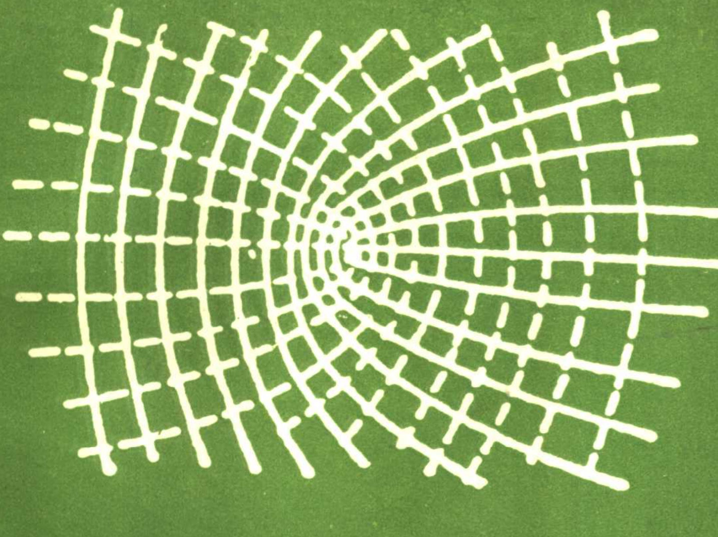
全国高等教育自学考试指导委员会
物理专业委员会建议试用教材

数学物理方法
自学指导书

徐世良　编



電子工業出版社

内 容 简 介

本书系《理论物理自学丛书》之一．它是与梁昆淼教授编写的《数学物理方法》相配套的自学指导书，也可单独使用．本书在章节的安排及内容都和"教材"相一致．每一章节首先简述该章节的基本理论和基本公式，然后着重讲解题方法和例题，最后是习题与解答．

本书不仅可供自学者使用，也可供成人教育和全日制高校的师生，以及工程技术人员参考．

数学物理方法自学指导书

徐世良 编

责任编辑：宋玉升

*

电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路）

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

山东电子工业印刷厂印刷（淄博市周村）

*

开本：850×1168毫米1/32　印张：9.75　字数765千字

1989年 3 月第一版　　1989年 3 月第一次印刷

印数1—4500册　定价：4.80元

ISBN7-5053-0481-X/O·5

自学高考物理专业委员会

致读者

高等教育自学考试物理专业本科阶段设有理论力学、热力学与统计物理学、电动力学、量子力学以及数学物理方法等课程。这些课程理论要求较高，全日制高校的学生学习起来，也是不轻松的。对这些课程，国内已先后出版了许多很好的教科书，但这些教科书都是与系统讲授并辅之以其他辅助教学环节这种教学方式相适应的，对自学不尽合用。自学高考的考生及有志于提高自己物理素养的各方面读者，很切望有一套与现有教材相比有不同特点的、比较适合于自学的理论物理自学教材供他们使用。值得高兴的是，许多高校有经验的教师、专家和许多出版社都热情支持理论物理自学教材的出版工作。课程的自学考试大纲只规定了每门课程的自学和考试的要求，不同的作者根据大纲编写的教材，还能反映作者对课程内容的理解和体会，还有他自己的讲述方式和自己的特色。我们认为，发动社会力量编写和出版符合大纲要求的、不同风格的理论物理自学教材供读者选用，无疑是有益的。电子工业出版社组织的这套《理论物理自学丛书》将是最早出版的一套，《丛书》的内容符合自学考试大纲的要求，并力求适应自学的特点。

物理专业委员会将这套《理论物理自学丛书》作为自学考试“建议试用”教材之一，愿这套自学丛书对自学考试、成人教育，对工程技术人员和全日制高校的教师和学生都有裨益。

全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会

一九八七年四月

理论物理自学丛书前言

当前，在全国范围内，学习先进自然科学和先进技术科学的热潮正在高涨。这套《理论物理自学丛书》就是为适应广大读者自学的需要而编写的。

理论物理学不仅是物理学的精华，也是很多自然科学如化学、生物学、天文学和地质学等的理论基础。同时，理论物理学又是现代许多技术科学如电子学、材料科学、半导体技术和激光技术等的理论基础。为了学习物理学本身，为了学习有关的自然科学和技术科学，都必须首先掌握一定数量的理论物理学的知识。我们充分认识到当前理论物理学的重要地位，所以我们首先给各界读者提供这套《理论物理自学丛书》。

《理论物理自学丛书》主要是为各界自学读者编写的。它的读者对象有三个方面：第一是需要知识更新的实验物理学工作者和广大物理教师；第二是为了掌握本门学科的现代知识而要求学习理论物理的生物学、化学工作者和技术科学工作者；第三是有志于自学成材的广大青年。这套丛书的取材内容大体上相当于综合性大学物理专业的理论物理课程，包括了全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会颁布的理论物理课程考试大纲的全部内容。《丛书》的编写方法则尽量适应自学的特点。因此，我们想，这样一套《丛书》对广大在校学生也可能有所裨益。

《理论物理自学丛书》一共十本，包括理论物理中的四门课程，即“理论力学”，“热力学与统计物理学”，“电动力学”和“量子力学”，以及一门数学课程“数学物理方法”，每门课程有一本课本和一本自学指导书。

每门课程的课本是一本完整的和系统的教材。它的内容大体

上与综合性大学或师范院校的相应课程内容相同，属于理科教材的性质。我们说适应其他自然科学和技术科学的需要，主要是向这些方面的读者提供他们所需要的理论物理的基础知识，并不涉及这些学科本身的内容。为适应自学的特点，我们力求把课本写得活泼一些，如概念的讲解比较细致周到，对重点和难点部分给予更多的注意，对学习方法加以一定的引导，附有一定数量的例题和习题，有些重要的预备知识以附录的形式给出等等。我们希望在课本中适当地写进一些通常教材中不写而在讲堂上要讲的内容。

自学指导书则对于课本的自学给予更为具体的指导。如果说课本中应该突出学科的主线，不宜用过多的题外话去打断主要思路的发展的话，那么自学指导书就不受这个限制。在自学指导书中可以对重点和难点内容给以更多的讲解，对自学方法给以更多的指导，可以用思考题等形式讨论一些疑难问题，可以给出更多的例题和习题，对解题的方法和思路给以更多的指导和训练，也可以给出一些学习中需要的补充材料等等。此外，我们还希望自学指导书能适当地具有一定的相对独立性，使利用其他教材作为自学课本的读者，也能从这套自学指导书中得到一定的收获。

学习理论物理学的起点本来应该是学过大学本科物理专业的高等数学和普通物理课程(即力学，分子物理和热学，电磁学，光学和原子物理学)。为适应自学读者的情况，我们把这套《理论物理自学丛书》的起点略为放低一些。我们希望学过工科的高等数学（例如樊映川的书）和工科的普通物理(例如程守珠和江之永的书)的读者也能开始自学这套丛书。为此，我们在课本和自学指导书的编写上都作了一些安排，以便使更多的读者能够通过自学掌握理论的内容。当然，这也要求读者付出更大的努力和作出一些适当的安排(例如承认其些预备知识中的结论和公式，对课本一些内容降低一点要求等等)。

我国实行高等教育自学考试制度，全国高等教育自学考试委

员会物理专业委员会已于1984年正式成立，物理专业的考试已经开始，特别是已对具有专科学历的读者已开始本科证书的考试（本丛书中的五门课是这一考试的主要内容）。我们希望自学这套《丛书》的读者踊跃参加单科系统的考试，取得合格证书。也希望那些具有专科学历的读者和已取得专科合格证书的读者再接再励按着这套自学丛书，争取取得本科毕业的资格。

祝大家自学成功！

喀兴林

1987年1月

序　言

我国正在实行高等教育自学考试制度，全国高等教育自学考试指导委员会物理专业委员会亦已成立。为了使广大读者能更好地自学理论物理课程，梁昆淼教授编著了供广大读者自学用的《数学物理方法》教材，配合该《教材》，作者受嘱编写了这本《数学物理方法学习指导书》。

本书无论在章节的编排上还是在所涉及的内容上都和《教材》相一致。为了使读者更好地消化《教材》的内容以及便于读者单独地阅读本书，本书编写的要点是：对于每个章节，大致分三个层次，首先简述《教材》中该章节的基本原理与基本公式，但基本公式的序号则不同于《教材》而自成体系；其次，以较多的篇幅着重写了解题指导与例题，所用公式的序号均为本书所编的公式序号；最后是习题与解答，《教材》中的所有习题本书均给出了解答或提示，除沿用《教材》的习题题号外，本书还另给了习题序号，二者的顺序是相同的。

梁昆淼教授为本书审稿并提了许多宝贵意见，金行建同志为本书绘制了全部插图，谨致衷心的谢意。

由于篇幅的限制，解题指导难免挂一漏万；加之作者水平有限，错误和不妥之处一定不少，敬请读者批评指正。

徐世良

1987.7于南京大学信息物理系

目　　录

第一章　矢量分析

严格地说，本章并不属于数学物理方法的范畴，而是属于高等数学的内容；但由于简明高等数学教程中往往略去矢量分析部分，这就给需要学习数学物理方法的读者带来很大的困难，因此，在介绍数学物理方法之前，先学习矢量分析是非常重要的。

§1.1　标量场的梯度

一、基本理论与基本公式

1. 场的概念　发生物理现象的空间部分称为物理场，如果发生的物理现象是数量性质的，即只用数值就可以描述的场称为标量场。

2. 标量函数 $u(x, y, z)$ 沿(矢量) $\overline{P_0P}$ 的方向在点 P_0 的变化率，即方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1-1-1}$$

其中 α、β、γ 为 $\overline{P_0P}$ 方向的方向角(即 $\overline{P_0P}$ 与坐标轴正方向的交角，如图1-1所示)，并记 $\overline{P_0P}=\Delta s$。

3. 方向导数的计算公式(1-1-1)还可表为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla u=\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}u \tag{1-1-2}$$

注意：上式表示 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数。

4. 标量场 $u(x, y, z)$ 在某点的梯度记作

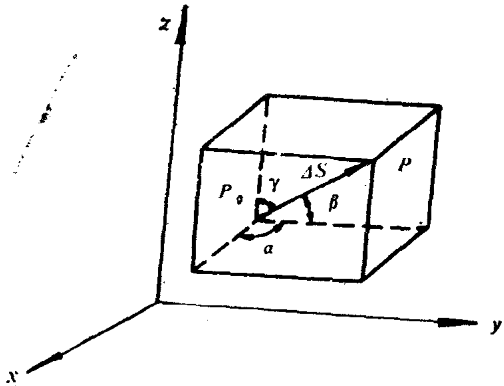


图1-1

$$\mathrm{grad}u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-1-3}$$

标量场的梯度是一个矢量场；在每一点，梯度的方向是沿着对应的等量面（线）的法线方向， 而它的模等于该点的最大的方向导数（即该法线方向的方向系数）。注意：（i）由(1-1-2)可知其它方向的方向导数都等于梯度在该方向的投影。（ii）(1-1-3)式就是梯度的计算公式。

5．梯度的运算规则

$$\mathrm{grad}(c_1u + c_2v) = c_1\mathrm{grad}u + c_2\mathrm{grad}v \tag{1-1-4}$$

$$\mathrm{grad}(uv) = u\mathrm{grad}v + v\mathrm{grad}u \tag{1-1-5}$$

$$\mathrm{grad}u[v(x, y, z)] = \frac{du}{dv}\mathrm{grad}v \tag{1-1-6}$$

二、解题指导与例题

例1 方向导数与等量面的关系怎样？

解 在三维标量场 $u(x, y, z)$ 中，首先研究当点的位置改变时，标量函数 $u(x, y, z)$ 如何变化。为此，我们考察任意一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，且过 P_0 引一等量面 $u(x, y, z)=C$，其中 C 为常数、$C=u(x_0, y_0, z_0)$；设其邻近的等量面为 $u(x, y, z)=C+\Delta C$（见图1-2）。

当点 P_0 移到点 P 时，标量函数 $u(x, y, z)$ 的增量 $\Delta u=\Delta C$，值得注意的是：这个增量和 P 点在这个邻近等量面上的位置无关；即从等量面 C 上的任意一点 P_0 出发，不管是沿 $\overline{P_0Q}$、$\overset{\frown}{P_0Q}$、$\overline{P_0P}$、$\overline{P_0R}$ 还是沿 $\overset{\frown}{P_0R}$ 到达等量面 $C+\Delta C$，其增量都等于 ΔC。

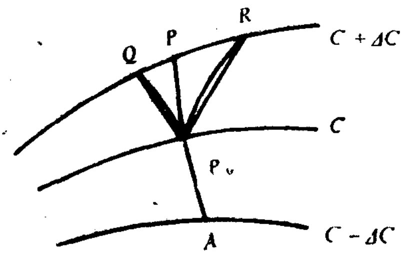


图1-2

另一方面，函数 $u(x, y, z)$ 在线段 P_0P 上的平均变化率 $\dfrac{\Delta u}{P_0P}$ 则和等量面 $C+\Delta C$ 上 P 点的位置有关了。显然，在线段 P_0P 的长为最短的方向上，也就是在邻近等量面 $C+\Delta C$ 的法线方向上，这个平均变化率达到最大值。

当点 P 逼近于点 P_0 而 P_0P 保持不变的方向时，则 $\Delta x=\Delta C$ 将逼近于零，而通过点 P 的等量面渐渐和通过 P_0 点的等量面重合；如极限 $\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{\Delta u}{P_0P}$ 存在，这就正是标量场 $u(x, y, z)$ 在点 P_0 沿 P_0P 方向的方向导数。

如果用通过 P_0 点的任意曲线的弧 P_0R 来代替沿着它考察函数变化的直线段 P_0P，那么，标量 $\dfrac{\Delta u}{P_0R}$ 的极限就是函数 $u(x,y,z)$ 沿这曲线上 P_0 点切线方向的变化率。其次，如在 P_0 点有公

切线P_0P的任何曲线P_0Q、P_0R等，那么，$\lim\limits_{R\to P_0}\dfrac{\Delta u}{P_0R}=\lim\limits_{Q\to P_0}\dfrac{\Delta u}{P_0Q}$ $=\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{\Delta u}{P_0P}$，也就是说$\dfrac{\Delta u}{P_0R}$的极限值完全取决于$P_0$点的切线方向，而与考察函数变化的曲线的性态无关。

纵上所述，方向导数只和P_0点在空间的位置(在哪一个等量面上)及矢量$\overline{P_0P}$(切线)的方向有关，而与研究函数$u(x, y, z)$沿着它变化的曲线的形状无关，只要求P_0P是这些曲线的切线就行了。其实，这个结论也可由公式(1-1-1)直接得到：在该式的右端，首先它含有偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$在点$P_0$的值，这些值只由点$P_0$的坐标(空间位置)确定；其次含有量$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，即含有点$P_0$的切线的方向余弦。

总之，等量面越密集之处(即$u=C$与$u=C+\Delta C$沿法线方向间距越短之处)梯度越大。梯度在某方向的投影即为该方向之方向导数，所以等量面越密切之处方向导数越大，越靠近法线方向的方向导数越大。

例2 什么方向的方向导数最大？什么方向的方向导数最小？什么方向的方向导数等于零？

解 由公式(1-1-1)可知，在P_0点的所有的方向导数中，以垂直于等量面而指向函数值增大的那一侧(即梯度方向)的方向导数为最大，也就是沿等量面法线方向的方向导数为最大(从例1的分析中亦可看出)。

显然，沿梯度方向及方向的方向导数最小；沿等量面切线方向的方向导数等于零。

例3 证明 $\mathrm{grad}(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\mathrm{grad}u_1+c_2\mathrm{grad}u_2$.

证明 $\mathrm{grad}(c_1u_1+c_2u_2)$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(c_1u_1+c_2u_2)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(c_1u_1+c_2u_2)$$

$$+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(c_1u_1+c_2u_2)$$

$$=\boldsymbol{j}\frac{\partial(c_1u_1)}{\partial x}+\boldsymbol{i}\frac{\partial(c_2u_2)}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial(c_1u_1)}{\partial y}$$

$$+\boldsymbol{j}\frac{\partial(c_2u_2)}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(c_1u_1)}{\partial z}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(c_2u_2)}{\partial z}$$

$$=\boldsymbol{j}c_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+\boldsymbol{j}c_1\frac{\partial u_1}{\partial y}+\boldsymbol{k}c_1\frac{\partial u_1}{\partial z}+\boldsymbol{i}c_2\frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$+\boldsymbol{j}c_2\frac{\partial u_2}{\partial y}+\boldsymbol{k}c_2\frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$=c_1\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)$$

$$+c_2\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)$$

$$=c_1\,\mathrm{grad}\,u_1+c_2\,\mathrm{grad}\,u_2.$$ 得证。

这里用到和的导数等于导数的和、常数因子可以移到导数号之外的性质。

例4 证明 $\mathrm{grad}\ u[v(x,y,z)]=\frac{du}{dv}\mathrm{grad}\,v$.

证明 $\mathrm{grad}\,u[v(x,y,z)]$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\{u[v(x,y,z)]\}$$

$$+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}\{u[v(x,y,z)]\}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\{u[v(x,y,z)]\}$$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial v}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial v}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial v}\mathrm{grad}v. \quad \text{得证。}$$

这里用到复合函数求导数的性质。

例5　求标量函数 $u(x, y, z) = 2x^3 - 3yz$ 在点(2，1，3)沿方向(2，1，2)的方向导数。

解　方向导数的计算公式（1-1-1）的右边其实是矢量 $\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$ 的数量积，即

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma)$$

$$= \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}u$$

在点(2，1，3)，其梯度为

$$\mathrm{grad}u = \boldsymbol{i}(bx^2)|_{x=2} + \boldsymbol{j}(-3z)|_{z=3} + \boldsymbol{k}(-3y)|_{y=1}$$

$$= 24\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

在点(2，1，3)沿方向(2，1，2)的方向余弦，即单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$$

$$= \boldsymbol{i}\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} + \boldsymbol{j}\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} + \boldsymbol{k}\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

因此，在点(2，1，3)沿(2，1，2)方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right)\cdot(24\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{48}{3} - \frac{9}{3} - \frac{6}{3} = 11$$

例6 求标量场 $u=\sin x+e^{xy}+z$ 的梯度。

解 根据公式(1-1-3)，先计算偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x+ye^{xy},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^{xy},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=1$$

故该标量场的梯度为

$\mathrm{grad}u=\boldsymbol{i}(\cos x+ye^{xy})+\boldsymbol{j}xe^{xy}+\boldsymbol{k}$. 结果为矢量。

例7 证明 $\mathrm{grad}r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，n 为任意实数，而 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$.

解 先求偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{d}{dr}(r^n)\frac{dr}{dx}=(nr^{n-1})\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=nxr^{n-2},$$

同理 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=nyr^{n-2},\qquad \dfrac{\partial u}{\partial z}=nzr^{n-2}$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}r^n&=\boldsymbol{i}(nxr^{n-2})+\boldsymbol{j}(nyr^{n-2})+\boldsymbol{k}(nzr^{n-2})\\&=nr^{n-2}(\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)\\&=nr^{n-2}\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$ 得证。

例8 在方向导数的公式(1-1-2)中，运算符号 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla$ 作用于标量函数 u. 人们也常常用这类运算符号作用于矢量函数，例如 $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$，这意味 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_x+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_y+\boldsymbol{k}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_z$. 试证明 $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$

解 运算符号 ∇ 在形式上犹如“矢量”：

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\tag{1-1-7}$$