21 世纪高职高专教育系列规划教材 · 公共基础课

21SHIJI GAOZHI GAOZHUAN JIAOYU XILIEGUIHUA JIAOCAI • GONGGONGJICHUKE

高等数学

AM 实训教程

【文科】

主 编 郝 军

副主编 赵芳玲 赵成辉

EXERCISES COURSE ADVANCED MATHEMATICS

EXERCISES COURSE ADVANCED MATHEMATICS

西北大学出版社

NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

21 世纪高职高专教育系列规划教材·公共基础课

高等数学实训教程

（文　科）

主　编　郝　军

副主编　赵芳玲　赵成辉

西北大学出版社

中国·西安

内容提要

本书是郝军、张拓主编的陕西省高职高专规划教材《高等数学》(文科)的配套辅导教材,按照《高等数学》(文科)教材的八章顺序编写。包括了极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,多元函数微分学及其应用,行列式与矩阵以及概率论与数理统计等内容。每部分设置了“内容导学”、“范例分析与解答”和“基本训练与综合提高”三部分内容。书后附有习题答案或提示。该书在内容编排上力求所选例题典型,着重加强数学基础知识的理解和掌握,并在此基础上进行了一定程度的提高。

本书内容具有相对的独立性,除可作为陕西省高职高专规划教材《高等数学》(文科)的配套辅导教材外,还可单独用于其他高职高专和各类成人高校《高等数学》(文科)的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学实训教程. 文科/郝军主编. —西安:西北大学出版社, 2004.8

ISBN 7-5604-1960-7

Ⅰ. 高... Ⅱ. 郝... Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 083344 号

高等数学实训教程 · 文科

出版发行	西北大学出版社	社　址	西安市太白北路 229 号
电　话	029-88302590	经　销	新华书店经销
印　刷	西安信达雅印务公司	版　次	2004 年 8 月第 1 版
开　本	787×1092　1/16	印　次	2004 年 8 月第 1 次印刷
字　数	162 千字	印　张	7
书　号	ISBN 7-5604-1960-7/O·119	定　价	15.00 元

前　言

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的《高等数学》(文科)的配套训练教材。可作为教师教学的参考书,也可作为学生学习《高等数学》课程的训练提高用书。

本书内容包括:极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学及其应用、行列式与矩阵、概率论与数理统计,共八章内容。结合文科类专业的实际情况,着重对高等数学的基本概念与方法进行剖析,对学生的训练题目作严格的筛选,重点突出,特点鲜明。

本书的结构和特点为:

1. 严格遵照《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,以够用、必需为原则,强化应用。

2. 主要内容以图表的形式进行贯穿,简明直接,便于理解。

3. 范例分析与解答由浅入深,解答清晰。

4. 学生训练部分由基本训练、提高训练以及模拟测试组成。注意学生的认知规律,循序渐进。并附答案,便于学生自学。

参加本书编写的有:陕西能源职业技术学院赵成辉(第一章),陕西国防职业技术学院石岚(第二章)、刘建强(第三章),陕西职业技术学院杨岗(第四章),陕西财经职业技术学院张拓(第六章),西安航空技术专科学校韩慧荣(第七章),陕西工业职业技术学院郝军(第四、八章),本书由郝军制定编写大纲和最终统稿与定稿。

本书在编写过程中得到了西北大学出版社和作者所在院校的大力支持与帮助,在此致以最诚挚的感谢。

由于作者水平有限,本书中难免有不妥之处,恳请读者给予批评指正。

编　者

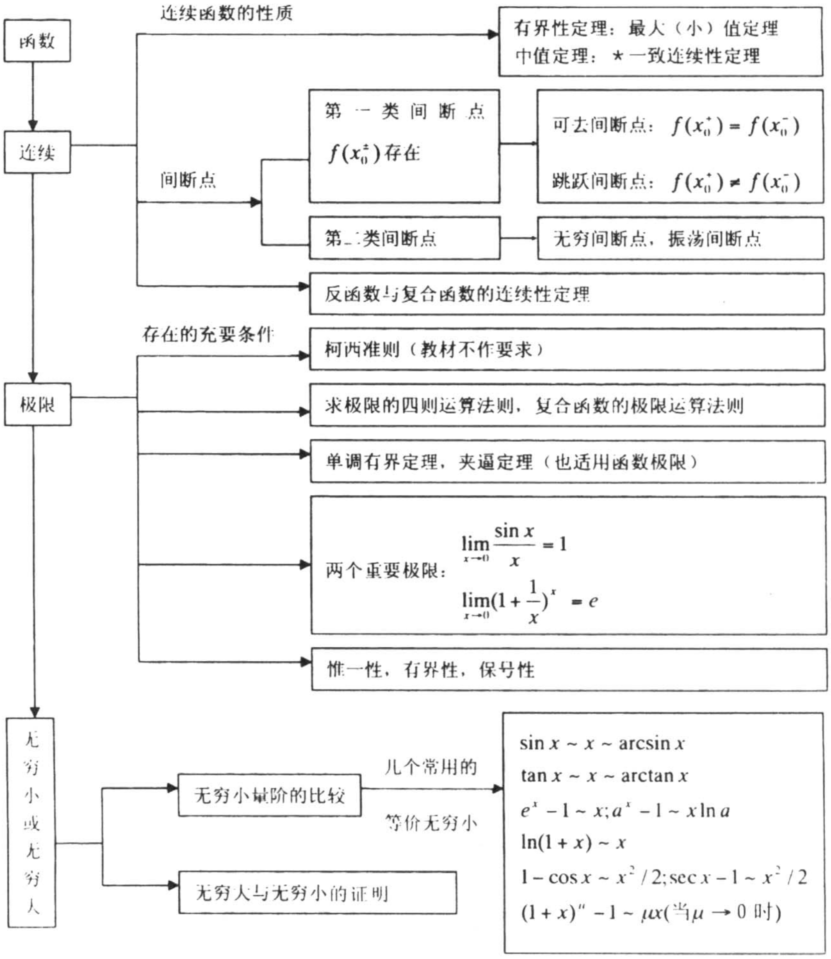
2004 年 6 月

目　录

第一章　极限与连续

内容导学

（一）主要内容



（二）基本要求

1. 理解函数的定义，掌握求函数定义域的方法，了解函数的四种特性的定义及基本初等函数、复合函数与初等函数的定义；熟悉常见的基本初等函数的图像和性质；会画出简单的分段函数的图像，会建立简单的函数关系.

2. 理解无穷小与无穷大及数列与数极限的概念.掌握极限的四则运算法则；了解无穷小的性质；理解函数极限与无穷小的关系；知道两个无穷小比较的意义；掌握两个重要

极限.

3. 了解函数连续性的概念,会求函数的间断点;知道初等函数连续性的概念,掌握初等函数的极限求法.知道闭区间上连续函数的性质.

范例分析与解答

例 1 求 $y=\sqrt{\ln x}+\ln(5-x)-\sin\frac{1}{x-2}$ 的定义域.

解 从 $\begin{cases}x>0\\ \ln x\geqslant 0\\ 5-x>0\\ 2-x\neq 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x>0\\ x\geqslant 1\\ x<5\\ x\neq 2\end{cases}$

故所求定义域为 $[1,2]\cup(2,5)$.

注意:求定义域常化为解不等式(组)的问题.

思考: $y=\sqrt{\ln x\sqrt{\ln\sqrt{\ln x}}}$ 的定义域($x\geqslant e^{e^2}$).

例 2 求 $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ 的值域.

解 y 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant -2\}$ 当 $x\geqslant -2$ 时 有 $x+3>0$

故 $y\geqslant 0$,而当 $x=-2$ 时,$y=0$.

两边平方整理得

$$y^2x^2+(6y^2-1)x+9y^2-2=0$$

由此方程有实根,当 $y>0$ 时有

$$\Delta=(6y^2-1)^2-4y^2(9y^2-2)\geqslant 0$$

得

$$0\leqslant y^2\leqslant 1/4$$

故 $\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1/2\}$ 为函数值域.

注意:函数值域求法一般为其反函数定义域而得;反函数不易断定时,要具体问题具体分析,如此例.

例 3 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 求 $f(0),f(1),f(x+1),f(x)+1,f(1/x),f(x^2),f(f(x))$

解

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1\qquad f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2}$$

同理

$$f(x)+1=\frac{2}{1+x}\qquad f(1/x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\qquad f(f(x))=x$$

思考: $f(x)=\frac{x}{x-1}$ 求 $f\{f\{f\{f(x)\}\}\}$.

例 4 在不同坐标系里,分别画出下列函数的图像.

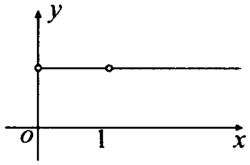
(1) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$　　　　　　　(2) $y = |2^x - 1|$

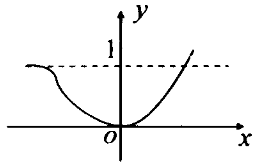
解　$y = x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\log_x e}$

$= e$

$(x > 0,且\ x \neq 1)$

$$y = |2^x - 1| = \begin{cases} 2^x - 1 & x \geqslant 0 \\ 1 - 2^x & x < 0 \end{cases}$$





注意:先化简后画图,遇有绝对值函数化为分段函数讨论.

思考:已知 $y = f(x)$ 的图形,试作下列各函数图形.

(1) $y = f(-x)$　　(2) $y = |f(x)|$　　(3) $y = \frac{1}{2}[\,|f(x)| + f(x) + 2]$

例 5　$\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -x$　　$\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$　　$\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

(根据定义数形结合直接观察)

例 6　$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + a^n} = \begin{cases} 1/2 & a = 1 \\ 1 & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

思考:$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^n}{1 + a^n}(a < 0)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + \cdots + b_m} \qquad (a_i, b_i \in R - \{c\}) \quad (m, n \in N)$$

例 7　$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$　$(m, n \in N^+)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)}{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1}$$

$= \dfrac{m}{n}$　(约简分式法)

例 8　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x + 1} - 1)(\sqrt{x + 1} + 1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x + 1} + 1)\sqrt{x}} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1} + 1}$$

$= 0$　　(有理化分子分母)

例 9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

解 因 $|\sin x|\leqslant 1$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

例 10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax^2}{1-\cos x}$

解 因 $\sin ax^2\sim ax^2(x\to 0)\qquad 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to 0)$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{\frac{1}{2}x^2}=2a\quad\text{(利用无穷小量)}$$

例 11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$=\ln e=1$

例 12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}$ (利用连续性)

解 因 $f(0)=0$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}=0$.

例 13 $f(x)=\begin{cases}e^x & x>1\\ x & 1\geqslant x\geqslant 0\\ \ln(1+x) & x<0\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

解 因 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=e\qquad \lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=1\qquad \lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=0$

故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

思考:你能画出这个分段函数的图像吗? (利用充要条件)

例 14 $\lim\limits_{x\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$

解 (Ⅰ) $x=0$ 时,原式 $=\lim\limits_{n\to x}2^n\sin 0=0$

(Ⅱ) $x\neq 0$ 时,$\dfrac{x}{2^n}\to 0$,原式 $=\lim\limits_{2^n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x=x$

例 15 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$

解 (Ⅰ) $a=0$ 时,原式 $=1$

(Ⅱ) $a\neq 0$ 时,

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left[\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{1\cdot 2a}=e^{2a}\text{(利用基本极限)}$$

例 16 设 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$,求 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n$.

解 设 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$ 则 $A > 0$

则有 $$A = \sqrt{2+A}$$

即 $A^2 - A - 2 = 0$ 即 $A_1 = 2$ $A_2 = -1$(舍去)

故 $$\lim_{x\to\infty} a_n = 2$$

(利用极限本质意义)

思考:"0.9 = 1,对吗?为什么?"

注意:对于函数(数列)的极限运算,还有一些特定方法如罗必达法则等,我们还可应用极限的运算法则,无穷小量性质,函数连续性,中值定理,恒等变换等综合方法来解决极限的运算.极限思想贯穿于微积分学的整个学习过程,极限思想的高低决定微积分学的学习水平.

例 17 设 $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 < x \leqslant 1 \\ 2-x & 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$

讨论 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的连续性,并求连续区间.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$, $f(1) = 1$,所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续,但右连续.故 $f(x)$ 的连续区间为 $(0,1) \cup [1,3)$.

例 18 指出下列函数间断点及其所属类型

(1) $y = \dfrac{x}{-\tan x}$ (2) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ x^2 & x \leqslant 0 \end{cases}$

解 (1) $n\pi, n\pi + \pi/2 (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ 都是间断点.

因 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$,故 $x = 0$ 是可去间断点;

因 $\lim\limits_{x\to n\pi+\pi/2} \dfrac{x}{\tan x} = 0$,故 $x = n\pi + \pi/2$ 是可去间断点;

因 $\lim\limits_{\substack{x\to n\pi \\ n\neq 0}} \dfrac{x}{\tan x} = \infty$,故 $x = n\pi$ 属第二类间断点.

(2) 因 $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$

故 $$\lim_{x\to 0-0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

同理 $$\lim_{x\to 0+0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点不连续,为第一类间断点,且为不可去间断点.

(3) $$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x^2 = 0$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续,且为第二类(无穷型)间断点.

例 19 试证方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

证明 设 $f(x)=x2^x-1$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

且
$$f(0)=-1<0 \qquad f(1)=1>0$$
由介值定理可知在 0,1 之间有 x_0 使 $f(x_0)=0$

即
$$x_0 2^{x_0}=1 \qquad x_0\in(0,1)$$ 命题得证.

基本练习与综合提高

(一) 基本练习题

一、判断题

1. $y=f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,则 $f(g(x))$ 为偶函数. (　　)
2. $y=f(x)$ 的反函数定义域为 $y=f(x)$ 的值域. (　　)
3. 有界数列必有极限. (　　)
4. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. (　　)
5. $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量,则 x 为无穷大量. (　　)
6. 闭区间上连续分段函数必有最大最小值且无间断点. (　　)
7. $0.\dot{9}=3\times 0.\dot{3}=3\times\dfrac{1}{3}=1$. (　　)
8. $x\to 0$ 时,$x\sim\tan x$. (　　)

二、填空题

1. 初等函数是指________________________________.
2. $y=\ln\sin x$ 的定义域为________________________.
3. $y=\cos^2(\sqrt{3e^x+1})$ 是由________________复合而成.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=$________________.
5. 若 $f(x)$ 连续,则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}f(x\sin^2 x)=$________.
6. 若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-7x+6}}$,则 $f(x)$ 的连续区间为__________.
7. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln x & x\geq e\\ 1/M & x<e\end{cases}$ 为使 $\lim\limits_{x\to e}f(x)$ 存在,则 $M=$________.

三、选择题

1. 下列各对函数中,表示同一函数的有(　　).

A. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sin(\arcsin x)$　　B. $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

C. $f(x)=1$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x}$　　D. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

2. 下列函数中(　　)为奇函数.

A. $y = 1 - \cos x$　　B. $x - \sin x$

C. $y = |\sin x|$　　D. $y = -x^2\cos x$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = ($　　$)$.

A. 1　　B. 11　　C. ∞　　D. 不存在

4. 下列计算中(　　).

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3} = 0$(因 $\begin{matrix}\sin x \sim x\\ \tan x \sim x\end{matrix}$)

A. (1) 正确　　B. (2) 正确

C. 两式都正确　　D. 两式都不正确

5. 下列各极限中极限值为 1 的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sin x}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $\lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则必有(　　).

A. $f(x_0) = A$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$

C. $f(x)$ 在 x_0 点连续　　D. $f(x)$ 在 x_0 点有定义

7. 若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在,但 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处间断,则称 x_0 为(　　).

A. 无穷型间断点　　B. 可去型间断点

C. 第一类间断点　　D. 跳跃型间断点

四、求下列各式极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$　　2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-3}{x^3+1}$　　4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x$

5. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi - x}$　　6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}\ (a\neq0)$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$　　8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-2x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$　　10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$　　12. $\lim\limits_{x\to0}\{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$

13. 设 $a_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+1}}}$,求 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$

五、设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图形，并求 $f(3)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(0)$，$f(-\frac{1}{2})$ 的值.

六、把 $0.\dot{7}$ 和 $0.1\dot{2}\dot{3}$ 化为分数.

七、讨论 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x<0\\ 1 & x=0\\ \frac{x^2}{\sin x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

（二）综合提高题

一、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ 0 & x=1\\ x-1 & x>1\end{cases}$，则 $f(0)+f(1)+f(2)=$ ________.

2. 已知 $\frac{1}{x}+x=5$，则 $f(x)=\frac{1}{x^2}+x^2=$ ________.

3. $f(x)=x^2$，$\phi(x)=2^x$　则 $f[\phi(x)]=$ ________.
$\phi[f(x)]=$ ________.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=$ ________，　$\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=$ ________.

5. 以零为极限的变量称为________.

6. $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=$ ________，　$\lim\limits_{x\to1}\ln x=$ ________，　$\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=$ ________.

7. 函数 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ 的间断点为________.

8. 若 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(y-y_0)=$ ________.

二、选择题

1. 下列函数中，(　　)既不是奇函数又不是偶函数.

A. $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$　　B. $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

C. $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$　　D. $f(x)=(x^2+x)\sin x$

2. 设 $f(x)=x^2+px+q$，且 $f(1)=0$，且 $f(2)=0$，则 $f(-1)=$ (　　).

A. 5　　B. -5　　C. 6　　D. -6

3. 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数是(　　).

A. $y=-\sqrt{1-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$　　B. $y=-\sqrt{1-x^2}$

C. $y=\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$　　D. 不存在的

4. 若偶函数在$(-\infty,0)$上$y=f(x)$递减，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上(　　).

A. 递减　　B. 递增　　C. 无法确定

5. $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant 2\\ x-1 & 2<|x|<3\end{cases}$的定义域是$x\in$(　　).

A. $[-2,2]$　　B. $(-3,-2)\cup(2,3)$

C. $[-2,3]$　　D. $(-3,3)$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{1-x^2}$的值是(　　).

A. 1　　B. C　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

7. $x=x_0$是$y=f(x)$的一个间断点，则(　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在　　B. $f(x)$在$x=x_0$无定义

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$　　D. 以上三种情况至少一个发生

8. 点$x=0$是函数$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$的(　　).

A. 连续点　　B. 第一类中的跳跃型间断点

C. 可去间断点　　D. 第二类间断点

三、求下列各式极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x-4}+1\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$　　6. $\lim\limits_{v\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos v}{\cos(v-\pi/3)}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

四、当$x\to 1$时，无穷小$1-x$和$1-\sqrt[3]{x}$，$1-\sqrt{x}$是否同阶，是否等价？

五、把一圆形铁片，自中心处剪去中心角为x的一扇形后围成一个无底圆锥，试将这圆锥体积表示为x的函数.

六、讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ \ln x & 0<x\leqslant 1\\ x & 1<x<3\\ 4 & x=3\\ 3 & x>3\end{cases}$的连续性.

习题答案

基本练习题

一、1.✓ 2.✓ 3.✗ 4.✓ 5.✗ 6.✓ 7.✗ 8.✓

二、1. 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和复合而得的函数.

2. $[2n\pi_1(2n+1)\pi](n=0,1,2\cdots)$

3. $y=u^2 \quad u=\cos v \quad v=\sqrt{s} \quad s=3e^x+1$

4. 0; 5. $f(\pi/24)$ 6. $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$ 7. $M=1$

四、1. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{1}{n}=1$

2. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1+x^2-1+x^3-1+\cdots+x^{n-1}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$$

$$=\lim_{x\to1}[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+1x^{n-1}]$$

$$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x+1/x^2-3/x^3}{1+1/x^3}=0$

4. 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+(a+b)x+ab-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{(a+b)x}{x^2}+\dfrac{ab}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)$$

5. 原式 $\xlongequal{t=x-\pi}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(\pi+t)}{-t}=1$

6. 原式 $\lim\limits_{x\to0}\ln(1+ax)\dfrac{1}{x}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{1+n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1$

8. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x-1)(x-1)}{(3x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{4}$

9. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}=\dfrac{1}{2}$

10. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x}{x}-1\right]=0-1=-1$

11. 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1}{\cos x/2+\sin x/2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\dfrac{1}{\frac{x}{a}})^{\frac{x}{a}\cdot a} = a$

13. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ （仿例 13）

14. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\right] = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$= \arctan x\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$

五、略

六、$\begin{cases}(1)\ h(t) = 2\sqrt{25-6^2} & 0 \leqslant t \leqslant 5\\(2)\ s(t) = 2t\sqrt{25-t^2} & 0 \leqslant t \leqslant 5\end{cases}$

七、因 $\lim\limits_{x\to 0-0} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{\frac{\sin x}{x}} = 0 \quad f(0) = 1$，故在 $x = x_0$ 点不连续，属可去间断点.

综合提高题

一、1. 2　2. 23　3. 4^x　2^x　4. ∞　0　5. 无穷小量　6. $-\infty$　0　$+\infty$　7. $x=0$　$x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$　$k = 0$　± 1　$\pm 2\cdots$　8. 0

二、1.D　2.C　3.A　4.B　5.D　6.C　7.D　8.C

三、1. 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\dfrac{n(n-1)}{2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n-1}{2n} = \dfrac{1}{2}$

2. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1 = -\dfrac{1}{4}+1 = \dfrac{3}{4}$

3. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x) = 1$

4. $\alpha - \beta$

5. 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^3-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2} = -1$

6. 令 $v = x + \dfrac{\pi}{3}$　$v \to \dfrac{\pi}{3}$ 时　$x \to 0$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos(x+60^\circ)}{\cos x} = 1-\sqrt{3}$

7. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n}) = 1$

四、$x \to 1$ 时 $1-x$ 和 $1-\sqrt[3]{x}$ 同阶非等价

五、$x = 0$ 为无穷型间断点 Ⅱ，$x = 1$ 为跳跃间断点 Ⅰ

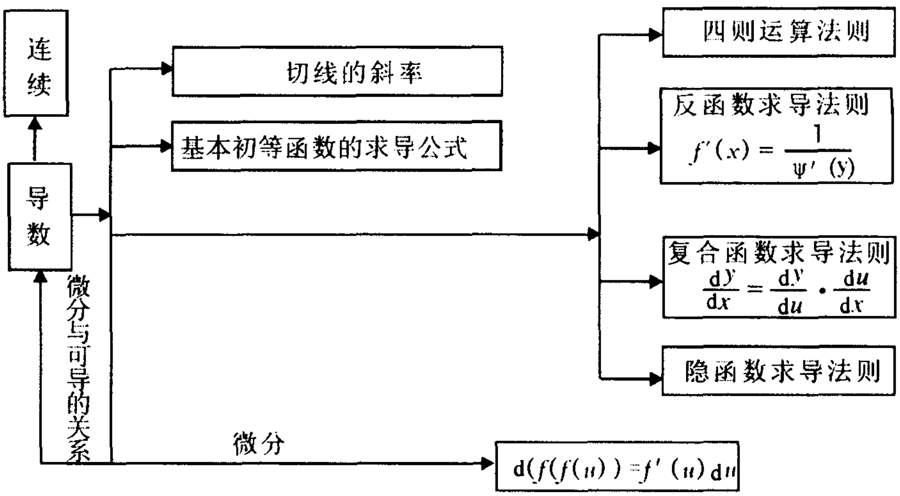
$x = 3$ 为可去型间断点 Ⅰ，连续区间 $(-\infty,0)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$

六、略

第二章　导数与微分

内容导学

（一）主要内容



（二）基本要求

1．掌握函数的导数与微分的概念，了解导数与微分的几何意义，掌握函数的连续性、可导性与可微性之间的关系．

2．熟练掌握导数的运算法则，包括函数的和、差、积、商与反函数、复合函数、隐函数及由参数方程所确定的求导法则，并熟记基本初等函数的导数公式．

3．了解高阶导数的定义和高阶导数的运算法则．

范例分析与解答

例 1　设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，且 $f'(2)=1$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}$．

分析　在导数的定义中，令 $x=x_0+\Delta x$，可得 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的等价形式为：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，利用此形式并结合加减项可解出这道题．

解　$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right]$$