

高中数学

测试命题与解题方法



北京市西城区教育教学研究中心 主编 中国集邮出版社

高中数学测试命题 与解题方法

北京市西城区教育教学研究中心 主编

中国集邮出版社

责任编辑：黄建霖

特约编辑：章扬玲

高中数学测试命题与解题方法

中国集邮出版社出版

(北京东长安街27号)

新华书店北京发行所发行

中国铁道印刷厂印刷

字数：257千字 开本：787×1092 1/32 印张：11 8/32

1989年3月北京第1版 1989年3月北京第1次印刷

印数：1—32 500

ISBN7—80048—082—8/G·027 定价：3.75元

前 言

本书以中学数学教学大纲为指针，以现行中学高中数学教材为依据，综合考虑了近几年来高考命题的情况，以帮助学生了解测试命题的指导思想、原则、题型和解题方法。我们力求突出重点和难点，从命题和解题两个方面去阐述测试的基本规律，解题的基本思路和方法，培养学生分析解决问题的能力，并进一步提高解题能力。

全书共分三部分。第一部分简要阐述测试命题的指导思想、题型的结构和特点；第二部分为客观型命题，首先阐述怎样迅速准确地判断解答选择题，然后分科分单元配有选择题、填空题型的自测题；第三部分为分步设问型命题，分为代数、三角、立体和解析几何四科阐述各类的题型和解题指导，突出解题思路的分析，让学生善于思考、分析问题，掌握解题的基本技能和方法，然后分科分单元配有自测题（其中包括综合测试题两份）。

最后，对第二、三部分的自测题附有答案和提示。

参加本书编写的有欧阳东方、韩康年、戴明源、李松文、花耀沁等，最后由李松文统稿，由于我们水平有限，书中一定有不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编者 1988.12

目 录

第一部分 测试命题的指导思想与题型	(1)
第二部分 客观型命题	(11)
一、怎样迅速判断标准化命题中数学选择题	(11)
二、自测题	(23)
(一) 代数部分	(23)
(二) 三角部分	(48)
(三) 立体几何部分	(65)
(四) 解析几何部分	(73)
第三部分 分步设向型命题	(95)
一、代数部分	(95)
(一) 题型分析与解题指导	(95)
(二) 自测题	(163)
二、平面三角部分	(170)
(一) 题型分析与解题指导	(170)
(二) 自测题	(201)
三、立体几何部分	(204)
(一) 题型分析与解题指导	(204)
(二) 自测题	(253)
四、解析几何部分	(256)

(一) 题型分析与解题指导.....	(256)
(二) 自测题.....	(307)
综合测试题一.....	(314)
综合测试题二.....	(317)
答案或提示.....	(322)

第一部分

测试命题的指导思想与题型

中学数学的教学目的，主要是使学生掌握数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。

当前，我国在高考中主要采用命题测试的办法，通过考生的分数来区分学生学习数学成绩的优劣。

高考命题是以中学数学大纲为指导，以现行中学数学教材为依据，从数学的基础知识和基本技能，数学各种能力诸方面，综合代数、三角、立体几何、解析几何各科内容，对考生进行全面的考查。通过高考命题测试，要有利于中学数学教学，引导学生牢固的掌握双基和各种能力；有利于高校招生进行选拔，区分出考生数学成绩不同档次，拉开差距，以便于进行录取。

数学命题的形式是多种多样的。在解放后的历次高考试题中主要是论述性试题，包括计算题、论证题、问答题，也有少量选择题、判断题、填空题、作图题、改错题等。各种形式的试题都有它的特点，各有其优点和缺点。在数学命题中用的是计算题和论证题，它具有灵活多变的特点，既适于考查学生掌握各项知识的水平，又适于考查学生灵活运用知识和各种能力的水平，同时也可了解学生的书面表达能力，但是，这类题目解答费时，每次考试的题目较少，考查的知识面较窄，仅靠几道题很难达到全面了解考生掌握知识和技能的水平的目

的。

鉴于种种原因，近些年来对高考测试命题的题型进行了改革，采用客观型试题和分步设问型试题相结合的形式。这种形式命题兼顾了标准化命题和我国传统型命题（主要指论述型试题）的优点，也克服了各自的不少弊病，成为当前我国测试命题较为广泛采用的形式。

客观型试题，主要指选择题和填空题，前几年一般占45分，今年占65分。

选择题具有以下几个优点：

（1）适应性强。它既可以用来考查学生是否掌握数学的各项概念、定义、公式和法则等数学知识和基本技能，也可以用不同难度的选择题考查学生掌握这些知识和技能的水平。

（2）覆盖面广。由于题目较多，一道选择题又涉及两个以上的知识点，这样检查的知识面比较大，能较为全面的考查所学的主要内容，不会因为考生的偶然失误太大而影响学生的成绩。

（3）便于评分和统计成绩。

（4）减少了阅卷的随意性，使学生的成绩比较客观。

选择题有单项选择题和多项选择题，近几年来都是采用单项选择题。命题的形式是“每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中只有一个结论是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的圆括号内，选对得3分，不选、选错或选出的代号超过一个，一律得0分”。在得分上，1984年的命题采用“选对得3分，不选得0分，选错或选出的代号超过一个，一律得负1分”。其目的就是不让考生瞎猜，会就是会，不会就是不会。

一般来说，选择题是由题干和若干个不同的选项构成的，

题干通常采用直接问句和不完全叙述句两种形式；选项包括一个能与题干连缀成正确命题的结论和几个表面上与正确结论相似而与题干连缀成错误命题的结论。

在选择题的试题中，各题的难易程度、灵活性和综合性等方面的伸缩性比较大，有时比较简单，有时也比较复杂。

下面从1984年、1987年、1988年三年中属于相同知识内容的题目，编成三组，加以比较。每组都有五个题，对应的题目都是指下面五个知识点：（1）集合之间的关系；（2）圆锥曲线的性质；（3）数（实数或复数）的计算或性质；（4）充要条件问题；（5）三角函数的性质。

第一组（1984年选择题）

（1）数集 $X = \{(2n+1)\pi, n \text{ 是整数}\}$ 与数集 $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \text{ 是整数}\}$ 之间的关系是

（A） $X \subset Y$ ；（B） $X \supset Y$ ；（C） $X = Y$ ；（D） $X \not\subset Y$ 。

答：（ ）

（2）如果圆 $x^2 + y^2 + Gx + Ey + F = 0$ 与 x 轴相切于原点，那么

（A） $F = 0, G \neq 0, E \neq 0$ ；（B） $E = 0, F = 0, G \neq 0$ ；

（C） $G = 0, F = 0, E \neq 0$ ；（D） $G = 0, E = 0, F \neq 0$ 。

答：（ ）

（3）如果 n 是正整数，那么 $\frac{1}{8}[1 - (-1)^n](n^2 - 1)$ 的值

（A）一定是零；

（B）一定是偶数；

（C）是整数但不一定是偶数；（D）不一定是整数。

答：（ ）

（4） $\arccos(-x)$ 大于 $\arccos x$ 的充要条件是

（A） $x \in [0, 1]$ ；

（B） $x \in [-1, 0]$ ；

$$(C) x \in [0, 1],$$

$$(D) x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

答: ()

(5) 如果 θ 是第二象限角, 且满足

$$\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin \theta},$$

那么 $\frac{\theta}{2}$

(A) 是第一象限角; (B) 是第三象限角;

(C) 可能是第一象限角, 也可能是第三象限角;

(D) 是第二象限角。 答: ()

第二组 (1987年中部分选择题)

(1) 设 S 、 T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T$, $T \not\subseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于

(A) X ; (B) T ; (C) ϕ ; (D) S .

答: ()

(2) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 令 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, 那么它的准线方程为

$$(A) y = \pm \frac{a^2}{c}; \quad (B) y = \pm \frac{b^2}{c};$$

$$(C) x = \pm \frac{a^2}{c}; \quad (D) x = \pm \frac{b^2}{c}.$$

答: ()

(3) 设 a 、 b 是满足 $ab < 0$ 的实数, 那么

$$(A) |a+b| > |a-b|; \quad (B) |a+b| < |a-b|;$$

$$(C) |a-b| < ||a| - |b||; (D) |a-b| < |a| + |b|。$$

答: ()

(4) 已知 E, F, G, H 为空间中的四个点, 设

命题甲: 点 E, F, G, H 不共面;

命题乙: 直线 EF 和 GH 不相交。

(A) 甲是乙的充分条件, 但不是必要条件;

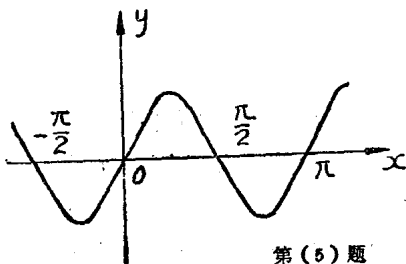
(B) 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件;

(C) 甲是乙的充要条件;

(D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件。

答: ()

(5) 要得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ 的图象, 只要将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 (如图)



第(5)题

(A) 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$;

(B) 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$;

(C) 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$;

(D) 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 。

答: ()

第三组 (1988年中部分选择题)

(1) 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的子集总共有

(A) 7个; (B) 8个; (C) 6个; (D) 5个。

答: ()

(2) 设圆 M 的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$, 直线 l 的方程为 $x + y - 3 = 0$, 点 P 的坐标为 $(2, 1)$, 那么

(A) 点 P 在直线 l 上, 但不在圆 M 上;

(B) 点 P 在圆 M 上, 但不在直线 l 上;

(C) 点 P 既在圆 M 上, 又在直线 l 上;

(D) 点 P 既不在圆 M 上, 也不在直线 l 上。

答: ()

(3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$ 的值等于

(A) 1; (B) -1; (C) i ; (D) $-i$ 。

答: ()

(4) 设命题甲: $\triangle ABC$ 的一个内角为 60° 。

命题乙: $\triangle ABC$ 的三个内角的度数成等差数列。

(A) 甲是乙的充分条件, 但不是必要条件;

(B) 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件;

(C) 甲是乙的充要条件;

(D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件。

答: ()

(5) 函数 $y = \cos^4 x - \sin^4 x$ 的最小正周期是

(A) π ; (B) 2π ; (C) $\frac{\pi}{2}$; (D) 4π 。

答: ()

从以上三组题可以看出,虽然每年考查的知识点是相同的,但题目的难易程度是不同的,84年较难,88年较易,87年适中,做为考生应对各种情况有一定的思想准备。

填空题也是在高考中经常采用的一种客观型命题形式。

填空题是一个未完成的叙述句(如果采用简答题的形式,它就是一个直接问句),考生在解答填空题时必须按题目的要求填写适当的词、短语、数字、符号,使题目变为完整的正确的叙述句。

由于填空题的叙述简练,试题篇幅不大,而且发问明确,实际上对学生的解答有一定程度的控制。因此,考生不易作出与题目无关的问题,也不能自由发挥,因此填空题较易测出学生对于指定内容的学习效果 and 水平。

填空题考查的内容是多方面的,包括基本概念,基本公式、定理的理解、记忆和运用;对数学术语、数学符号的理解;逻辑推理能力,简单的计算能力,表达能力,作图、识图能力等,都可以采用填空题的命题形式进行考查。

考生在解答填空题时,必须严格遵照题目的要求进行填空(或简答结果)。从填空的位置,填空的内容都得按照命题的要求来做,从最近几年的高考填空题来看,一般只要求直接写出结果,不要求任何解题过程。

举例如下:

1988年高考数学填空题是采用如下形式命题的:

(1) 求复数 $\sqrt{3} - i$ 的模和幅角主值。

〔答〕模:

幅角的主值:

(2) 解方程 $9^{-x} - 2 \cdot 3^{1-x} = 27$

〔答〕

(3) 已知 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$, $3\pi < \theta < \frac{7\pi}{2}$, 求 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ 的值。

[答]

.....

上述题目也可以采用下述形式命题:

(1) 复数 $\sqrt{3} - i$ 的模是____, 幅角主值是_____。

(2) 方程 $9^{-x} - 2 \cdot 3^{1-x} = 27$ 的解是_____。

(3) 已知 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$, $3\pi < \theta < \frac{7\pi}{2}$, 则 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ 的值是_____。

上述两种命题形式本质是一样的, 但在本时的练习中, 为节省篇幅, 经常采用第二种形式给出填空题。

在数学中采用较多的测试命题是分步设问型试题, 这类试题包括计算题、证明题、问答题等, 设问的形式可以一问, 也可以是多问。这类试题的共同特点是: 给出一组已知条件, 然后在这些条件下提出一个或几个问题。

从所提出的问题之间的关系, 可以把分步设问型试题分以下几类:

1. 从所提出的几个问题由浅入深, 关系紧密, 而且后者与前者一环套一环, 后一问的解答需用到前一问的结论。考生在解答时, 如果对前面的问题回答有误, 就会牵连到后面问题失误。

如: 1987年第七题: 设数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 的前 n 项的和 S_n 与 a_n 的关系是

$$S_n = -ba_n + 1 - \frac{1}{(1+b)^n}$$

其中 b 是与 n 无关的常数, 且 $b \neq -1$ 。

- (1) 求 a_n 和 a_{n-1} 的关系式;
- (2) 写出用 n 和 b 表示 a_n 的表达式;
- (3) 当 $0 < b < 1$ 时, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

2. 所提出的几个问题相互间没有联系, 彼此独立, 实际上是在给定的共同条件下得出几个并列的结论。

如: 1988年第六题: 给定实数 a , $a \neq 0$, 且 $a \neq 1$, 设函数

$$y = \frac{x-1}{ax-1} \quad (x \in \mathbb{R}, \text{ 且 } x \neq \frac{1}{a}), \text{ 证明:}$$

(1) 经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线 不平行于 x 轴;

(2) 这个函数的图象关于直线 $y = x$ 成轴对称图形。

3. 所提几个问题难度由浅入深、问题间既有一定的联系, 又相对独立。如果解答后面的问题需引用前面问题的结论的话, 这个结论在前面的问题中已明确给出, 不会因为前面问题答不出来而影响后面问题的解答。

如: 1987年第六题: 设复数 z_1 和 z_2 满足关系式 $\overline{z_1 z_2} + A z_1 + A \overline{z_2} = 0$, 其中 A 为不等于零的复数, 证明:

$$(1) |z_1 + A| |z_2 + A| = |A|^2;$$

$$(2) \frac{z_1 + A}{z_2 + A} = \left| \frac{z_1 + A}{z_2 + A} \right|.$$

设问型试题的形式是多种多样的, 有些设问是采用问答的形式给出的。

如: 1986年第七题: 过点 $M(-1, 0)$ 的直线 l_1 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 P_1, P_2 两点。记: 线段 $P_1 P_2$ 的中点为 P , 过点 P 和抛物线的焦点 F 的直线为 l_2 , l_1 的斜率为 k 。试把直线 l_2 的斜率与直线 l_1 的斜率之比表示为 k 的函数, 并指出这个函数的定义

域、单调区间，同时说明在每一单调区间上它是增函数还是减函数。

在设问型试题中比较多的是一步设问，这里不再叙述了。

当前在测试命题题型上的变化，促使我们对各类题型的解题技能和方法上进行学习和研究，掌握各类题型的特点和解题规律，使我们的教学和学生的学习适应形势的变化，不断提高教学质量。

第二部分

客观型命题

一、怎样迅速判断标准化 命题中数学选择题

数学选择题（单一选择题，下同）都有一个统一的大前提，就是选择支中“有且只有一个是正确的”。每道选择题又由题干（前提条件）和选择支（结论）两部分组成。选择题具有题型新颖、构思巧妙、题小面广和概念性强、知识覆盖面广及解法灵巧等特点，经常进行解数学选择题的训练，有利于学生全面掌握基础知识、基本技能，提高分析、判断的能力，由于解法的灵活性，对提高学生的创造性思维能力，具有独特的作用。

高考数学试题中出现选择题始于1983年，共有5个小题，满分10分（总分120分）占8.33%，到1988年，共有15个小题，满分45分（总分120分）占37.5%。可见高考数学试题中，选择题所占的比重是相当大的。但是，在统编教材中，选择题几乎是空白的，既没有典型的范例，也没有必要的练习题。因此，研究数学选择题的解法，已成为当前中学数学教学的一个重要课题。

数学选择题的具体解法很多，既有解常规题的一般方法，也有其自身独特的方法，有些具体解法只不过是常用的数学推