初中代数

江苏科学技术出版社

初 中 代 数

陈汉光 编

江苏科学技术出版社

初 中 代 数

陈汉光 编

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：南 京 人 民 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张19 字数 420,000

1984 年11月第 1 版 1984 年11月第 1 次印刷

印数 1—12,600 册

书号 7196・033 定价 2.25 元

责任编辑 沈绍绪

特约编辑　沈　超　畦秋生

内 容 简 介

本书包括初中代数全部内容。全书通俗易懂，对解题的方法和技巧作了必要的介绍，典型例题进行评注，对常见错误和容易混淆的地方，都分别作了阐明，以增强解题能力，帮助读者开拓思路。为便于自学，每节内容之后都附有练习、习题，并在书末给出全部习题答案。

本书可供广大中学师生、干部、职工阅读参考。

目　　录

第一章　预备知识

第一节　整　数

一、自然数和零

在数物体的时候，表示物体个数的 1 、 2 、 3 、…，称为**自然数**。一个物体也没有，可以用 0 表示。0 是一个数， 0 不是自然数。

自然数中最小的数是 1 ，自然数没有最大的数。1 是自然数的基本单位，也是计数的基本单位。个、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿…都是计数单位。每相邻两个计数单位之间的进率通常都是十，这就是"逢十进一"的十进制计数法。

0 、 1 、 2 、 3 、 4 、 5 、 6 、 7 、 8 、9 是用来记数的十个数字。用它们来计数时，每一个数字所占的位置叫**数位**。一个数含有几个数位，就叫做几位数。例如425叫做三位数。每个数位上的计数单位是不同的。同一个数字，由于它所在的数位不同，所表示的数值也不同。如303左边的 3 占的位置是百位，它的计数单位是100，所以左边的数字 3 表示 3 个100，即300；右边的 3 占的位置是个位，它的计数单位是 1 ，所以右边的数字 3 就表示 3 个 1 。

二、整除的特征

1.约数和倍数　如果甲数除以乙数，商是整数而没有余数，我们就说甲数能被乙数**整除**。或者说乙数能整除甲数。

如果甲数能够被乙数整除，甲数就叫做乙数的**倍数**，乙数就叫做甲数的**约数**(有时也叫做**因数**)。例如，12能被 3 整除，所以12是 3 的倍数， 3 是12的约数。

一个数的约数只有有限个，如 12 的约数只有 1 、 2 、 3 、 4 、 6 、12。一个数的最小约数是 1 ，一个数的最大约数就是它本身。

一个数的倍数有无限多个，例如 3 的倍数有 3 、 6 、 9 、12、…。一个数的最小倍数是它本身，而没有最大的倍数。

2.整除特征

(1)能被2整除的数的特征　一个数，如果它的末位数字是2、4、6、8、0，那末这个数能被2整除。如12、28、120、856等等都能被2整除。能被2整除的数叫做**偶数**；不能被2整除的数叫做**奇数**。如1、3、5、11、15、…都是奇数。

(2)能被5整除的数的特征　一个数，如果末位数字是5或0，那么这个数能被5整除。例如，15、20、315、470等都能被5整除。

(3)能被3和9整除的数的特征　一个数，如果各数位上数字的和是3的倍数，那末这个数能被3整除；一个数，如果各数位上数字的和是9的倍数，那末这个数能被9整除。例如，111各数位上数字的和是$1+1+1=3$，3是3的1倍，所以111能被3整除。再如21、93、72、…等等都是3的倍数。189的各数位上数字的和是$1+8+9=18$，18是9的倍数，所以189能被9整除。

很明显，能被9整除的数，一定能被3整除，但能被3整除的数不一定能被9整除。

(4)能被6整除的数的特征　一个数，如果它既能被2整除，又能被3整除，那末这个数就能被6整除。例如，数132末位上数字是2，它能被2整除，又由于它的各数位上数字的和是6，它又能被3整除。所以132这个数就能被6整除。

(5)能被4、8、25、50、125等整除的数的特征　一个数，如果它的末尾两位数字都是零或末尾两位数能被4整除，那末这个数就是4的倍数。例如2500、1700末尾两位是00，1716、4520末尾两位数是16、20，它们能被4整除，所以这些数都是4的倍数，即它们能被4整除。

一个数，如果末尾三位数字都是零或末尾三位数能被8整除，那末这个数就能被8整除。例如，1000、257000末尾三位全是零，17136、2800末尾三位是136和800都是8的倍数，所以这些数都能被8整除。

末尾两个数字是00、25、50或者75的数都能被25整除。

末尾两个数字是00或者50的数都能被50整除。

末尾三位数字是000、125、250、375、500、625、750或者875的数都能被125整除。

练　　习

1.填空：

（1）和47相邻的两个自然数是________。

（2）一个数由5个100，6个10，3个1组成，这个数是________。

（3）在自然数范围内，最小的四位数是________。最大的四位数是________。

（4）一个数最大的约数是________，最小的约数是____。一个数最大的倍数________，最小的倍数是________。

2.填表：

把0、2、7排在不同数位组成的三位数	720	702	207	270
能被2整除的数	✓	✓		✓
能被3整除的数				
能被5整除的数				
能被9整除的数				

三、质数和合数，分解质因数

1.质数和合数　一个数除了1和它本身之外，不再有别的约数，这个数叫做**质数**(也叫**素数**)；一个数除了1和它本身之外，还有别的约数，这个数叫做**合数**。如2、3、5、7、11、…是质数；4、6、8、9、…是合数。特别注意，1既不是质数，也不是合数。

2.质因数、分解质因数　一个合数可以写成几个质数相乘的形式，这几个质数都是这个合数的因数，所以叫做这个合数的**质因数**。

把一个合数用质因数相乘的形式表示出来，叫做**分解质因数**。例如：$12 = 2 \times 2 \times 3$，$30 = 2 \times 3 \times 5$。

分解质因数，通常用短除法，方法如下：

$$
\begin{array}{r|l l}
2 & 60 & \cdots\cdots \text{用60的质因数 2 去除，得商30，} \\ \cline{2-2}
2 & 30 & \cdots\cdots \text{用30的质因数 2 去除，得商15，} \\ \cline{2-2}
3 & 15 & \cdots\cdots \text{用15的质因数 3 去除，得商 5，} \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \ \ 5 & \cdots\cdots \text{5 是质数。}
\end{array}
$$

所以 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$。

例 1　把420分解质因数。

解

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 420 \\ \hline
2 & 210 \\ \hline
3 & 105 \\ \hline
5 & \ \ 35 \\ \hline
\multicolumn{1}{r}{} & \ \ \ \ 7
\end{array}
$$

$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$。

注意分解质因数时不要出现有合数的因数，如 $12 = 3 \times 4$，$420 = 2 \times 6 \times 5 \times 7$，这里 4 与 6 都不是质因数。

四、最大公约数和最小公倍数

1．最大公约数　几个数公有的约数叫做这几个数的公约数。公约数中最大的一个叫做这几个数的**最大公约数**。

例如：6 的约数有 1、2、3、6；

12的约数有 1、2、3、4、6、12；

18的约数有 1、2、3、6、9、18。

6、12、18的公约数有 1、2、3、6，其中 6 最大。所以 6、12、18的最大公约数是 6。

求几个数的最大公约数，可用短除法把这几个数同时分解质因数，找出它们所有的公共质因数，所有公共质因数的积就是这几个数的最大公约数。

例 2　求36、60的最大公约数。

解

$$\begin{array}{r|rr}
2 & 36 & 60 \\ \hline
2 & 18 & 30 \\ \hline
3 & 9 & 15 \\ \hline
 & 3 & 5
\end{array}$$

所以36和60的最大公约数是$2\times2\times3=12$。

两个数中，如果小的数是大的数的约数，那么这个小的数本身就是这两个数的最大公约数．几个数中，如果其中有一个数正好是其余各数的约数，这个数就是这几个数的最大公约数．例如6是6与42的最大公约数；3是3、9、21的最大公约数．

如果两个数的最大公约数是1，那末这两个数叫做**互质数**（或者说这两个数**互质**）．例如12和25就是互质数．

2．最小公倍数　几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数，公倍数中最小的一个叫做这几个数的**最小公倍数**．例如：

6的倍数有6、12、18、24、……；

4的倍数有4、8、12、16、20、24、28、…….

可以看出6和4的公倍数有12、24、……，其中最小的是12，所以6和4的最小公倍数是12．

求几个数的最小公倍数，先把它们分别分解质因数，取出其中一个数的全部质因数，再在另一个数里取出前一个数所没有或者个数不足的质因数，一直到最后的一个数为止，最后把所有取出的质因数相乘，所得的积就是所求的最小公倍数．通常用短除法，其法如下：

$$\begin{array}{r|rrr}
5 & 100 & 40 & 35 \\ \hline
2 & 20 & 8 & 7 \\ \hline
2 & 10 & 4 & 7 \\ \hline
 & 5 & 2 & 7
\end{array}$$

所以100、40、35的最小公倍数是$5\times2\times2\times5\times2\times7=1400$。

用短除法求几个数的最小公倍数时，首先用这几个数的公约数去除各数（例题中第一次用5去除），如果这几个数的商已经没有1以外的公约数时，再用其中某些数的公约数去除（例题中第二次、第三次用

2 去除，7 要移下来)。直到各数的商中任何两个都是互质数为止(例题中除到各数的商是 5、2、7，两两都互质时为止)。最小公倍数就是每一次的除数(5、2、2)与各数的最后的商(5、2、7)的连乘积。即 $5\times2\times2\times5\times2\times7=1400$。

如果在几个数里，最大的一个数能够被其他各个数整除，那末这个最大的数本身就是这几个数的最小公倍数。例如 5、12、15、60这几个数中，60就是它们的最小公倍数。

如果几个数之间两两都是互质数，那末它们的乘积就是它们的最小公倍数。如 5 和 7 的最小公倍数就是 $5\times7=35$；20、49和33两两互素，它们的最小公倍数就是 $20\times49\times33=32340$。

练　　习

1.填空：

(1)　在自然数范围里，最小的质数是____，最小的合数是____，最小的奇数是____，最小的偶数是____。

2.在括号里填上合适的质数。

(1)　4 =(　　)+(　　)；

(2)　10 =(　　)+(　　)=(　　)+(　　)；

(3)　12 =(　　)+(　　)。

3.填表：

	最大公约数	最小公倍数
7 和42		
8 和25		
10和15		
3、4 和 5		
4、12和16		
15、30和60		

习 题 一

1.填空：

（1） 341267是____个万和____个1组成的；

（2） 最高位是亿位的整数是____位数；

（3） 在空格里填上一个数字，使这个三位数能被3整除，也能被2整除，并且使它是这样的数中最小的一个数；

1____8，13____，____50；

（4） 既有约数3又有约数5的最小奇数是____。

2.用阿拉伯数字写出下列各数：

三千四百五十二万六千九百零九；

二十亿零四千万。

3.求下面各组数的最大公约数和最小公倍数。

（1） 12、28和42；

（2） 30、15和35。

第二节 分数、小数和百分数

一、分数

把单位“1”平均分成若干份，表示一份或几份的数，叫做**分数**。例如把1分成5份，每一份就是1/5。表示把单位“1”平均分成多少份的数，叫做分数的**分母**；表示取了多少份的数，叫做分数的**分子**；表示其中一份的数，叫做**分数单位**。这样，分数2/5就表示这个分数的分子是2，分母是5；它表示把1分成5份，取其中的2份的数。这个分数的分数单位是$\frac{1}{5}$。

由于除法可以用分数表示，两个数相除又叫做这两个数的比，所以一个分数$\frac{2}{5}$除表示上面所说内容之外，还可以表示把2平均分成5份，取其中的一份，也可以表示2和5的比值。

分数的分母不能是零。

一个分数的分子是零，那末这个分数等于零。

分子比分母小的分数叫做**真分数**。如$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{7}{8}$、…等等都是真分数。真分数比1小。

分子比分母大或者分子和分母相等的分数叫做**假分数**。如$\frac{3}{2}$、$\frac{7}{4}$、$\frac{5}{5}$、$\frac{21}{12}$、…等等都是假分数。假分数大于1或者等于1。

分子是分母的倍数的假分数，实际上是整数。如$\frac{10}{5}=2$，$\frac{9}{3}=3$。

分子不是分母的倍数的假分数，可以写成一个整数和一个真分数的和（“+”号常省略），我们把它叫做**带分数**。如$\frac{3}{2}$可写成$1\frac{1}{2}$。

带分数、整数和假分数的互化：

把带分数化成假分数，可用原来的分母做分母，用分母与整数的乘积再加上原来的分子做分子。如$1\frac{1}{2}=\frac{1\times2+1}{2}=\frac{3}{2}$。$3\frac{1}{3}=\frac{3\times3+1}{3}=\frac{10}{3}$。

把假分数化成整数或带分数，可用分母去除分子。能整除的，所得的商就是整数；不能整除的，商是带分数的整数部分，余数是分数部分的分子，分母不变。如$\frac{9}{3}=9\div3=3$。$\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$。

把整数化成假分数，要用指定的分母做分母，用整数同分母相乘的积做分子。如把3化成分母是5或7的假分数，就有$3=\frac{15}{5}$，或$3=\frac{21}{7}$。

分数的基本性质：

分子、分母都乘以（或除以）同一个不为零的数，分数值不变。例如$\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$。

分数大小的比较：

分母相同的两个分数，分子大的分数比较大。如$\frac{4}{5}$与$\frac{2}{5}$，分母相同，分子$4>2$，所以$\frac{4}{5}>\frac{2}{5}$。

分子相同的两个分数，分母小的分数比较大。如$\frac{3}{4}$和$\frac{3}{7}$，分子相同，分母$4<7$，所以$\frac{3}{4}>\frac{3}{7}$。

分子与分母都不相同的两个分数比较大小，可以先把它们化成同分母分数再进行比较。把异分母分数化成和原来分数相等的同分母分数，叫做**通分**。通分的方法：

先求出原来几个分母的最小公倍数，利用分数的基本性质，把各分数化成用这个最小公倍数作分母的分数。

例 比较$\frac{2}{3}$和$\frac{5}{7}$的大小。

解 先求出3和7的最小公倍数21，用21作公分母，利用分数基本性质，把$\frac{2}{3}$和$\frac{5}{7}$化成以21为分母并和原来分数相等的分数。

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 7}{3\times 7}=\frac{14}{21};$$

$$\frac{5}{7}=\frac{5\times 3}{7\times 3}=\frac{15}{21}.$$

比较$\frac{14}{21}$与$\frac{15}{21}$的大小，可知$\frac{14}{21}<\frac{15}{21}$，所以$\frac{2}{3}<\frac{5}{7}$。

二、小数

把分母是10、100、1000、…的分数，用十进制记数法表示出来，如$\frac{1}{10}$记作0.1，$\frac{3}{100}$记作0.03，…，这些数就是**小数**。

小数点左边是整数部分，小数点右边是小数部分。小数点右边第一位叫十分位，它的计数单位是十分之一(0.1)；小数点右边第二位叫百分位，它的计数单位是百分之一(0.01)；小数点右边第三位叫千分位，它的计数单位是千分之一(0.001)；……。

比较两个小数的大小，先看它们的整数部分。整数部分大的那个数就大；如果整数部分相同，十分位上的数字大的那个数就大；如果十分位上的数字也相同，百分位上的数字大的那个数就大；……。如果各数位上的数字都相同，那么这两个小数就相等。

小数的小数点向右移动一位、二位、…，小数就扩大10倍、100倍、…；小数点向左移动一位、二位、…，小数就缩小10倍、100倍、…。这样，一个数乘以10、100、1000、…，计算时，只要移动小数点就可以了。例如，把2.7的小数点去掉得27，它的值扩大10倍；把1.023的小数点向右移2位得102.3，它的值就扩大100倍；把4.5的小数点向左移动二位得0.045，它的值比原来缩小100倍。

三、百分数

表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做**百分数**。百分数也叫做百分率或百分比。例如某车间100个青年中有共青团员90人，共青团员人数就占青年人数的百分之九十即$\left(\frac{90}{100}\right)$。百分数通常不写成分数形式，而采用百分号“%”来表示。例如：

百分之九十写作90%。百分之一百二十点五写作120.5%。

“成数”实际是“十分数”。几成就是十分之几。例如三成是$\frac{3}{10}$，也就是30%；“二成三”就是$\frac{2.3}{10}$，也就是23%。

在科研和统计工作中还经常使用千分数，例如人口自然增长率要控制在千分之一（1‰）以下；盐水的含盐量是千分之三十五（35‰）（符号“‰”是千分号）。

四、分数、小数、百分数的互化

1.分数与小数的互化　分数化成小数一般方法是用分母去除分子。一个最简分数（分子与分母互质的分数），如果分母里除2和5以外不再含有其它质因数，这个最简分数就能化成有限小数；如果分母中有2和5以外的质因数，这个分数就不能化成有限小数，只能化成无限循环小数。例如$\frac{1}{5}$、$\frac{7}{20}$、$\frac{8}{25}$等直接用分子除以分母都能化成有限小数；$\frac{2}{3}$、$\frac{4}{15}$、$\frac{7}{22}$等分母中因含有2和5以外的其他质因数，所以就不能化成有限小数，只能根据要求取近似值如$\frac{2}{3}\approx0.667$，$\frac{4}{15}\approx0.267$，$\frac{7}{22}\approx0.318$（符号“≈”是近似号）。

有限小数化成分数，按照小数的意义直接写成分数的形式。例如$0.03=\frac{3}{100}$，$1.25=1\frac{25}{100}=1\frac{1}{4}$。在整数、分数、小数的混合运算中，常常要用到分数与小数的互化，熟记下面的一些数据是非常有用的：

$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{3}{4}=0.75$，$\frac{1}{5}=0.2$，$\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{3}{5}=0.6$，$\frac{4}{5}=0.8$，$\frac{1}{8}=0.125$，$\frac{3}{8}=0.375$，$\frac{5}{8}=0.625$，$\frac{7}{8}=0.875$，$\frac{1}{16}=0.0625$，$\frac{7}{20}=\frac{35}{100}=0.35$，$\frac{1}{25}=\frac{4}{100}=0.04$，$\frac{1}{50}=\frac{2}{100}=0.02$等等。

2.小数与百分数的互化　小数要化成百分数，只要把小数点向右移动两位，再添上百分号就行了。如0.25＝25%，3.127＝312.7%。