,1)$为顶点的长方形,而 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$表示整个坐标平面,常记为$\mathbf{R}^2$.

区间是高等数学中用来表示数集的常用方法.设 a,$b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,数集

$$\{x\mid x\in\mathbf{R},a<x<b\}$$

称为**开区间**,记作(a,b),a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,这里 $a\overline{\in}(a,b)$,$b\overline{\in}(a,b)$.数集

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，a 和 b 称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$.

类似可以说明

$$[a,b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leqslant x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x \leqslant b\}$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**. 从数轴上看，这些区间的长度都是有限的(见图 1.2(a)，(b)). 此外还有所谓**无限区间**，它们区间的长度都是无限的(见图 1.2(c)，(d)). 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可表示无限区间

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \geqslant a\}$$
$$(-\infty,b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < b\}$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它是无限区间.

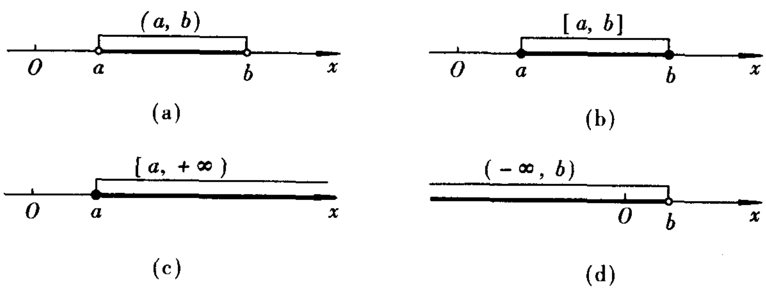


图 1.2

为了简单起见，以后在不需要指明所讨论区间是开区间还是闭区间，以及是有限的还是无限的时，我们就简单地称它为“区间”，且用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念，设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称数集

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, |x-a| < \delta\}$$

为**点 a 的 δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$. 点 a 叫做这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

显然，邻域 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，这个开区间以点 a 为中心，而长度为 2δ(如图 1.3所示).

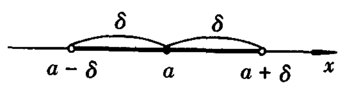


图 1.3

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\},$$

此处 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

1.2 映射与函数的概念

映射是数学中应用较为广泛的一个概念,它是函数概念的推广.下面我们将主要介绍映射的概念和性质.它们对于函数来说是自然成立的.

定义 1.1 设 A,B 是两个非空集合.若对每个元 $x\in A$,按照某种确定的法则 f,有唯一确定的 $y\in B$ 与之相对应,则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**,记作

$$f:A\to B \text{ 或 } f:\ x\to y, x\in A.$$

并称 y 为 x 在 f 下的**象**,而 x 称为 y 在 f 下的一个**原象**(**或逆象**),A 称为 f 的**定义域**,记作 $D(f)$.所有 $x\in A$ 的象 y 的全体构成的集合称为 f 的**值域**,记作

$$R(f)=\{y\mid y\in B, y=f(x), x\in A\}\triangleq f(A).$$

应当注意,x 的象是唯一的,但 y 的原象不一定是唯一的,并且 $f(A)\subset B$.

定义 1.2 设 $A,B\subset\mathbf{R}$ 是两个非空数集.若对于每个数 $x\in A$,按照某个确定的法则 f,有唯一的数 $y\in B$ 与之相对应,则称映射 $f:A\to B$ 为 A 到 B 的函数,记为 $y=f(x)$,或 $y=y(x)$.x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或**函数**.

当 x 取数值 $x_0\in A$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$.当 x 取遍 A 的各个数值时,对应函数值的全体所构成的数集

$$f(A)=\{y\mid y=f(x), x\in A\}$$

称为函数的**值域**.

设 $f:A\to B$ 是一个映射,称集合

$$\{(x,f(x))\mid x\in A\}\subset A\times B$$

为映射 f 的图象.特殊的,函数 $f(x)$ 的定义域为 D,称集合

$$\{(x,f(x))\mid x\in D\}$$

为函数 $f(x)$ 的图象,它是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个点集(图 1.4),图中 W 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

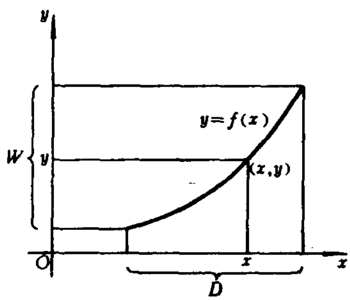


图 1.4

例 1.1 设 A 表示某校全体学生所构成的集合.用一个确定的方法给每个学生编一个学号,B 表示该校学生学号的集合,φ 表示编学号的方法,于是它就确定了从 A 到 B 的一个映射 $\varphi:A\to B$.

例 1.2 设 $A=\mathbf{R}^2$,$B=\{(x,0)\mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}\times\{0\}\subset\mathbf{R}^2$,由对应法则

$$p:(x,y)\in\mathbf{R}^2\to(x,0)\in\mathbf{R}\times\{0\}$$

确定了一个从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的映射 $p:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$.在几何上,它就是平面上点到 x 轴上投影.一般,集合 A 到自身的映射也称为 A 上的一个变换.

例 1.3　用 A 表示平面 $\mathbf{R}^2$ 上以坐标原点为中心的所有同心圆构成的集合,通过求圆面积公式 $S=\pi r^2$(r 为圆的半径),对于每一个圆 $\in A$,确定了唯一的实数 $S\in\mathbf{R}$,于是就确定了从 A 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $f:A\to\mathbf{R}$.

例 1.4　设 $A=\mathbf{R}$,$B=\{0,1\}$,则由对应法则

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in\mathbf{Q}\\ 0 & \text{当 } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

就定义了从 $\mathbf{R}$ 到 B 的一个映射,这个映射称为狄里克莱①函数.

例 1.5　自由落体运动.设物体下落的时刻为 t,下落的距离为 s.假设开始下落的时刻为 $t=0$,物体着地的时刻为 $t=T$.则由关系式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

(其中 g 为重力加速度)就确定了从区间 $[0,T]$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $s:[0,T]\to\mathbf{R}$.它实质上是定义域为 $[0,T]$ 的一个函数 $s(t)$.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,如例 1.5 中,定义域 $D(s)=[0,T]$.在纯数学问题中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时我们约定:**函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数**.例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

根据映射或函数的定义,当自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总只有一个,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**.

例 1.6　在直角坐标系中,半径为 r,圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$,这个方程在闭区间 $[-r,r]$ 上确定了一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数.当 x 取 r 或 $-r$ 时,对应的函数值都只有一个,但当 x 取开区间 $(-r,r)$ 内的任一个数值时,对应的函数值就有两个

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\quad\text{或}\quad y=-\sqrt{r^2-x^2},$$

所以这个函数是多值函数.

以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

例 1.7　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0,\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,它的图象如

① 狄利克莱(P. G. Dirichlet), 1805—1859, 德国数学家.

图 1.5所示.显然,对于任何实数 x,下列关系式成立:

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|.$$

例 1.8 设 x 为任一实数.不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数,记作$[x]$.例如,$\left[\frac{5}{8}\right]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$,$[-1]=-1$,$[-3.5]=-4$.把 x 看作变量,则函数 $y=[x]$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为 $\mathbf{Z}$.它的图象如图 1.6 所示,这图象称为阶梯曲线.

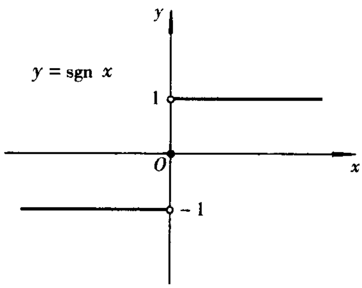


图 1.5

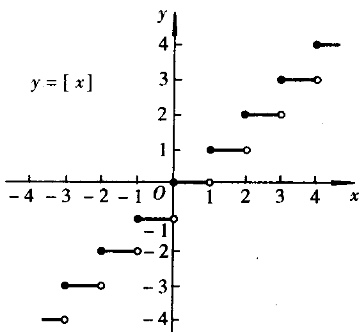


图 1.6

在例 1.7 和例 1.8 中看到,有时一个函数要用几个式子表示.这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.这种用几个式子来表示一个(而不是几个)函数,不仅与函数定义并无矛盾,而且有现实意义,在自然科学和工程技术中,经常会遇到分段函数.例如在材料力学中,理想弹塑性材料的应力应变曲线就是用一个分段函数来表示.

下面,我们介绍复合映射与逆映射的概念,并由此给出复合函数与反函数的概念.

设有映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$,由

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),x\in A$$

所确定的映射 $g\circ f:A\to C$ 称为f 与 g 的**复合映射**(图 1.7),其中 $y=f(x)\in B$ 称为**中间元**.

由定义易见,任给两个映射 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$,当且仅当 $f(A)\subset B$ 时才存在复合映射 $g\circ f:A\to C$.

两个映射的复合也叫做映射的**乘积**,不难将它推广到有限个映射的情形.映射的乘积满足结合律,即若 f,g,φ 分别是$A\to B$,$B\to C$,$C\to D$ 的映射,则

$$\varphi\circ(g\circ f)=(\varphi\circ g)\circ f$$

事实上,上式两端都是从 A 到D 的映射,并且对任何 $x\in A$,都有

$$\varphi\circ(g\circ f)(x)=\varphi((g\circ f)(x))=\varphi(g(f(x)))$$

$$=(\varphi\circ g)(f(x))=((\varphi\circ g)\circ f)(x).$$

所以，等式 $\varphi\circ(g\circ f)=(\varphi\circ g)\circ f$ 成立.

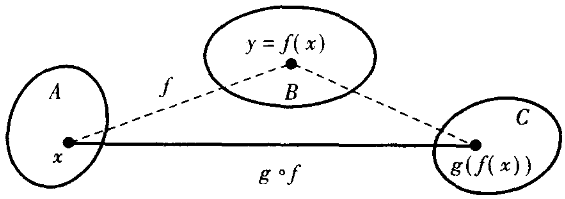


图 1.7

特殊的，当 A,B,C 都是数集时，我们就可得到复合函数的概念.

设有函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，且 $D(f)=D_1$，$D(\varphi)=D_2$，$u=\varphi(x)$ 的值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$. 那么对于每一个数 $x\in D_2$，有确定的数值 $u\in W_2\subset D_1$ 与之对应，对于 $u\in D_1$ 有确定的数值 y 与之对应. 这样，对每一个数值 $x\in D_2$，通过 u 有确定的数值 y 与之对应，从而得到了一个以 $x\in D_2$ 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数就称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f(\varphi(x)),$$

而 u 称为中间变量.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $[-1,1]$ 是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一个子集. $y=\arctan x^2$ 可看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=x^2$ 的定义域. $y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值（都大于或等于 2），都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

与复合映射的概念一样，复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 例如，$y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$ 就是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成，这里 u 及 v 都是中间变量.

设 A 为一个非空集合，把集合 A 中每一个元都映为自身的映射称为 A 上的恒等映射（或单位映射），记作 I_A，即 $\forall x\in A$（$\forall$ 表示“任意的”），$I_A(x)=x$.

设有映射 $f:A\to B$，若存在一个映射 $g:B\to A$，使

$$g\circ f=I_A,\ f\circ g=I_B$$

则称映射 f 是**可逆映射**，并且称 g 是 f 的**逆映射**.

由定义可知，若 $f:A\to B$ 是可逆映射，$g:B\to A$ 是其逆映射，则 $g:B\to A$

也是可逆映射,并且其逆映射为 $f:A\to B$.

容易证明,若 f 是可逆映射,则其逆映射 g 一定是唯一的.因此,若 f 是可逆映射,则其逆映射可记为 f^{-1}.

设 $A,B\subset\mathbf{R}$,如果函数 $f:A\to B$ 的逆映射 $f^{-1}:R(f)\to A$ 存在,则称 f^{-1} 为 f 的**反函数**,f 称为**直接函数**.

由反函数的概念可看出,函数 $y=f(x)$ 的反函数 f^{-1},实质上是将 $f(x)$ 的值域 $R(f)$ 作为定义域,且对 $\forall y\in R(f)$,至少有一个适合关系式 $f(x)=y$ 的 x 与之对应,这样确定的以 y 为自变量,x 为因变量所得到的一个新的函数 $x=f^{-1}(y)$.

应当注意,$\forall y_0\in R(f)$,适合 $f(x_0)=y_0$ 的 x_0 有时不止一个(图 1.8),因此,虽然 $y=f(x)$ 是单值函数,并不能保证其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也是单值函数.

例如,函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,$\forall y\in(0,+\infty)$,那么适合关系式 $x^2=y$ 的数值 x 有两个:$x=\sqrt{y}$ 及 $x=-\sqrt{y}$(图 1.9),所以 $y=x^2$ 的反函数是一个多值函数.如果把 x 限制在 $[0,+\infty)$ 上,则 $y=x^2$ 的反函数是单值的,即 $x=\sqrt{y}$,它称为函数 $y=x^2$ 的反函数的一个单值分支.另一个分支为 $x=-\sqrt{y}$.

习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示.如果把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调,就得到 $y=f^{-1}(x)$.通常把 $y=f^{-1}(x)$ 也称为 $y=f(x)$ 的反函数.

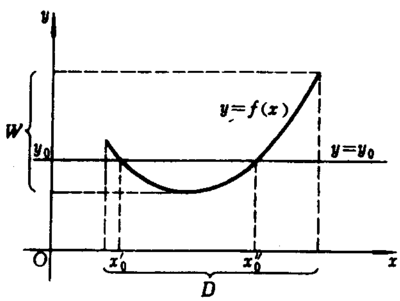


图 1.8

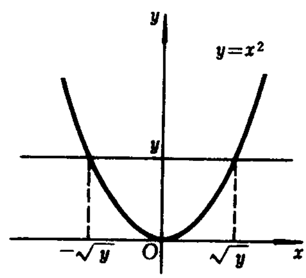


图 1.9

例 1.9 求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 可得 $x=y^3-1$,将 x 与 y 对调得 $y=x^3-1$,所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为

$$y=x^3-1.$$

最后我们指出,若将直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象画在同一个坐标平面上,那么这两个图象关于直线 $y=x$ 是对称的.

1.3　函数的几种特性及初等函数

1. 函数的有界性　设函数值 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使得对 $\forall x\in X$ 所对应的函数 $f(x)$ 都满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**，这就是说，如果对 $\forall M>0$，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立，这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M）. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 事实上，$\forall M>0$，不妨设 $M>1$，则 $\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，当 $x_1=\dfrac{1}{2M}$ 时，$\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$，使得对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

2. 函数的单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**. 如果将上式中"$\leqslant$"（或"$\geqslant$"）改成"$<$"（或"$>$"），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调增加（减少）**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的；函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加的.

3. 函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$），并且 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数；$f(x)=x^3$ 是奇函数；而 $f(x)=x^2+x+1$ 是

非奇非偶函数.

在几何上,偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点对称.

4.函数的周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一不为零的数 l,使得对 $\forall x\in D$ 有 $x+l\in D$,且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,使得上式成立的最小正数 l 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$, $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

在几何上,周期为 l 的周期函数的图象在每个长度为 l 的区间上有相同的形状.

下面我们将介绍初等函数的概念,为此,我们先罗列出基本初等函数.

1. 幂函数 函数

$$y=x^{\mu} \qquad (\mu \text{ 是常数})$$

称为幂函数.

幂函数的定义域要看 μ 是什么数而定. 例如:当 $\mu=2$ 时,$y=x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$;当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时,$y=x^{1/2}=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$;当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时,$y=x^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 但不论 μ 取何值,幂函数 $y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的.

$y=x^{\mu}$ 中,$\mu=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时是最常见的几种幂函数. 它们的图象如图 1.10 所示.

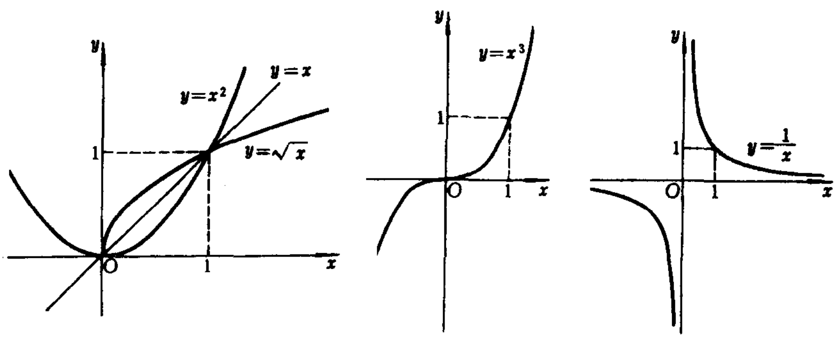


图 1.10