XIANXING DAISHU

线性代数

周仁郁 主编

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

西南交通大学出版社
SWJUP Http://press.swjtu.edu.cn

线性代数

周仁郁　主　编

西南交通大学出版社
·成都·

内 容 提 要

本书详尽介绍了行列式、矩阵运算、线性方程组、特征值等内容，突出了矩阵理论及应用，特别是投入产出、线性规划在实际应用时的思路。本书的线性代数实验，使读者能应用 Mathcad 等软件完成线性代数的各种运算，并可以轻松地把所学内容应用到线性模型、非线性模型的建立和计算上。本书既可作为不同专业学生的线性代数教材和实验教材，又可作为其他读者在工作或科研中的自学资料。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 周仁郁主编. —成都：西南交通大学出版社，2005.2

ISBN 7-81104-042-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. 周… Ⅲ. 线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 008471 号

线 性 代 数

周仁郁 主编

*

责任编辑 王 旻

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：87600564)

http: //press.swjtu.edu.cn

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本：787 mm × 1092 mm 1/16 印张：11.375

字数：271 千字 印数：1—2000 册

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-81104-042-5/O・005

定价：16.00 元

《线性代数》编委会

主　编　周仁郁

副主编　曹治清　杨胤清

编　委　崔相学　刘基良　刘　敏

前　言

高等数学、线性代数、中医药统计学，是中医药院校的三大数学课程。高等数学重在研究确定性现象的连续变化规律，研究的工具是极限，研究的内容是微积分、数学模型。中医药统计学重在研究随机性现象的统计规律，研究的工具是概率，研究的方法是由样本描述和推断总体的特征。线性代数则是研究确定性现象的系统变化规律，研究的工具是矩阵，研究的内容是矩阵理论，直接应用的是线性方程组、投入产出分析、线性规划和非线性规划。随着科学技术的进步，特别是计算机技术的迅速发展，线性代数已经渗透到从自然科学技术到工农业生产建设，从经济活动到管理活动的各个领域。

传统的线性代数教学模式，是教师在黑板上演算，学生在纸上演算。本书是突破这种教学模式的一种尝试，它具有理论与实际、动脑与动手、教学与实验、教学与自学相结合的四大优点。理论与实际相结合，是指它既较完整地介绍了线性代数的基本理论，又广泛地介绍了医药、管理等多方面的实际问题，引导学生把所学的知识用于实践。动脑与动手相结合，是指它既注重建立数学模型的思想，又注重对系统分析方法的总结，引导学生用脑指挥手。教学与实验相结合，引导学生用数学软件简化繁杂的线性代数运算，降低学习线性代数的难度。教学与自学相结合，是指它按教学进度编排，既方便教师用多媒体讲授，又方便学生课前及课后自学。

本书共7章，第1至5章为基本的矩阵理论，第6章为系统分析应用方法，第7章为计算机实验。使用时，可以根据需要选择内容进行教学，跳过部分定理的证明，也不会影响学习的科学性、系统性和完整性。

本书由周仁郁主编，并编写第6章3至6节，曹治清编写第3、4章，杨胤清编写第7章及自我测验题，崔相学编写第5章，刘基良编写第1章及第6章1至2节，刘敏编写第2章。

编　者

2005年1月

目　　录

1 行列式

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式

首先，我们从求解二元一次方程组的问题中引出二阶行列式的定义。

例 1 求解二元线性方程组，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

解 应用加减消元法，在 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时得到

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

我们发现，在方程解 x_1、x_2 的一般表达式中，分母都是“$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$”。

为方便记忆和书写，引入记号和规定运算，称为二阶行列式（2 order determinant），即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

其中，每个数 a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ 称为该行列式的元素，共有 $2^2 = 4$ 个元素，元素的第一个下标 i 表示该元素在行列式的行序，第二个下标 j 表示元素的列序。所以任一元素 a_{ij} 就可以通过其行序与列序唯一交叉确定，这便是行列式名称的由来。显然二阶行列式的值为 $2! = 2$ 个项的代数和，且可以视为左上角与右下角乘积减去右上角与左下角乘积，故称之为对角线法则（Sarrus 规则）。

例 2 利用对角线法则计算二阶行列式的值。

① $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

解 由二阶行列式的对角线法则，得到

① $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\times4 - 3\times1 = 5$

② $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

1.1.2 三阶行列式

与二阶行列式类似，三阶行列式也是从求解三元一次方程组的问题中引出，这里我们直接给出其定义。

由 $3^2=9$ 个数，排成三行三列的式子，并规定：实线上元素的乘积前加正号，虚线上元素的乘积前加负号，称为三阶行列式的对角线法则，如图 1-1 所示。

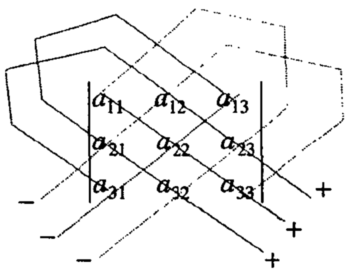

图 1-1 三阶行列式的对角线法则

这样规定的记号和运算，即称为三阶行列式（3 order determinant），即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1\text{-}2)$$

显然，三阶行列式的值为 3! =6 个项的代数和。

例 3 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$的值。

解 利用对角线法则得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=1\times2\times3+0\times0\times2+3\times3\times0-2\times2\times0-3\times0\times3-3\times0\times1=6$$

1.1.3 排 列

作为定义 n 阶行列式的准备，我们先给出一些有关排列的基本概念。

由 1，2，…，n 组成的一个有序数组，称为一个 n 元排列。如由 1，2，3 组成的三元排列有且仅有 3!=6 个，即

123，132，213，231，312，321

同理，n 元排列一共有 $n!$ 个。

定义 1 在一个排列中，任意找出两个数，若较大的数排在较小的数之前，就称这对数构成一个反序。一个 n 元排列的反序总数，称为这个排列的反序数，记为 $\tau(\ \ )$。

如在排列 231 中，2 与 1 构成一个反序，3 与 1 构成一个反序，共有两个反序，这个排列的反

序数为2，记为$\tau(231)=2$。

例 4 计算排列的反序数。

① 35412　　② $n(n-1)(n-2)\cdots321$

解 分别计算反序的个数，得到

① 35412 的反序有 31、32、54、51、52、41、42，故

$$\tau(35412)=7$$

② $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 的反序有$[n(n-1)$、$n(n-2)$、…、$n1]$，$[(n-1)(n-2)$、…、$(n-1)1]$，…，21，故

$$\tau[n(n-1)(n-2)\cdots321]=(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 2 反序数是偶数的排列称为偶排列，反序数为奇数的排列称为奇排列。

如：由于$\tau(31452)=4$，则 31452 是偶排列。$\tau(35412)=7$，则 35412 是奇排列。

1.1.4 n 阶行列式

有了排列的一些基础知识，我们就可以在分析三阶行列式表达式特点的基础上，给出 n 阶行列式的定义。

由 1-2 式可以看出，每一项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的积，在书写时可以把每项元素的行标排成 123 自然排列，得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-3}$$

由于 3 个数$j_1j_2j_3$的三元排列共有 6 个，正好可以用来决定三阶行列式 6 项的符号。现在分析（1-3）式中一，二，三项为什么带正号，四，五，六项为什么带负号？可以看出，符号与列标排列 $j_1j_2j_3$的反序数有关。显然 123，231，312 都为偶排列，321，213，132 都为奇排列。当$j_1j_2j_3$为偶排列时前面带正号，相反带负号，故每项前所带符号可以表示为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$。从而，三阶行列式可以表示为所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的代数和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-4}$$

其中，$\sum$表示把所有通项$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 加起来，而 $j_1j_2j_3$ 要取完所有三元排列。

定义 3 n 阶行列式（n order determinant），是所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 代数和，各项符号由 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定，偶排列带正号，奇排列带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-5}$$

n 阶行列式在 $n>3$ 时，不能使用对角线法则计算。

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 的值。

解 此行列式中有很多元素为 0，则通项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中就有很多项为 0，我们只需找出所有元素都不为 0 的项加起来即可。

由于每项取自不同的行与不同的列，第一行只有选 a_{14} 才不为 0，第二行只有选 a_{23}，第三行只有选 a_{32}，第四行只有选 a_{41}，这样 $4!=24$ 项中只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 不为 0，故行列式值为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式的值。

① $\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{x} & 2 \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} \tan x & \sec x \\ \cos x & \cot x \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$　　④ $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

⑤ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　⑥ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. 计算以下 9 元排列的逆序数，从而判断它们的奇偶性。

① 134782695　　② 217986354　　③ 987654321

3. 在 6 阶行列式中，$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应该带什么符号。

4. 由行列式定义计算下式中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由。

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

1.2 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，但当阶数 n 较大时，运算相当麻烦，而直接应用定义来计算行列式的值也不太可能。因此有必要介绍一些有关行列式的重要性质，在计算行列式时，应用其性质往往可以简化计算过程，起到事半功倍的效果。由于行列式的性质对任何阶数的行列式都成立，在这里为了便于叙述与举例，我们只讨论三阶行列式的性质，其对 n 阶行列式同样适用。

1.2.1 基本性质

三阶行列式性质，只需等号左右两边用对角线法则验证即可证明，这里不再一一叙述。

性质 1 把行列式的各行变成相应的列，所得行列式称为转置行列式，行列式与其转置行列式的值相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

行列式 D 的转置行列式，记为 D^{T}，故性质 1 也可叙述为：$D = D^{\mathrm{T}}$。

这里特别说明，根据性质 1，对于行成立的性质对于列也成立，反之亦然。

性质 2 把行列式的两行（列）互换，所得行列式与原行列式绝对值相等，符号相反，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-7}$$

性质 2 说明，我们一旦把行列式中两行（列）交换位置，必须在行列式前添加一个负号。

性质 3 把行列式的某一行（列）的所有元素同乘以常数 k，相当于用 k 乘以原行列式，即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

根据性质 3，当行列式中有一行（列）有公因子时，可以将其提到行列式前面作为系数。

性质 4 如果行列式的某一行（列）的元素都可看作两项的代数和，那么这个行列式等于该行（列）各取一项且其余行（列）不变的两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-9}$$

性质 5 把行列式的某一行（列）的所有元素同乘以一个常数 k 加到另外一行（列）的对应元素上，所得行列式与原行列式相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-10}$$

1.2.2 特殊性质

这里所列举的特殊性质，仅仅指使得行列式的值为零的性质。这些性质，是 1.2.1 某些性质的推论，为了便于记忆，这里把它们罗列到一起。

推论 1 如果行列式的某两行（列）的元素对应相等，那么行列式的值为零。

证明 设 D 为具有推论 1 特点的行列式，则把元素对应相等的两行（列）互换位置，根据性质 2，需要在新行列式前添加负号，但对换后仍是原行列式，得到 $D=-D$，故 $D=0$ 得证。

推论 2 如果行列式的某一行（列）的元素全部为零，那么行列式的值为零。

证明 由性质 3，即可证之。

推论 3 如果行列式的某两行（列）的对应元素成比例，那么行列式的值为零。

证明 由性质 3 与推论 1，即可证之。

推论 1 相当于推论 3 的特殊情形，即比例系数为 1。

例 1 应用行列式的性质与推论，计算下列行列式的值。

① $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}$

解 由行列式的性质与推论，得到

① $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}[1\times2\times(-1)+1\times3\times(-2)+1\times(-2)\times2 = -\frac{2}{5}$

② $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix} = 3\times2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3 & 1+2 & 2 \\ 8 & 5+3 & 3 \\ 6 & -1+7 & 7 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 6\times0=0$

例 2 应用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

证明 由行列式的性质得到

$$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b-a & c & -a \\ a+c-c & b & -c \\ b+c-b & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

习题 1.2

1: 应用行列式的性质计算下列行列式的值。

① $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & l \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & p+q \\ q & p & o \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 12 & 24 & 36 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$　　④ $\begin{vmatrix} 554 & 427 & 327 \\ 586 & 443 & 343 \\ 711 & 504 & 404 \end{vmatrix}$

2. 下列计算过程中哪些步骤是对的，哪些不对，怎么改正?

① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21}-ha_{11} & a_{22}-ha_{12} \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11}+ha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21}+ha_{23} \\ a_{31} & a_{31} & ka_{31}+ha_{33} \end{vmatrix}$

3. 应用行列式性质证明。

① $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

② $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

③ $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix} = (p-q)(q-p)(r-p)(p+q+r)$

④ $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$

4. 求证：$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$是经过不同的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线方程。

1.3 行列式的计算

计算行列式的基本思想，是运用行列式的性质将其化为容易计算的行列式，或者运用行列式的展开定理将其化为较低阶的行列式。

1.3.1 特殊行列式

在行列式中，有些行列式比较特殊，如三角形行列式、对角形行列式和奇数阶反对称行列式等，这些行列式的值与某些特定元素有关或者等于零。特别是三角形行列式，在计算行列式的值中有重要作用。

例 1 计算行列式的值。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由行列式的性质，得到

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这里，计算 D^{T} 的值是根据 n 阶行列式定义进行的，与 1.1 例 5 方法一样。

计算行列式时，可应用行列式性质将其化为例 1 所示的上三角形行列式，则其值为对角线上的元素乘积。类似地，也可以化为以下形式的特殊行列式，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & g \\ -d & -g & -i & -g & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

这个行列式的特点是元素 a_{ij} 与元素 a_{ji} 互为相反数，即 $a_{ij}=-a_{ji}$，而且阶数为奇数（5 阶）。具有这种特点的行列式，称为奇数阶反对称行列式。

解 记行列式为 D，由行列式的性质得到

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}0&-a&-b&-c&-d\\a&0&-e&-f&-g\\b&e&0&-h&-i\\c&f&h&0&-g\\d&g&i&g&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5\begin{vmatrix}0&a&b&c&d\\-a&0&e&f&g\\-b&-e&0&h&i\\-c&-f&-h&0&g\\-d&-g&-i&-g&0\end{vmatrix}=-D$$

故 $2D=0$，得到 $D=0$。

由此，可得任一奇数阶反对称行列式的值都为 0。

1.3.2 余子式与代数余子式

在把行列式按一行（列）展开时，我们要用到代数余子式的概念。

由三阶行列式的对角线法则，得到

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix} \tag{1-11}$$

在式（1-11）中，二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

就是在原行列式中将元素 a_{11} 所在的行与列划去后，剩下的元素按原来的相对位置组成的低一阶的行列式。这样的行列式称为 a_{11} 的余子式，记为 M_{11}。又如：a_{22}，a_{32} 的余子式分别为

$$M_{22}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}，M_{32}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}$$

定义 1 在 n 阶行列式中，元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 后得到的式子，称为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1-12}$$

如，在上面的三阶行列式中，第一行元素的代数余子式为

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-13}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-14}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1-15}$$

这样，式（1-11）可以写为第一行元素与相应代数余子式乘积之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1-16}$$

一般地，有如下的行列式展开定理。

定理 1 n 阶行列式等于其任一行（列）所有元素与相应代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n3} \end{vmatrix} \overset{(i)}{=\!=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1-17}$$

其中，等号上方写(i)，表示 n 阶行列式按第 i 行展开。

按三阶行列式即可证明。如，三阶行列式按行展开，即

$$\begin{aligned} D &\overset{(1)}{=\!=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &\overset{(2)}{=\!=} a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &\overset{(3)}{=\!=} a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \tag{1-18}$$

三阶行列式按列展开，即

$$\begin{aligned} D &\underset{(1)}{=\!=} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &\underset{(2)}{=\!=} a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &\underset{(3)}{=\!=} a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \tag{1-19}$$

其中，等号下方写(i)，表示 n 阶行列式按第 i 列展开。

1.3.3 行列式的计算

高于三阶的行列式不能使用对角线法则，计算较为复杂。为了运算清晰及便于检验每一步的正确性，现做如下规定：