与同济大学《线性代数》第三版配套

最新工程数学线性代数（第三版）教与学参考

主编 钱志强

本书八大特色

- ★考点提示及大纲要求
- ★重点知识结构图
- ★常考题型与范例精解
- ★疑难解答
- ★考研经典题剖析
- ★典型错误类型及根源分析
- ★学习效果三级测试
- ★课后习题详解与三级测试题答案

中国致公出版社

与同济大学《线性代数》第三版配套

最新工程数学 线性代数（第三版）教与学参考

主编 钱志强
编者 胡喜珍 熊金明

本书八大特色

★考点提示及大纲要求
★重点知识结构图
★常考题型与范例精解
★疑难解答
★考研经典题剖析
★典型错误类型及根源分析
★学习效果三级测试
★课后习题详解与三级测试题答案

中国致公出版社

图书在版编目(C I P)数据

最新线性代数教与学参考/钱志强主编.—北京:中国致公出版社,2001.12
ISBN 7-80096-859-6

Ⅰ.最…　Ⅱ.钱…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 091612 号

最新线性代数教与学参考
中国致公出版社出版
新华书店经销
文字六〇三厂印刷
开本:850×1168　1/32　印张 18　字数 580 千字
2003 年 8 月第 2 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—10000 册
ISBN 7-80096-859-6/G·666
定价:18.00 元

前 言

线性代数是理工科学生的一门重要的必修基础课程。但该课程教学课时少，概念多，定理多，内容抽象而实例少，这就使教师在教学过程中常有“内容无法完全展开”之苦，而学生在学习过程中常出现“知其然，而不知其所以然”的现象。为此，我们结合多年来的教学经验和考研辅导反馈的信息，试图编写一本能帮助学生巩固、加深、提高和拓宽所学知识的参考书，把学生在学习中感到困难的问题、容易出错的问题集中起来进行分析探讨，对线性代数中的问题与方法进行全面系统的总结和分类，指导学生应该如何去分析解决问题，并用难度适中的题目对学生进行有计划、有步骤的训练，这对培养学生的思维能力和独立钻研精神是非常有益而必要的。

基于这种想法，我们精心汇集了历年来全国硕士研究生数学试题线性代数部分考题，对其进行了较全面的整理和分析，并反复推敲，修改和筛选出其具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性的题目，并附以详细的解答过程，以便读者参考学习和自测自评，特别地，为了使学生在学完每一章节后可以立即转入到本书的学习，本书内容在编排上完全与现行教材线性代数(同济大学第三版)同步，可以作为课堂教学的补充和延续。

我们不提倡“题海战术”，但是我们一贯注重对学生思维能力的培养，基于这一宗旨，我们在对例题进行分类讲解时，特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法，而不是题目的堆砌或单纯的题解。为了方便考研的读者，我们在解题过程中还贯穿了知识结构的前后呼应，一题多解，以期能帮助读者举一反三，取到事半功倍的效果。

本书每一章(第六章除外)都包括以下八个方面的内容：

一、考点提示及大纲要求。大纲要求一目了然，考点简明扼要。

二、重点知识结构图。该图提纲挈领，逻辑性强，体系完整。

三、常考题型与范例精解。题型典型灵活，解题方法富于技巧，内容覆盖面宽。

四、疑难解答。抓住要害，突出重点、难点，深化概念，拓宽知识面。

五、考研经典题剖析。开阔视野，"一步到位"，使读者更加明了考研的题型和难度，做到有的放矢。

六、典型错误类型及根源分析。析理透彻，一针见血。

七、学习效果三级测试。循序渐进，层次分明，适合不同要求，便于复习巩固所学知识。

八、习题解答与三级测试题详解。便于读者自我检测。

参考本书时，对每道题请坚持先做再看的学习方法。

我们衷心希望《线性代数教与学参考》能够成为广大读者的得力助手。当然，由于知识水平有限再加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者及同行批评指正。

编者

2003年8月

符号说明

符号	含义
$i_1, i_2, \cdots, i_n$	由数 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 组成的一个 n 级排列
$t=\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$	排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的逆序数
$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lvert a_{ij} \rvert$	n 阶行列式
D^T	行列式 D 的转置行列式
M_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的余子式
A_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式
$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵
$\mathbf{A}^T$	矩阵 **A** 的转置矩阵
$\lvert\mathbf{A}\rvert$	方阵的行列式
$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	单位矩阵
$\mathbf{A}^*$	矩阵 **A** 的伴随矩阵
$\mathbf{A}^{-1}$	矩阵 **A** 的逆矩阵
$r_i\times k(c_i\times k)$	行列式(或矩阵)的第 i 行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k
$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$	把行列式(或矩阵)的第 j 行(列)的各元素以同一个数 k 然后加到第 i 行(列)对应的元素上去
$\boldsymbol{\alpha}$(或 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$) $=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$	n 维列向量

符号	含义
R^n	n 维向量空间
$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$	n 维单位向量组
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	矩阵(或向量组)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价
$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$	向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_m \end{cases}$	一般的线性方程组
$\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{b}$	一般线性方程组的矩阵形式
$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{\beta}$	一般线性方程组的向量形式
$\boldsymbol{A}$	线性方程组的系数矩阵
$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$或 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$	线性方组的增广矩阵
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=0 \end{cases}$	齐次线性方程组
$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$	齐次线性方程组的矩阵形式
$\boldsymbol{\Lambda}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化后的对角矩阵
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	对角线上元素分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的对角矩阵
$f=X^A\boldsymbol{A}X$	二次型的矩阵形式

目录

第一章　行列式

一、考点提示及大纲要求

考点提示

1. 排列、排列的奇偶性；
2. 逆序、逆序数；
3. 对换改变排列的奇偶性；
4. 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数；
5. 行列式的定义；
6. 行列式的展开；
7. 行列式的性质；
8. 行列式的化简及计算；
9. 克拉默法则；
10. 行列式的证明.

大纲要求

1. 会求 n 元排列的逆序数；
2. 深入领会行列式的定义；
3. 掌握行列式的性质，并且会正确使用行列式的有关性质化简、计算行列式；
4. 灵活掌握行列式按行(列)展开；
5. 会用克拉默法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解.

二、重点知识结构图

全排列 逆序数

- n 元排列一共有 n! 个，其中奇、偶排列各有$\frac{n}{2}$个
- 对换改变排列的奇偶性
- 求逆序数

行列式

- 定义
  - $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$
  - $\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$
- 性质
  - 1° $D=D^T$ 2°互换行列式的两行(列)，行列式变号．
  - 3°用一个数乘行列式的某一行（列）就等用这个数乘此行列式。4°若行列式中有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零。5°把行列式的某一行（列）的倍数加到另一行(列)上，行列式不变．
- 展开
  - $D=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ik}\quad i=1,2,\cdots,n$
  - $D=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj},\ j=1,2,\cdots,n$
- 计算
  - 利用“化三角法”计算行列式
  - 利用范德蒙行列式计算行列式
  - 利用“归纳法”计算或证明行列式

克拉默法则

- $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$
  若 $D\neq0$，则 $x_i=D_i/D,\ (i=1,2,\cdots,n)$
- $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$
  若 $D\neq0$，则 $x_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$
  若 $D=0$，则方程组有非零解。

三、常考题型与范例精题

选择题

例 1 排列 134782695 的逆序数为( )

$(A)9$; $(B)10$; $(C)11$; $(D)12$.

解 在排列 134782695 中,

1 排在首位,逆序数为 0;

3、4、7、8 各数的前面没有比它们自身大的数,故这四个数的逆序数均为 0;

2 的前面比 2 大的数有四个(3、4、7、8),故逆序数为 4;

6 的前面比 6 大的数有两个(7、8),故逆序数为 2;

9 是最大数,逆序数为 0;

5 的前面比 5 大的数有四个(7、8、6、9),故逆序数为 4;

于是这个排列的逆序数为

$t = 0 + 0 + 4 + 2 + 0 + 4 = 10$

故正确答案为(B).

例 2 下列排列中( )是偶排列.

$(A)4312$; $(B)51432$; $(C)45312$; $(D)654321$.

解 按照例 1 的方法计算知:

排列 4312 的逆序数为 5,

排列 51432 的逆序数为 7,

排列 45312 的逆序数为 8,

排列 654321 的逆序数为 15,

故正确答案为(C).

例 3 行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$,

若 $D_1 = D_2$,则 λ 的取值为( )

$(A)0,1$; $(B)0,2$; $(C)1,-1$; $(D)2,-1$.

解 按三阶行列式的对角线法则,有

$D_1 = 10 + 2 + 27 - 6 - 30 - 3 = 0$

$D_2 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$

若 $D_1 = D_2$,则$(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$,解得 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = 1$

故正确答案为(C).

例 4 方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$有唯一解时,对 λ 的要求是( )

$(A)\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$; $(B)\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$;

$(C)\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$; $(D)\lambda = 1, \lambda \neq 2$.

解 由克拉默法则知,当所给非齐次线性方程组的系数行列式不等于零时,

该方程组有唯一解，于是令行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\neq 0$$

即 $\lambda\neq 1,\lambda\neq -2$

故正确答案为(C).

综合题

例 5 用定义计算 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0\\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0\end{vmatrix}$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 中各行非零元素的列标分别可取以下各值

$p_1=2,3;\quad p_2=1,2,3,4,5;\quad p_3=1,2,3,4,5;$

$p_4=2,3;\quad p_5=2,3;$

在上述可能取的数码中，不能组成任何一个 5 元排列 $p_1p_2p_3p_4p_5$，换句话说，在 D_5 的每一项 5 个元素中，必至少含有一个零元素，故按行列式的定义有：$D_5=0$.

例 6 写出五阶行列式 $|a_{ij}|_{5\times5}$ 中包含因子 $a_{13}a_{25}$ 且带负号的所有项.

解 按行列式的定义，五阶行列式中包含因子 $a_{13}a_{25}$ 的项的一般式为

$(-1)^{\tau(35p_3p_4p_5)}a_{13}a_{25}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$

故含有 $a_{13}a_{25}$ 的所有项的项数为 5 元排列 $35p_3p_4p_5$ 的个数.因排列 $p_3p_4p_5$ 是三个数码 1,2,4 的全排列，共 3!个，故 $35p_3p_4p_5$ 能组成 6 个 5 元排列，即

35124; 35142; 35214; 35241; 35412; 35421.

其中 35142、35214、35421 为偶排列，35124、35241、35412 为奇排列，故包含因子 $a_{13}a_{25}$ 且带负号的所有项为

$a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$； $a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$； $a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$.

例 7 求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}3x & 2 & -4 & 1\\ -x & x & -1 & 3\\ 7 & 5 & 2x & 2\\ x & 2 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数.

解 4 阶行列式的一般项为

$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

要求 x^4 的系数，则必须每个 $a_{ip_i}(i=1,2,3,4)$ 都要含有 x，这样的项只有

$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0 3x\cdot x\cdot 2x\cdot x=6x^4$,

于是 $f(x)$ 中 x^4 的系数是 6.

要求 x^3 的系数,则必须4个 $a_{i\varphi_i}$ $(i=1,2,3,4)$ 中有3个含有 x,这样的项有

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=4x^3$$

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-2x^3$$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数是 $4-2=2$.

例8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$

解法一 因为这个 n 阶行列式中每一列中的 n 个元素之和都为 $n+1$,所以将第 $2,3,\cdots,n$ 行元素都加到第1行上,得

$$D_n=\begin{vmatrix}n+1&n+1&n+1&\cdots&n+1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=n+1.$$

解法二 利用 n 阶行列式的性质化简

$$D_n\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}n+1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=n+1.$$

例 9 设 $abcd = 1$,计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a^2 + \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 + \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 + \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 + \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$

解 $D = \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$

$$= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = 0.$$

例 10 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2002 \end{vmatrix}$

解 按最后一行展开,得到 $D = 2002 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2002 \times (-1)^{\frac{2001 \times 2000}{2}} \times 2001! = 2002!.$

例 11 已知 4 阶行列式 D 中第一行上元素分别为 $1,2,0,-4$;第三行上元素的余子式依次为 $6,x,19,2$;试求 x 的值.

解 由题设知,$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 分别为 $1,2,0,-4$, $M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}$ 分别为 $6,x,19,2$,从而得 $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ 分别为 $6,-x,19,-2$.由行列式按行(列)展开定理,有

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} + a_{14}A_{34} = 0$$

于是 $1 \times 6 + 2 \times (-x) + 0 \times 19 + (-4) \times (-2) = 0$

所以 $x = 7$.

例 12 设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$，求 $4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}$，其中 A_{i2} 为 D 中元素 $a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式.

解法一 因 $4,2,-3,6$ 恰好为 D 中第 3 列元素，而 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式，故 $4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和，由行列式按行(列) 展开定理知，此和必等于零，即

$$4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}=0$$

解法二 因 A_{i2} 为 D 中元素 $a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式，故将 D 中第 2 列元素依次换为 $4,2,-3,6$，即得

$$4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

例 13 已知 5 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

试求 (1) $A_{21}+A_{22}+A_{23}$；(2) $A_{24}+A_{25}$

其中 A_{2j} 是 D 中元素 $a_{2j}(j=1,2,3,4,5)$ 的代数余子式.

解 由行列式按行展开定理有

$$a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+a_{i3}A_{23}+a_{i4}A_{24}+a_{i5}A_{25}=0\ (i=1,3,4,5)$$

取 $i=1,3$ 得

$$\begin{cases} a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}+a_{15}A_{25}=0 \\ a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}+a_{34}A_{24}+a_{35}A_{25}=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 4(A_{21}+A_{22}+A_{23})+(A_{24}+A_{25})=0 \\ 3(A_{21}+A_{22}+A_{23})+2(A_{24}+A_{25})=0 \end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases} A_{21}+A_{22}+A_{23}=0, \\ A_{24}+A_{25}=0. \end{cases}$

例 14 已知 1326，2743，5005，3874 都能被 13 整除，不计算行列式的值，试证

$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ 能被 13 整除.

证 把 D_4 的每一行看成一个四位数，其千位、百位、十位、个位数字分别为 D_4 的各行上的第 1,2,3,4 列上的元素，则这 4 个四位数正好就是 1326，2743，5005，3874.

为使 D_4 的第 4 列上各元素变成这 4 个四位数，现将第 1,2,3 列分别乘以 10^3，10^2，10，并都加到第 4 列，得到

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1326 \\ 2 & 7 & 4 & 2743 \\ 5 & 0 & 0 & 5005 \\ 3 & 8 & 7 & 3874 \end{vmatrix}$$

由题设知,13 整除上行列式的第 4 列,故 13 能整除 D_4.

该法适用除数 m 为质数的情况.如果 m 为合数,且其各因数分别能整除该行列式某些行(列),由行列式性质即知该行列式能被合数 m 整除,请看下例.

例 15 不计算行列式的值,证明行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 能被 18 整除.

证法一 因 $18 = 9 \times 2$ 为合数,且 D_4 的第 3,4 两行分别可被 9,2 所整除,由行列式性质知,D_4 可被 18 整除.

证法二 将 D_4 的第 1,2,3 行分别乘以 10^3,10^2,10,并加到第 4 行,得到 D_4

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 1998 & 2196 & 2394 & 1800 \end{vmatrix}$$

因上行列式的第 4 行能被 18 整除(1998,2196,2394,1800 均能被 18 整除),故 D_4 能被 18 整除.

例 16 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

解 用递推法,先按 D_n 的第一行展开,得到

$$D_n = 5D_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

于是得递推公式 $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$

或 $D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$

递推下去得到 $D_n - 2D_{n-1} = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$

同样可得递推公式 $D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$

递推下去得到 $D_n - 3D_{n-1} = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1)$

$\because \quad D_1 = |5| = 5, D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$