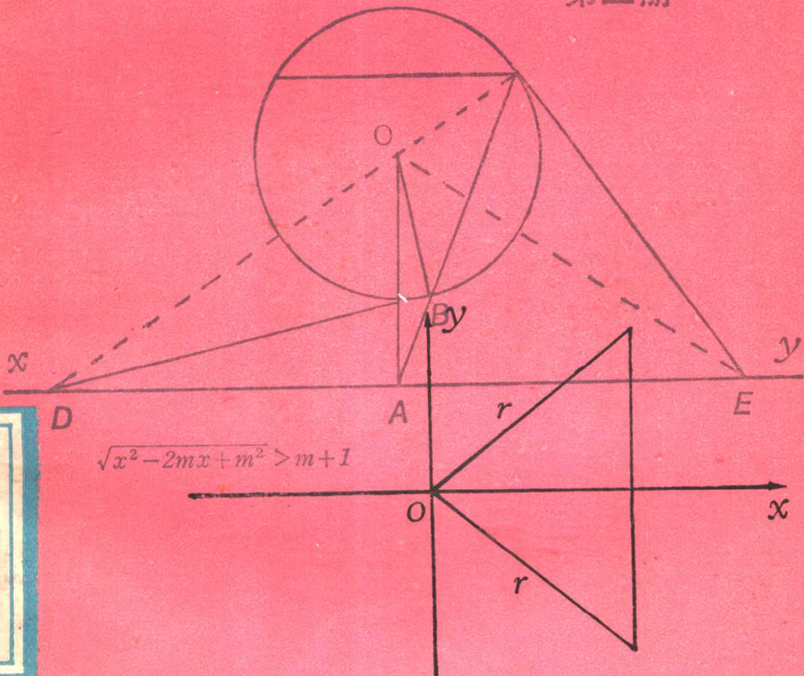
高中

数学题精编

代数

第三册



浙江教育出版社

高中数学题精编

代数

第三册

陶敏之 江焕棣 丁宗武
谢玉兰 钱孝华 许纪传

浙江教育出版社

高中数学题精编
代　数
第三册
陶敏之 江焕棣 丁宗武
谢玉兰 钱孝华 许纪传
*
浙江教育出版社出版
（杭州武林路125号）
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
*
开本 787×1092 1/32 印张 3 字数 65,000
1985年6月第一版
1985年6月第一次印刷
印数：00,001-70,000

统一书号：7346·259
定　价：0.34 元

说　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》(共四册)，主要帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便．出版以后印行四次，较受读者欢迎．这回吸取了广大读者的意见，并依据全日制六年制高中数学教材，对原书经过一番认真的筛选和修改，编为《高中数学题精编》．

在编写过程中，本着加强基础知识，训练基本技能的精神，选编习题力求新颖、灵活、多样，重视知识连贯和综合运用．与原书比较，在形式上，增加了选择题和填充题等类型题目；在每节习题前增加了〔分析与要点〕，在这部分里，我们并不求全，重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己学习的体会，以期对教与学都能稍有裨益．亦望以此与同志们共同探讨．

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用．其中A组属于基本题，B组略有提高或带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习．读者可根据实际情况灵活选用，不必强求一律．

一九八五年一月

目录

第一章 一元多项式和高次方程 ……1

一、一元多项式 ……1

二、高次方程 ……15

第二章 排列,组合,二项式定理 ……26

一、排列与组合 ……26

二、二项式定理 ……40

第三章 概率 ……52

答案与提示 ……67

第一章　一元多项式和高次方程

一、一 元 多 项 式

〔分析与要点〕

1　关于 x 的一元多项式，其形式一般按降幂排列为：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$(n\in N,\ a_n\neq 0,\ x\in C).$$

如无特殊说明，$a_i\in C(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$.

2　本单元重点是综合除法、余数定理和因式定理及其应用.

3　"零多项式"是一个十分重要、有用的概念，它与多项式的恒等密切相关. 要注意"零多项式"和"零次多项式"的区别：

	零次多项式	零多项式
定义	单独的一个非零常数 a_0	系数均为零的多项式
值域	非零数 a_0	零
次数	零次$(a_0=a_0x^0,\ x\neq 0)$	无确定次数
项数	单项式	无确定项数

4　余数定理可以表述为

$$f(x)=(x-b)\cdot q(x)+r,\ \text{其中}\ r=f(b).$$

这个定理揭示了余数 r 和函数值 $f(b)$ 之间的相等关系，它的作用有三：

(1) 由 $f(b)$ 而得到余数 r;

(2) 利用综合除法求余数 r 而得 $f(b)$;

(3) 引出因式定理.

5 因式定理给出了多项式 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$ 的充要条件是 $f(b)=0$, 从而得到了判断多项式 $f(x)$ 能否被 $x-b$ 整除的重要方法, 即考察 $f(b)$ 是否为零.

因式定理也为多项式的因式分解提供了新的工具.

6 带余除法的恒等式

$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ 至关重要, 其中被除式: $f(x)$, 除式: $g(x)$(非零多项式), 商式: $q(x)$, 余式: $r(x)$. 这里 $r(x)$ 的次数小于除式 $g(x)$ 的次数, 或者 $r(x)$ 是零多项式.

作为特例, 当 $g(x)$ 是一次式 $ax+b\ (a\neq 0)$ 时有

$$f(x)=(ax+b)\cdot q(x)+r, \quad \left(r=f\left(-\frac{b}{a}\right)\right).$$

7 以下定理在多项式代数中作用颇大:

定理 1: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv 0$ 的充要条件是 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$.

定理 2: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 的充要条件是 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\cdots$, $a_{n-1}=b_{n-1}$, $a_n=b_n$.

以上述定理为理论依据, 我们得到了多项式代数中的一个极为重要的方法——待定系数法. 待定系数法一般来说有两种:

(1) 将恒等式两边的字母(如 x)用适当的数值代入, 再解以系数为变量的方程组;

(2) 整理恒等式的两边, 比较两边次数相同项的系数(又称比较系数法).

例　若 $x^3=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$，求 a、b、c、d.

解一：分别令 $x=0, 1, 2, 3$，得

$$\begin{cases}-6a+2b-c+d=0,\\ d=1,\\ c+d=8,\\ 2b+2c+d=27.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=1,\\ b=6,\\ c=7,\\ d=1.\end{cases}$$

解二：$\because\quad x^3=ax^3+(-6a+b)x^2+(11a-3b+c)x+(-6a+2b-c+d)$，

比较两边系数，得：

$$\begin{cases}a=1,\\ -6a+b=0,\\ 11a-3b+c=0,\\ -6a+2b-c+d=0.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=1,\\ b=6,\\ c=7,\\ d=1.\end{cases}$$

（A）

一、选择题（1～10）

1．如果 $x^2=1-x$，则 $5x^4+6x^3-2x^2+2x$ 的值是

(A) $\dfrac{\sqrt{5}\pm3}{2}$；　　(B) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$；

(C) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{3}$；　(D)0.

答：（　　）

2．若 $4x^4-12x^3+5x^2+ax+b$ 是 x 的二次三项式的完全平方式，则

(A) $a=2, b=1$；　　(B) $a=1, b=2$；

(C) $a=6,\ b=1$; (D) $a=1,\ b=6$.

答：(　　)

3. 以 $3x-2$ 除多项式 $f(x)=3x^3-11x^2+18x-3$ 的商式为

(A) $3x^2-9x+12$; (B) x^2-3x+4;

(C) $3x^2-5x+8$; (D) x^2+3x+4.

答：(　　)

4. 已知 $f(x)$ 是 m 次多项式，$g(x)$ 是 n 次多项式，a 和 b 是两个不等于 0 的常数，若 $m=n$，则多项式 $af(x)+bg(x)$ 的次数为

(A) m; (B) n;

(C) 小于 m 或小于 n; (D) 以上结论都不对.

答：(　　)

5. 若多项式 x^3-5x^2+2x+8 能被 $x-a$ 及 $x-2a$ 整除，则 a 的值为

(A) $\frac{1}{7}$ 或 2; (B) 2; (C) $\frac{1}{7}$; (D) -1.

答：(　　)

6. $f(a)=0$ 是使多项式 $f(x)$ 有因式 $x-a$ 的

(A) 充要条件；

(B) 充分条件，但不是必要条件；

(C) 必要条件，但不是充分条件；

(D) 既不是充分条件也不是必要条件.

答：(　　)

7. 多项式 $f(x)=x^n+a^n$ 除以 $x+a$ 的余式为

(A) 0; (B) $2a^n$;

(C) 当 n 是奇数时，余式是 0，当 n 是偶数时，余式是 $2a^n$;

(D) $-2a^n$. 答：(　　)

8. 若多项式 $f(x)$ 用 $x-2$ 除，余数为 1；用 x 除，余数为 -1；则 $f(x)$ 用 $x(x-2)$ 除的余式为

(A) $x-1$；　(B) $x+1$；　(C) $x-3$；　(D) $x+3$.

答：(　　)

9. $6x^4-2x^3+7x^2+ax+b$ 除以 $2x^2+1$，余式为 $x-1$，其 a、b 值为

(A) $a=0,\ b=1$；　　(B) $a=1,\ b=0$；

(C) $a=1,\ b=2$；　　(D) $a=-1,\ b=1$.

答：(　　)

10. 将 $x^4+x^3-7x^2-x+6$ 分解因式，得：

(A) $(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$；

(B) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$；

(C) $(x+1)^2(x-2)(x+3)$；

(D) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$.

答：(　　)

二、填空题(11～20)

11. 已知 $f(x)=2x^3-7x^2+10x-6$，则 $f(1+i)=$____，$f(1-i)=$____，$f\left(\frac{3}{2}\right)=$____.

12. (1) 若 $x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，则 $x^5+x^4-10x^3-10x^2+2x+1=$______；

(2) 若 $x^2+x+1=0$，则 $x^3+2x^2+x+1=$______.

13. (1) 若 $x^2-3x+7=A(x+1)^2+B(x+1)+C$，则 $A=$____，$B=$____，$C=$____；

(2) 若 $2x^3-9x^2-x+3=A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)+D$，则 $A=$____，$B=$____，$C=$____，$D=$____；

(3) 若 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(Ax^2+Bx+C)^2$，

则 $A=$____，$B=$____，$C=$____.

〔注意〕 把多项式 $f(x)$ 改写成 $x+a$ 的多项式，除利用待定系数法外，还可用下列方法：

例 把多项式 x^3-4x^2+5x-3 改写成 $x-3$ 的多项式.

解一：换元法：令 $y=x-3$，则 $x=y+3$，于是

$$
\begin{aligned}
x^3-4x^2+5x-3&=(y+3)^3-4(y+3)^2+5(y+3)-3\\
&=y^3+5y^2+8y+3\\
&=(x-3)^3+5(x-3)^2+8(x-3)+3.
\end{aligned}
$$

解二：利用综合除法：

$$
\begin{array}{r|llll}
3 & 1 & -4 & +5 & -3\\
 & & +3 & -3 & +6\\
\hline
3 & 1 & -1 & +2 & \boxed{+3}\\
 & & +3 & +6 & \\
\hline
3 & 1 & +2 & \boxed{+8} & \\
 & & +3 & & \\
\hline
 & \boxed{1} & \boxed{+5} & &
\end{array}
$$

$\therefore$ $x^3-4x^2+5x-3=(x-3)^3+5(x-3)^2+8(x-3)+3.$

14．(1) 当 $x=1$、2、3 时，若多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的值分别为 2、4、6，那末此多项式 $f(x)=$____；

(2) 若多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 在点 0、1、2 时的值是同一个数，那末此多项式 $f(x)=$____；

(3) 已知多项式 $f(x)=x^2-mx+n$，且 $f(n)=m$，$f(1)=-1$，则 $f(-3)=$____.

15．用综合除法计算：

(1) $(3x^4-5x^3-4x^2+3x-2)\div(x-2)$,

商式＝____，余数＝____；

(2) $(x^4-1)\div(x+1)$,

商式＝____，余数＝____；

(3) $(3x^3-11x^2+18x-3)\div(3x-2)$,

商式＝____，余数＝____；

(4) $(4x^3+x^2)\div(x+1+i)$,

商式＝____，余数＝____．

〔注意〕 应用综合除法时，必须注意：(1) 将被除式按降幂依次排列(缺项要补零)；(2) 当除式是 $x-b$ 时，在综合除式的相应位置记的是 b(不是 $-b$)，因而长除法中的相减变为相加；(3) 用 $px\pm q$ $(p\neq0)$ 除 $f(x)$ 所得的商是用 $x\pm\frac{q}{p}$ 除 $f(x)$ 所得的商的 $\frac{1}{p}$ 倍，其余数是相等的．

16．(1) 已知 $f(x)=x^4-3x^2+2x-8$，$g(x)=x^2-2x+3$，

则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的商式 $Q(x)=$____，

余式 $R(x)=$____，

写成 $f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$ 的形式为

$f(x)=$____；

(2) 若除式 $g(x)=2x^2-x+3$，商式 $Q(x)=x^2-5$ 余式 $R(x)=3x+1$，则被除式 $f(x)=$____．

17．(1) 已知 $f(x)=x^5-12x^3+15x-7$，利用综合除法得 $f(6)$ ＝____；

(2) 已知 $f(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1$，则 $f(\sqrt{2}-1)=$____．

18．(1) x^3-2ax^2+1 除以 $x-a-1$(a 为常数)的余数为____；

(2) $k=$____时，多项式 $f(x)=x^3+kx^2-20x-4$ 除以 $x+2$ 的余数为 0；

(3) 若 $m^2x^3-3mx+1$ 能被 $x-2$ 整除，则 $m=$____；

(4) 若 $4x^3+Ax^2+Bx-25$ 能被 $2x^2-3x-5$ 整除，则 $A=$____，$B=$____；

(5) 若多项式 $x^5+ax^3+bx^2+c$ 有因式 $(x+1)^3$，则 $a=$____，$b=$____，$c=$____.

19. 若 x^3+px+q 能被 $(x-a)^2$ 整除，则 p、q 之间的关系式是____.

20. 分解因式：

(1) $3x^5+6x^4-2x^3-4x^2-x-2=$____；

(2) $x^3-6x^2+9x-4=$____；

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=$____；

(4) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=$____.

〔注意〕 (1) 本书分解因式是在复数集内进行；(2) 后两小题都是轮换对称式，其特点是字母轮换，原式不变，分解时必须利用轮换对称这一特点.

三、基本技能训练题(21～30)

21. (1) 已知等式 $(x^3+ax^2+bx+c)^2=(x^2-1)(x^2+px+q)^2+d$ 对一切 $x\in R$ 都成立，试求常数 a、b、c、d、p、q 的值；

(2) 若 x 无论为何实数，$\dfrac{ax^3-5x^2+bx+c}{2x^3-10x^2+3x-4}$ 的值恒为一常数，求 a、b、c 的值，并求此式的值.

22. (1) 用待定系数法证明：$f(x)=ax^2+bx+c$ 为完全平方式的充要条件是 $b^2-4ac=0$；

(2) 当 A、B 为何值时，$4x^4+Ax^3+Bx^2-40x+16$ 为完全平方式；

(3) 求证：ax^3+bx^2+cx+d 是一次二项式 $Ax+B$ 的三次方的必要条件是 $27a^2d=b^3$, $27ad^2=c^3$.

23．求证：

(1) 如果两个数除以第三个数的余数相同，则这两个数的差能被第三个数整除；

(2) 若 $m(x)$ 能整除 $f(x)-g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对于 $m(x)$ 有相同的余式；

(3) 设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数相同. 求证：若 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除，则 $g(x)$ 也能被 $f(x)$ 整除.

24．求证：多项式 $f(x)$ 除以 $ax+b\ (a\neq 0)$ 的余数为 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

〔**注意**〕 与余式有关问题的常用方法有：

(1) 利用余数定理：$f(x)$ 除以 $ax-b\ (a\neq 0)$ 的余数为 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$；

(2) 利用综合除法；

(3) 设 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式为 $h(x)$, 余式为 $r(x)$, 则 $f(x)=g(x)\cdot h(x)+r(x)$, 其中 $r(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数或 $r(x)$ 是零多项式，然后利用待定系数法.

例 求 $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-16x+1$ 除以 $(x+1)(x-2)$ 所得的余式.

解一：令 $f(x)=(x+1)(x-2)h(x)+ax+b$,

$\because\ f(-1)=b-a=36,$

$f(2)=2a+b=-15,$

解得
$$\begin{cases} a=-17, \\ b=19. \end{cases}$$

$\therefore$ 余式为 $-17x+19$.

解二:

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \quad\quad\ \ x^2-\ \ 5x+\ \ 9 \\
x^2-x-2\, \big) & x^4-6x^3+12x^2-16x+\ 1 \\
 & x^4-\ \ x^3-\ \ 2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -5x^3+14x^2-16x \\
 & \quad -5x^3+\ \ 5x^2+10x \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad\ \ 9x^2-26x+\ 1 \\
 & \quad\quad\quad\quad\ \ 9x^2-\ \ 9x-18 \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\ -17x+19
\end{array}
$$

∴ 余式为 $-17x+19$.

解三: 设 $x^4-6x^3+12x^2-16x+1=(x^2-x-2)(x^2+ax+b)+(cx+d)$, 右边展开得 $x^4+(a-1)x^3+(b-a-2)x^2+(c-2a-b)x+(d-2b)$.

比较两边的系数,得

$$
\begin{cases} a-1=-6, \\ b-a-2=12, \\ c-2a-b=-16, \\ d-2b=1. \end{cases}
\quad \therefore \quad
\begin{cases} a=-5, \\ b=9, \\ c=-17, \\ d=19. \end{cases}
$$

∴ 余式为 $-17x+19$.

25. 试求 b、c、d 的值,使多项式 $p(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 同时满足下列三个条件:

(1) 被 $(x-1)$ 整除;

(2) 被 $(x-3)$ 除时余 2;

(3) 被 $(x+2)$ 除与被 $(x-2)$ 除时余数相等.

26. (1) 确定 a、b 的值, 使 $6x^4-2x^3+7x^2+ax+b$ 除以 $2x^2+1$ 的余式为 $x-1$;

(2) 若 x^3+px+q 除以 $x+1$ 的余数是 -13, 除以 $2x-1$ 的

余数是$-\frac{35}{8}$，求p、q的值；

(3) 若三次式$f(x)$最高次项系数为1，它除以$x-1$时余数为3，除以x^2+1时余式是$x+2$，求这个三次式；

(4) 如$f(x)=6x^4+5x^3+2ax^2-bx+4$能被$x-1$整除，而被$x+2$除余数为30，求$a$、$b$；

(5) 用$(x-3)$和$(x-5)$去除一个关于x的整式，所得余数分别为4和8，求用$(x-3)(x-5)$去除这个关于x的整式所得的余式.

27．试应用因式定理证明：

如果$a\neq b$，那么多项式$f(x)$有因式$(x-a)(x-b)$的充要条件是$f(a)=f(b)=0$.

28．(1) 已知恒等式$x^2+2xy-8y^2\equiv(x+Ay)(x+By)$，求$A$、$B$；

(2) 已知恒等式$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3\equiv(x+4y+m)(x-2y+n)$，求$m$、$n$；

(3) 用待定系数法分解因式：

① $2x^2+xy-6y^2$，　　② $x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$.

29．将下列多项式分解因式：

(1) $x^6-10x^4+31x^2-30$；　(2) $x^6-6x^4y+9x^2y^2-4y^3$.

30．(1) 分解因式：$f(x)=x^5-2x^4-5x^3+14x+12$；

(2) x^4+x^2-6在下列范围中，因式分解的结果是什么形式：① 有理数时，② 实数时，③ 复数时.

（B）

31．(1) 已知$\frac{46+13x}{12x^2-11x-15}=\frac{A}{3x-5}+\frac{B}{4x+3}$，求$A$、$B$；

(2) 已知 $\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$，求 A、B、C。

32．试求 $(2-3x+x^2)^{1985}$ 展开式中各项系数之和.

33．已知多项式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+x$ 满足 $f(3)=3$，且对一切 $x\in R$，都有 $f(x)\geqslant x$，求 a、b 的值.

34．(1) 设整式 $f(x)$ 用 $x-1$ 除，余数为 3；用 $x-2$ 除，余数为 4，试求 $f(x)$ 用 x^2-3x+2 除的余式；

(2) 两个关于 x 的整式 $f(x)$、$g(x)$，它们除以 x^2-3x-4 时，余式分别为 $3x+2$ 和 $-4x+7$，求 $f(x)+g(x)$ 除以 $x-4$ 时的余数；

(3) 设 a、b、c 为相异的三个数，若整式 $f(x)$ 被 $x-a$、$x-b$、$x-c$ 除的余式分别是 a^2+b+c、$a+b^2+c$ 和 $a+b+c^2$，试求 $f(x)$ 被 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除的余式.

35．(1) 若 $x^4+px^3+qx^2+4$ 能被 x^2-1 整除，证明它也能被 x^2-4 整除；

(2) 若 $x^4+px^2+qx+a^2$ 能被 x^2-1 整除，问它还能被什么整式整除？

36．(1) $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ 能被 $x-a$、$x-2a$ 整除，求 a；

(2) 如果 $13x^3+mx^2+11x+n$ 能被 $13x^2-6x+5$ 整除，求 m、n；

(3) 若 x^3-px^2+3x+q 能被 $(x+1)^2$ 整除，求 p 和 q 的值；

(4) 确定 a 和 b，使多项式 ax^4+bx^3+1 能被 $(x-1)^2$ 所整除.

37．已知关于 x 的两个二次式

$$f(x)=x^2+(a^2-1)x-a^2,$$

$$g(x)=x^2+(a+1)x+a^3-4a^2-2a+2$$