自学成才 函授 夜大用书

高 等 数 学

下

南京工学院出版社

自学成才　函授　夜大用书

高等数学

（下）

吴学澄　黄炳生　许玉鸫　编
袁慰平　费月华　张明淳

江苏工业学院图书馆
藏书章

南京工学院出版社

内 容 提 要

本书在高等工科院校本科《高等数学》多年教学实践的基础上，根据函授、夜大及自学青年学习《高等数学》的特殊需要编写而成。全书分上、上两册，本书为其下册，主要内容有：数项级数、幂级数、傅氏级数、向量代数、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分及曲面积分等，各章并配有习题、思考题、阶段小结及自我检查题等，讲解详尽、通俗易懂。

本书可供高等教育自学考试和函授、夜大学作教材用，亦可供工科大专院校师生作参考书。

高 等 数 学

（下）

吴学澄　黄炳生　许玉筠
袁慰平　费月华　张明淳　编

*

南京工学院出版社　出版
江苏省新华书店发行
南京工学院印刷厂　印刷

*

开本：787×1092毫米　1/16　印张：$15\frac{10}{16}$　字数：370千字

1986年2月第一版　　1986年2月第一次印刷

印数：1——20,000册

统一书号：13409·002　定价：2.80元

高等数学下册目录

第八章　无穷级数

§ 8—1　常数项级数……(1)
§ 8—2　幂级数……(19)
§ 8—3　函数展开为幂级数……(27)
§ 8—4　幂级数在近似计算中的应用……(35)
§ 8—5　付立叶级数……(41)

第九章　向量代数与空间解析几何

§ 9—1　直角坐标系……(57)
§ 9—2　向量概念、向量的加减法、数量与向量的乘法……(62)
§ 9—3　向量的坐标表示式……(69)
§ 9—4　两个向量的数量积与向量积……(73)
*§ 9—5　三个向量的混合积……(79)
§ 9—6　空间曲面与曲线的方程……(81)
§ 9—7　平面方程……(92)
§ 9—8　直线方程……(98)
§ 9—9　几个重要的二次曲面的标准方程……(104)

第十章　多元函数及其微分法

§ 10—1　多元函数的概念……(112)
§ 10—2　多元函数的极限与连续……(118)
§ 10—3　偏导数和全微分……(122)
§ 10—4　复合函数及隐函数微分法……(131)
§ 10—5　高阶偏导数……(141)
§ 10—6　微分法的应用……(144)

第十一章　重积分

§ 11—1　二重积分的概念及性质……(162)
§ 11—2　二重积分的计算……(165)
§ 11—3　二重积分的应用……(174)
§ 11—4　三重积分的概念及计算……(179)

第十二章　曲线积分和曲面积分

§ 12—1　对弧长的曲线积分……(191)
§ 12—2　对坐标的曲线积分……(195)
§ 12—3　对面积的曲面积分……(200)
§ 12—4　对坐标的曲面积分……(203)
§ 12—5　曲线积分与二重积分的关系格林公式……(209)
*§ 12—6　奥氏公式、斯托克斯公式……(219)

下册习题答案……(225)

第八章　无穷级数

我们已经学过数列，有的问题要讨论它们的和。例如某工厂今年产值为20万元，计划今后每年增加产值2万元，问今后年10内该厂总产值为多少？第一年产值为22万，第二年为24万，……，第10年为$20+2\cdot 10=40$万。这样就形成一个等差数列22，24，，26，…，40。所求总产值S就是上述数列各项之和。根据等差数列求和公式得$S=\frac{22+40}{2}\cdot 10=310$（万元）。又如公比为$q$的等比数列$a$，$aq$，$aq^2$，…，$aq^{n-1}$各项的和为$S=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}$。这些数列都是有限项数列，前者10项，后者$n$项，其和分别为$22+24+\cdots+40$与$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$，称为有限项级数。而在实际问题中有许多无限项的数列也要讨论求它们的和的问题，这就是本章要讨论的无穷级数。无穷级数是用来表示函数和作数值计算的一种重要的数学工具，它在计算某些函数值和求某些微分方程的近似解以及研究周期现象等问题中有着十分重要的作用。

本章讨论无穷级数的基本概念，着重介绍幂级数和付立叶（Fourier）级数。

§8—1　常数项级数

1．无穷级数及其收敛与发散的概念

例1　圆的面积问题

圆面积问题早已解决，现在从另一角度再来讨论。

设圆半径为R，先在圆内作内接正方形，面积记为a_1，它是圆面积的一个近似值，再在正方形的每条边上作一个顶点在圆周上的等腰三角形，就得到四个等腰三角形（见图8—1—1），它们的总面积记为a_2，则a_1+a_2就是圆内接八边形面积，它与a_1比，是圆面积较好的一个近似值。同样再在八边形的每一条边上作顶点在圆周上的等腰三角形，得到八个三角形，其面积之和记为a_3，则$a_1+a_2+a_3$是圆面积更好的一个近似值，如此继续作下去就得到圆内接正2^{n+1}边形，其面积为$a_1+a_2+\cdots+a_n$，当圆内接正多边形的边数无限增多，即$n\to\infty$时圆内接2^{n+1}边形无限接于圆，于是$a_1+a_2+\cdots+a_n$的极限就是所要求的圆面积，它的表达式为

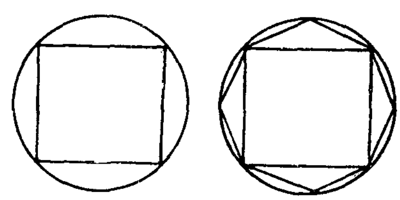

图8—1—1

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

其中每一项a_i都是常数，这种由无穷多项相加而成的表达式称为“无穷级数”。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

下面就一般情形给出无穷级数的定义。

定义 1　设有一无穷数列 u_1，u_2，…，u_n，…，其中 u_i 都是常数，则表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

就称为**无穷级数**，简称级数，简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

其中 u_1，u_2，…，u_n，…称为级数的**项**，u_n 称为**一般项**或**公项**。

例如

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

就是一个级数，其公项为 $u_n=\dfrac{1}{2^n}$。此级数简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$。因为级数的每一项都是常数，所以又称为常数项级数。

定义 2　设有无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

它的前 n 项之和记作 S_n，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为级数的第 n 部分和。如果 $n\to\infty$ 时 S_n 有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**收敛的**，并称 S 为级数的**和**，记作

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

或
$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$$

如果 $n\to\infty$ 时 S_n 没有极限，就称级数是**发散的**，也说级数没有和。

例 2　讨论级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

的收敛性。

解　取级数的第 n 部分和

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

这是公比为$\frac{1}{2}$的有限等比级数，故

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1$$

所以原级数收敛，其和为 1，即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

例 3　讨论级数

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots$$

的收敛性。

解　取级数的第 n 部分和

$$S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

这是一个公差 $d=2$ 的有限等差级数，故

$$S_n=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$，所以原级数发散。

例 4　讨论级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

的敛散性。

解　取级数的第 n 部分和

$$S_n=1-1+1+\cdots+(-1)^{n-1}$$

显然，n 为偶数时 $S_n=0$，n 为奇数时$S_n=1$，所以 $n\to\infty$时，S_n 没有极限。故原级数发散。

例 5　讨论等比级数（也称几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}=a+ax+ax^2+\cdots ax^{n-1}+\cdots$$

的敛散性，其中$a\neq0$。

解　取级数的第 n 部分和

$$S_n=a+ax+ax^2+\cdots+ax^{n-1}$$

它是有限等比级数，公比为 x，所以

$$S_n=\frac{a-ax^n}{1-x}=a\frac{1-x^n}{1-x}$$

下面分三种情况讨论

（1） 当$|x|<1$时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{a}{1-x}$$

故原等比级数收敛，其和为$\frac{a}{1-x}$。

（2） 当$|x|>1$时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-x^n}{1-x}=\infty$$

故原等比级数发散。

（3） 当$|x|=1$时，再分两种情况讨论

1） $x=1$，此时 $S_n=a+a+\cdots+a=na$

显然 $n\to\infty$时，$S_n\to\infty$故原等比级数发散。

2） $x=-1$，此时原级数为 $a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$由例 4 知发散。

归纳以上讨论得

$$\sum_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}\quad\begin{cases}\text{在}|x|<1\text{时收敛，和 }S=\dfrac{a}{1-x}\text{；}\\ \text{在}|x|\geqslant1\text{时发散，没有和。}\end{cases}$$

即等比级数在公比 x 的绝对值$|x|<1$时收敛，$|x|\geqslant 1$时发散。

2. 数级的基本性质和级数收敛的必要条件。

（1） 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和为$S$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum_{n=1}^{\infty}u_n=kS$$

其中 k 为任意常数。

证 取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 的第 n 部分和

$$S'_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n$$

故
$$\lim_{n\to\infty}S'_n=\lim_{n\to\infty}kS_n=k\lim_{n\to\infty}S_n=kS$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

（2） 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于$S$与$\sigma$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，

且
$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)\text{ 即 }(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n=S\pm\sigma$$

亦即收敛级数逐项相加或减所得的级数仍收敛，其和恰为原来两级数之和相加或相减。

证 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的第 n 部分和为

$$S_n=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)$$
$$=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)$$

故
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)]=S\pm\sigma$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与丢掉它的前m（定数）项而构成的级数 $\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$有相同的收敛性与发散性。

证 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的第 $N=n+m$ 部分和为 $S_N=u_1+\cdots+u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{m+n}$

$\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$ 的第 n 部分和为 $S_n=u_{m+1}+\cdots+u_{m+n}$

它们之间的关系为 $S_N=u_1+u_2+\cdots+u_m+S_n$

其中$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_m$是固定的有限项的和，是与 n 无关的常数。

当 $n\to\infty$就有$N=n+m\to\infty$，由上式得

$$\lim_{n\to\infty}S_N=\lim_{n\to\infty}[(u_1+u_2+\cdots+u_m)+S_n]$$
$$=(u_1+u_2+\cdots+u_m)+\lim_{n\to\infty}S_n$$

可见，左边极限存在就必然得出右边极限存在，即由$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛可推出 $\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$收敛。同样左边极限不存在时，就必然得出右边极限也不存在，所以从$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散可推出 $\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$发散；反之从右边极限存在与否，也必然得出左边极限存在与否，即从 $\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$的敛散性得出$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性。证毕

（4） 收敛级数在项之间加括弧后所生成的新级数收敛于原来级数的和。
证明留给读者。

（5） 级数收敛的必要条件，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛则公项u_n在$n\to\infty$时趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

证　分别取级数的第 n 部分和 S_n 与第 $n-1$ 部分和 S_{n-1}

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

因为级数是收敛的，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

而　$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

故　$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \quad \text{证毕}$$

由此可知，只要 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 不为零，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散。例如级数 $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 的公项 $u_n=(-1)^{n-1}$ 的极限不为零，所以这级数发散。这种判别发散的方法就比例 4 用定义判别来得简单。但请注意，这个性质只是级数收敛的必要条件而非充分条件，也就是说当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 时，级数可能收敛也可能发散。

例 6　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 称为调和级数。它的公项 $u_n=\frac{1}{n}$ 以零为极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却是发散的，因为它有如下一些部分和

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$S_4 = S_{2^2} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+2\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_8 = S_{2^3} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = 1+3\cdot\frac{1}{2}$$

一般有　$S_{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k} \geqslant 1+k\cdot\frac{1}{2}$

当 $2^k\to\infty$ 即 $k\to\infty$ 时，$S_{2^k} \geqslant 1+\frac{k}{2}\to\infty$，所以 S_n 不可能有极限，因此调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

思　考　题

下列各种说法对吗？若不对请讲清理由或举例说明

1　因为任意 多项的和 $u_1+u_2+\cdots+u_n$ 总是存在的，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和也总是存在的。

2　当 $u_i>0(i=1, 2, \cdots)$ 时，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和是无穷多个正数相加，所以越加越大，其和就必为无穷大。

3　级数 $u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{n-1}+u_n+\cdots$ 与级数 $(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+$ $+(u_{2n-1}+u_{2n})+\cdots$ 收敛性相同。

习　题　一

1　写出级数的第 4 部分和

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n}$　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{2n^n}$　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

2　判断下列级数是否收敛

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4^n}$　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(3n+2)$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}n!$　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}$

3　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，讨论下列级数是否收敛。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}10^3u_n$　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\frac{1}{10}\right)$

根据前面所讲，常数项级数可分成收敛与发散两类，拿到一个级数后首先要判断它的敛散性，下面就最重要的正项级数讲起。

3． 正项级数及其收敛判别法

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

级数 $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

其中 $u_n\geqslant 0$ ($n=1, 2, \cdots$)，称为**正项级数**，我们介绍如下几个判别敛散的定理。

定理 1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有界。

证　必要性：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$收敛，则部分和数列$\{S_n\}$一定有极限，其中 $S_2=u_1+u_2$，…

$S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$，即 $\lim S_n=S$。根据数列极限的知识知道$\{S_n\}$一定有界。

充分性：若$\{S_n\}$有界，又因为 $u_n\geqslant 0$，所以 $S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots$即$\{S_n\}$是单调数列，由单调有界数列 $\{S_n\}$ 必定有 极限知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。证毕

这个定理告诉我们，判断一个正项级数是否收敛时可以不必按定义去求 S_n 的极限，而只要判断$\{S_n\}$是否有界就可以了。

例 7　判断级数

$$\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+2}+\frac{1}{5^3+3}+\cdots+\frac{1}{5^n+n}+\cdots$$

的敛散性。

解　这是一个正项级数，而

$$S_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+2}+\cdots+\frac{1}{5^n+n}<\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}$$
$$=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n<\frac{1}{4}$$

可见$\{S_n\}$有界，所以原级数收敛。

用定理 1 判断级数的敛散性固然比用定义判断来得方便些，但仍需要用到对S_n的估计，这往往也不很方便，下面介绍只靠级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的公项$u_n$来判断级数敛散性的法则。

定理 2（比较判别法）设

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad ①$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \qquad ②$$

是两个正项级数。

（1）　若 $u_n\leqslant v_n$ ($n=1, 2, \cdots$)，且级数②收敛。则级数①也收敛；

（2）　若 $u_n\geqslant v_n$ ($n==1, 2, \cdots$)，且级数②发散。则级数①也发散。

此定理中：（1）说明，公项大的级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，公项小的级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。（2）说明，公项小的级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散时，公项大的级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

下面先举几个应用定理 2 的例子，然后再证明它。

例 8　判断 p 级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \qquad ③$$

的敛散性。

解　$p=1$ 时，它就是调和级数，已知是发散的。

$p<1$ 时，取 $v_n=\frac{1}{n}$

取$u_n=\frac{1}{n^p}$

则　$u_n=\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}=v_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，故由定理 2 知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$是发散的。

$p>1$ 时，把 p 级数③重新组合成新级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots \qquad ④$$

其中每个括弧作为级数④的一项。由于③与④都是正项级数，所以它们的敛散性是完全相同的*。针对级数④构造级数⑤如下

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots \qquad ⑤$$

显然级数④的公项小于级数⑤的公项，而级数⑤实际上就是

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

它是公比为　$\frac{1}{2^{p-1}}<1$（因 $p>1$）的几何级数，所以是收敛的。

因此由定理 2 知级数④收敛，故级数③收敛。

归纳上面讨论得 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad\begin{array}{l}\text{在 } p>1 \text{ 时收敛}\\ \text{在 } p\leqslant 1 \text{ 时发散}\end{array}$$

今后在使用定理 2（比较判别法）时，常常把调和级数、几何级数、p 级数作为用以比较的级数。

---

* 作为练习，请读者自己证。

讨论级数的敛散性时先对$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$作初步估计，以$\frac{1}{n}$作为一阶无穷小，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，$p\leqslant 1$时是发散的，而$p>1$时是收敛的，即$u_n$为一阶或低于一阶无穷小时，估计级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，$u_n$是高于一阶 无穷小时 估计级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。我们就以此作为初步估计。若估计得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，就要找一个满足$u_n\leqslant v_n$的收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与之比较；反之估计得$\sum\limits_{n=1}^{8}u_n$发散，就要找一个满足$u_n\geqslant v_n$的发散 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与之比较。然后得出级数是收敛还是发散的正式结论。

例9　判断级数 $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\frac{3}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$的敛散性。

解　第一步估计

$u_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$略去分母的次要成分（1与$n$比是要小得多的次要成分。2，3也如此）得$\frac{n}{n\cdot n\cdot n}=\frac{1}{n^2}$，是$\frac{1}{n}$的二阶无穷小（高于一阶），所以原级数初步估计为收敛。

第二步 找满足$u_n\leqslant v_n$的收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$。

由　$u_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}<\frac{n}{(n+0)(n+0)(n+0)}=\frac{1}{n^2}$知，可取$\frac{1}{n^2}$作为$v_n$，于是$u_n<v_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的$p$级数。所以由比较判别法知原级数收敛。

例10　判断$\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}+\cdots$的敛散性

解　第一步估计

$n_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，略去分母的次要成分得$\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}=\frac{1}{n}$，是一阶无穷小，所以原级数初步估计为发散。

第二步，找满足　$u_n\geqslant v_n$的发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$

由　$u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}}=\frac{1}{n+1}$知，　可取　$v_n=\frac{1}{n+1}$于是　$u_n>v_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$是缺第1项的调和级数，是发散的。所以由比较判别法知原级数发散。

例11　证明 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$是收敛的。

解　原级数$=\frac{1}{(l_n2)^2}+\frac{1}{(l_n3)^3}+\cdots+\frac{1}{(l_n7)^7}+\frac{1}{(l_n8)^8}+\cdots$

公项　$u_n=\frac{1}{(l_nn)^n}=\left(\frac{1}{l_nn}\right)^n$只要 $n>7$ 就有 $l_nn>2$

此时，　$u_n=\left(\frac{1}{l_nn}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n=v_n$　。

舍去原级数的前六项得新级数

$$\frac{1}{(l_n8)^8}+\frac{1}{(l_n9)^9}+\frac{1}{(l_n10)^{10}}+\cdots$$

根据级数的基本性质（3）知，这两个级数敛散性相同。

但把新级数与级数

$$\sum_{n=8}^{\infty}v_n=\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{10}}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

比较，Σv_n 是公比为$\frac{1}{2}$的收敛的几何级数，且$u_n=\frac{1}{(l_nn)^n}<\frac{1}{2^n}=v_n$，所以由比较判别法知新级数收敛，故原级数也收敛。

定理 2 （比较判别法）的证明

记　$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的第 n 部分和分别为

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=S_n$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=S_n^*$$

（1）　因为$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，令其和为 S^*，又因 $u_n\leqslant v_n$，故

$$S_n\leqslant S_n^*\leqslant S^*$$

所以 S_n 有界，由定理 1 可知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

（2）　因为$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，所以 S_n^* 无界，又因 $u_n\geqslant v_n$，故

$$S_n\geqslant S_n^*$$

所以 S_n 也是无界的，因而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。　　证毕

用比较判别法判断级数的敛散性，虽比用定理 1 及定义判断都方便些，但毕竟要先估计又要找适当的级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 来比较，所以还是相当麻烦的，下面介绍使用起来更为方便的比率判

别法。

定理 3 （比率判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

则 $\rho<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

$\rho>1$ （或 $\rho=\infty$）时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

$\rho=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散。

证 $\rho<1$ 时，总可选取适当小的正数 ε，使 $\rho+\varepsilon=r<1$。由极限定义知，存在正整数 N，在 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon \text{ 成立，即}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r \quad (n=N+1,\ N+2,\ \cdots)$$

成立，由此得

$$u_{N+2}<u_{N+1}r$$

$$u_{N+3}<u_{N+2}r<u_{N+1}r^2$$

$$u_{N+4}<u_{N+3}r<u_{N+1}r^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

现在用不等式右端的项组成一个级数

$$u_{N+1}r+u_{N+1}r^2+\cdots$$

它是以 $r<1$ 为公比的几何级数，是收敛的。由比较判别法可知级数 $u_{N+2}+u_{N+3}+u_{N+4}+\cdots\cdots$（由不等式左端的项组成）收敛。级数 $\sum_{u=N+2}^{\infty} u_n$ 只比原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 少了前面 $N+1$ 项，而 N 是一个定数，因此可知原级数也收敛。

$\rho>1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$，总可选取适当小的正数 ε，使 $\rho-\varepsilon=r>1$，根据极限定义知，存在正整数 N，，在 $n>N$ 时就有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$ 成立，故 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon=r>1$ $(n=N+1,\ N+2,\ \cdots)$

故

$$u_{N+2}>u_{N+1}r>u_{N+1}$$

$$u_{N+3}>u_{N+2}r>u_{N+2}$$

$$u_{N+4} > u_{N+3} r > u_{N+3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

可见 u_n 从第 $N+1$ 项开始逐项增大，所以公项 u_n 不趋于零，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

$\rho=\infty$ 时，根据无穷大量定义知，存在正整数 N，在 $n>N$ 时就有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$ 成立，故 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ $(n=N+1, N+2, \cdots)$，即

$$u_{N+2} > u_{N+1}$$

$$u_{N+3} > u_{N+2}$$

$$u_{N+4} > u_{N+3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所以公项 u_n 不趋于零，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

$\rho=1$ 时，级数可能收敛，也可能发散。例如 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，不论 p 为何值，都有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$$

即 ρ 始终为 1。但 $p>1$ 时级数收敛，而 $p\leqslant 1$ 时级数发散。所以比率法的极限为 1 时不能判断级数的敛散性，这时必须用其它方法来讨论。证毕

例12　判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$$

的敛散性。

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$$

由比率判别法知所给级数收敛。

例13　判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad (x>0)$$

的敛散性。

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}=x$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com