DAXUESHUXUE

大学数学

XIANXING DAISHU

线性代数

刘新卫 戴明强 主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本套教材是教学改革和教学实践总结的结晶，充分体现数学素质教育，注重教材内容的“新陈代谢”与现代化，按照教育部相应课程的改革计划与基本要求，吸取同类教材的优点，编成这套教材，定名为“大学数学”，可作为理、工、农、医、经、管等专业的大学数学基础课程教材.

本书是《大学数学·线性代数》，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、方阵的对角化与二次型、线性空间与线性变换等内容，每章有小结、习题，书末附有答案或提示. 完成教学约需40～50学时.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学·线性代数/刘新卫，戴明强主编. —北京：科学出版社，2003.8

ISBN 7-03-011572-4

Ⅰ.大… Ⅱ.①刘…②戴… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第041484号

责任编辑：徐一帆/责任校对：王望荣

责任印制：高 嵘/封面设计：李 静

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2003年8月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2003年8月第一次印刷 印张：7 3/4

印数：1—10 000 字数：197 000

定价：11.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《大学数学·线性代数》编委会

主　编　刘新卫　戴明强

副主编　王公宝　胡春华

编　委　（按姓氏笔画为序）

王公宝　刘新卫　周木良

胡春华　唐国平　戴明强

前　言

数学是思维的体操，数学技术是高新技术的本质，数学语言是科学的基本语言，数学计算是科学研究的主要手段之一，“数学是科学之王”．当人类进入21世纪之时，数学水平已经成为衡量一个国家、一个民族的科技文化素质、社会进步程度和发展潜力的重要标志．高等学校的基本任务是培养合格人才，对学生全面素质和能力的培养已成为广大教育工作者的共识．数学教育不仅是专业技术教育，也是文化素质的重要组成部分，对理工类数学教育而言，既要重视其作为科学技术的基础作用，又要重视它作为文化基础的作用．当前，各高校的教学改革方兴未艾，而教学改革的重点与难点是教学内容的改革，每门学科依照何种体系、讲授哪些内容则体现在教材之中．

我们总结分析了近些年来数学教学的经验，按照教育部《面向21世纪高等工程教育教学内容课程改革计划》的总体要求，根据原国家教委颁布的理工类本科《高等数学课程教学基本要求》及教育部高等学校理工科数学课程教学指导委员会拟定的数学课程教学基本要求，参照教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试大纲，同时认真吸取国内多种同类教材的优点，编写了这套系列教材，定名为“大学数学”．

本教材共分四册：微积分（上册）、微积分（下册）、线性代数及随机数学，包含了大学本科非数学专业的主要数学课程，可作为理、工、农、医、经、管等专业的大学数学课程教材．在编写中，我们从以下几个方面进行了努力：

1．在“知识、能力、素质”三维空间的框架下，合理选取内容，在保留必要的传统体系和经典内容的基础上，力图溶入现代数学的思想与知识．

2. 叙述详略得当，语言力求确切.

3. 对概念的引出，注意了阐明实际背景，着重于概念实质的揭示.

4. 对一些重要定理的证明，注意了推证思路的阐述，并尽量设法结合几何直观.

本书是《大学数学·线性代数》，包括行列式、矩阵、线性方程组、方阵的对角化与二次型、线性空间与线性变换等内容. 完成教学约需 40～50 学时. 与其他同类教材相比，它有以下特点：

1. 根据教学大纲的要求，在整体框架上，保证了基本概念、基本理论和基本方法的完整；在具体内容的取舍上，则更侧重于工程数学的基本方法. 轮廓分明，基础适当.

2. 概念、理论和方法的引入，注重交代它们的实际背景，体现了实践、认识、再实践的认识论原则. 学生用心学完本教材，不但可以学到知识，而且可以学到不少科学思维方法.

3. 教材增加了关系矩阵、Leslie 矩阵、投人产出矩阵、λ-矩阵等内容，提供了与实际应用相结合的切口，方便相关专业选修.

4. 每章后都有提纲挈领的小结，引导学生归纳各章所学内容，明确重点和方法，便于学生自学. 精心挑选的例题和习题，内容丰富，尽量联系实际，富有启发性.

本书由刘新卫、戴明强任主编，王公宝、胡春华任副主编，其中，第一、二、三章由刘新卫、胡春华、唐国平、周木良编写，第四、五章分别由戴明强、王公宝编写，最后由刘新卫、戴明强统稿、定稿.

限于编者的学识，书中定有疏漏及不当之处，诚望读者批评指正，以便再版时予以修正.

编者

2003 年 6 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是求解线性方程组的一个重要工具，是人们根据求解的需要而引人的一个处理数据的方法，有着广泛的应用. 事实上，在初等代数里已学过的二元线性方程组和三元线性方程组，在生产实践中遇到的含有成千上万个未知量的线性方程组等，大多要用行列式来解之.

本章我们主要介绍行列式的定义、性质、计算方法以及克莱姆(Cramer)法则.

第一节　线性方程组与行列式

在中学时常用消元法解方程组，如二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

采用消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \end{cases}$$

当二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

时，二元线性方程组(1-1)有惟一解，即

$$x_1=D_1/D, \quad x_2=D_2/D,$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

类似地，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1-2}$$

当三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$$

时，三元线性方程组(1-2)有惟一解，即

$$x_1=D_1/D,\quad x_2=D_2/D,\quad x_3=D_3/D,$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这些表示式揭示了线性方程组的解与系数及常数项之间的关系. 本章我们将要把这个结果推广到 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的情形，但是 n 阶行列式如何定义，如何计算呢？下面我们就来讨论 n 阶行列式的问题.

第二节　行列式的定义

2.1　排列及其逆序数

引例：三个小朋友要站成一队，共有多少种不同的站法？我们都知道共有 $3\times2\times1=6$ 种站法，对于每一种站法都可认为是把这三个小朋友排定了一个次序. 同样，对于给定的一些数，或若干个

研究对象(简称元素),我们亦可以给它排定一个次序,为此我们定义 n 个研究对象的排列.

定义1.1 将 n 个正整数 $1,2,3,\cdots,n$ 按某种次序排成一列,称之为一个 n 级排列.

例如,4321 和 1423 均是 4 级排列,45312 是一个 5 级排列,7461235 是一个 7 级排列. 由定义 1.1 知,n 级排列的总数为

$$p_n^n=n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!.$$

显然,$123\cdots n$ 是一个 n 级排列,是按由小到大的顺序排列而成的,称之为标准排列,而其他任何一个 n 级排列都破坏了这个由小到大的次序,为了反映其他排列和标准排列之间的关系,我们有下面的定义.

定义1.2 对于一个 n 级排列 $k_1k_2\cdots k_n$,若有较大的数 k_j 排在了较小的数 k_i 前面($k_i<k_j$),就说 k_j 与 k_i 构成了一个*逆序*. 一个 n 级排列中逆序的总数称为这个排列的*逆序数*,记作

$$\sigma(k_1k_2\cdots k_n).$$

例如,$\sigma(1432)=3,\sigma(1423)=2,\sigma(45312)=8,\sigma(7461235)=13,\sigma(1234)=0$.

定义1.3 逆序数为奇数的排列称为*奇排列*;逆序数为偶数的排列称为*偶排列*.

例 1.1 求 n 级排列 $n(n-1)(n-2)\cdots21$ 的逆序数.

解 采用向后计算法. 在排列 $n(n-1)(n-2)\cdots21$ 中,n 与后面元素构成的逆序有 $n(n-1),n(n-2),\cdots,n(2),n(1)$ 共 $(n-1)$ 个,类似地,$(n-1)$ 与后面元素构成的逆序有 $(n-2)$ 个,3 与后面元素构成的逆序有 2 个,2 与后面元素构成的逆序有 1 个,1 是最后一个元素,与后面元素构成的逆序有 0 个,所以

$$\begin{aligned}\sigma(n(n-1)(n-2)\cdots21)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

事实上,我们可以考虑任意 n 个不同的自然数组成的 n 级排列,即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的自然数,按某种次序排成一列,亦

是一个 n 级排列.

定义 1.4 在一个排列 $k_1k_2\cdots k_n$ 中,若将它的两个数 k_i 和 k_j 互换位置,而其余的数位置不变,这个变换称为一个对换,记作:(k_i,k_j).

例如,排列 1234 经对换 $(2,4)$ 后就变成了 1432. 显然,如果一个排列连续施行两次相同的对换,就还原成了原来的排列.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 ① 先看一个特殊情况,即对换的两个数是相邻的情况,设排列为

$$AjkB, \tag{1-3}$$

其中,A,B 表示排列中除 j,k 两个数外其余的数;经过对换 (j,k),变为排列

$$AkjB. \tag{1-4}$$

显然,在排列(1-3)和(1-4)中,A 和 B 中数的次序没有改变,所以在排列(1-3)和(1-4)中 A 和 B 中的数与 k 和 j 构成的逆序的个数没有变,但排列(1-4)比排列(1-3)多了一个逆序 kj(当 $j<k$ 时)或者少了一个逆序 jk(当 $j>k$ 时),即排列(1-3)和(1-4)的逆序数之差为1,因此其奇偶性相反.

② 再看一般情形,设排列为

$$Aja_1a_2\cdots a_tkB, \tag{1-5}$$

经变换 (j,k) 后变为

$$Aka_1a_2\cdots a_tjB, \tag{1-6}$$

容易看出,排列(1-6)可由排列(1-5)先将 j 依次与 $a_1,a_2,\cdots,a_t,k$ 对换,共作了 $t+1$ 次对换,此时排列变为

$$Aa_1a_2\cdots a_tkjB, \tag{1-7}$$

接着再将排列(1-7)中的 k 依次与 $a_t,a_{t-1},\cdots,a_2,a_1$ 对换,共作 t 次对换,即可得到排列(1-6),前后共经过了 $2t+1$ 次对换,由结论①知排列(1-6)与(1-5)的奇偶性相反.

定理 1.2 当 $n>1$ 时,n 级排列中奇偶排列个数相同,都等于 $n!/2$.

证 n 级排列的总数为 $n!$ 个，不妨设其中有 p 个奇排列，q 个偶排列.

先考虑让每一个奇排列都施以相同的对换 (j,k)，则由定理 1.1知，可得到 p 个偶排列，于是有 $p\leqslant q$；同理，让每一个偶排列都施以相同的对换，亦可得到 q 个奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，从而必有 $p=q$，即奇偶排列个数相同，都等于 $n!/2$.

例如，3 级排列 123，312，231 都是偶排列，132，213，321 都是奇排列.

定理 1.3 任意一个 n 级排列与排列 $123\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶数.

证 略.

例如，4 级排列4312 可经对换 (1，4)，(2，3)，(3，4) 后变为排列 1234，共经过 3 次对换，而 $\sigma(4312)=5$ 是奇数，即所作对换的奇偶性与已知排列的奇偶性相同. 反之，排列 1234 可经对换 (1，4)，(2，3)，(1，2) 后变为排列 4312，所作对换个数的奇偶性仍与排列 4312 的奇偶性相同.

2.2 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，让我们先来看一下 2 阶和 3 阶行列式的定义. 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1-8}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1-9}$$

从(1-8)、(1-9)两式可以看出，它们都是一些元素乘积的代数和，每一乘积项都是由位于不同行不同列的元素构成的，而展开式恰好就是由所有这些可能的乘积组成的. 例如，除了正、负号外，(1-8)式中的乘积项可表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中j_1j_2是2级排列，当j_1j_2是排列12时，乘积$a_{11}a_{12}$取正号，当j_1j_2是排列21时，乘积$a_{12}a_{21}$取负号，而$\sigma(12)=0$为偶数，$\sigma(21)=1$为奇数；同样地，除了正、负号外，(1-9)式中的乘积项可表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中$j_1j_2j_3$是3级排列，当$j_1j_2j_3$是排列123，231，312时，此项乘积取正号，当$j_1j_2j_3$是排列321，213，132时，此项乘积取负号，而$\sigma(123)=0$，$\sigma(231)=2$，$\sigma(312)=2$，$\sigma(321)=3$，$\sigma(132)=1$，$\sigma(213)=1$，即当$\sigma(j_1j_2j_3)$是奇数时，$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$取负号，当$\sigma(j_1j_2j_3)$是偶数时，$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$取正号.

据此我们给出n阶行列式的定义.

定义1.5 n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-10}$$

等于所有取自不同行不同列的元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-11}$$

的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列，(1-11)中每一乘积项都按下列规则带有符号：当$\sigma(j_1j_2\cdots j_n)$是偶数时，(1-11)带有正号；当$\sigma(j_1j\backslash-2\cdots j_n)$是奇数时，(1-11)带有负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1-12}$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有的$n$级排列求和. n阶行列式有时简记为$\Delta(a_{ij})$. a_{ij}称为行列式的第i行第j列元素，i称为其行标，j称为其列标.

由定义不难看出，n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的，按此定义的2，3 阶行列式显然与前面是一致的. 特别当 $n=1$ 时，$|a|=a$，注意这里不要与绝对值符号相混淆.

例 1.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个4 阶行列式，由定义1.5 知，展开式中共有 $4!=24$ 项，其一般项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}. \tag{1-13}$$

显然，若 $j_1\neq 4$，则(1-13)式等于零，即只须考虑 $j_1=4$ 的那些项，类似地只须考虑 $j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$ 的那些项，从而行列式中不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，而 $\sigma(4321)=6$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$$

例 1.3 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1-14}$$

证 容易看出，当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D_n 中可能不为零的元素 a_{ij} 其下标应满足 $i\geqslant j$，而根据行列式的定义

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1-15}$$

因此，在(1-15)式中可能不为零的项的下标必须满足条件

$$j_1\leqslant 1,\ j_2\leqslant 2,\ \cdots,\ j_n\leqslant n,$$

故(1-14)式成立.

为了叙述方便，我们把行列式中从左上角到右下角这条对角线称为其主对角线，而把从左下角到右上角这条对角线称为其副对角线，主对角线以上(下)元素全为零的行列式，称为下(上)三角形行列式. 特别地，除主对角线上的元素外其余元素全为零的行列式，称为对角形行列式.

例1.3说明下三角形行列式的值就等于主对角线上元素的乘积. 对角形行列式作为其特殊情形亦应有相同的结果，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n. \tag{1-16}$$

类似地，还有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \tag{1-17}$$

第三节　行列式的性质与计算

3.1　行列式的性质

在 n 阶行列式的定义中，为了确定每一项的符号，我们把 n 个元素的行标按由小到大的顺序排列起来. 事实上，由于数的乘法是可以交换的，所以这 n 个元素可以任意排列，那么我们当然可以将这 n 个元素的列标按由小到大的顺序排列起来，从而公式(1-12)亦可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

因此我们有

性质1.1 行列互换,行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1-18}$$

性质 1.1 说明,在行列式中行和列的地位是等同的,因此,行列式中凡是关于行的性质,对于列也同样成立.

性质1.2 用数 k 乘以行列式的一行(或列),等于以数 k 乘以此行列式. 即若记 $D_n=\Delta(a_{ij})$,则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD_n. \tag{1-19}$$

证 由公式(1-12)知

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = kD_n. \end{aligned}$$

在公式(1-19)中,若 $k=0$,则有 $D=0$. 从而

推论1.1 如果行列式中某一行(或列)元素全为零,那么行列式为零.

性质1.3 若行列式中有两行(或两列)元素相同,那么行列式为零. 所谓两行(或两列)相同是指两行(或两列)的对应元素相等.

证 设行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1-20}$$

其中第 i 行与第 k 行相同，即

$$a_{ij} = a_{kj}, (j=1,2,\cdots,n). \tag{1-21}$$

要证明(1-20)式为零，只须证明(1-20)式右端所出现的项中均能两两相互抵消. 事实上，在(1-20)式右端将同时出现这样两项

$$(-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$$

和

$$(-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n},$$

比较这两项，由(1-21)式知

$$a_{ij_i} = a_{kj_i}, a_{ij_k} = a_{kj_k},$$

但是排列

$$j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n \quad 与 \quad j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n$$

相差一个对换，由定理 1.1 知

$$\sigma(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n) \quad 与 \quad \sigma(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)$$

的奇偶性相反，因此，在(1-20)式的右端，对于每一项都有一绝对值相同但符号相反的项与之成对出现，故(1-20)式等于零.

性质1.4 若行列式的某两行(或两列)元素对应成比例，则行列式为零.

性质 1.4 的证明由性质 1.2 和性质 1.3 立即可得.

性质1.5 行列式的可分性. 即