



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

全程导学及习题全解

(下)

华东师大第三版

闫晓红 王贵鹏 主编

- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

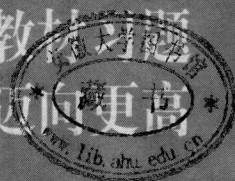
全程导学及习题全解

(下)

华东师大第三版

闫晓红 王贵鹏 主编

- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

数学分析全程导学及习题全解. 下册/闫晓红,王贵鹏主编.—北京:中国时代经济出版社,2006.2

(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 7-80169-899-1

I.数... II.①闫...②王... III.数学分析-高等学校-教学参考资料 IV.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 157152 号

数学分析全程导学及习题全解(下册)

闫晓红 王贵鹏 主编

出版者	中国时代经济出版社
地址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦 11 层
邮政编码	100007
电话	(010)68320825 68320496
传真	(010)68320634
发行	各地新华书店
印刷	北京市白帆印务有限公司
开本	787×1092 1/16
版次	2006 年 3 月第 1 版
印次	2006 年 3 月第 1 次印刷
印张	19
字数	350 千字
印数	1~5000 册
定价	20.00 元
书号	ISBN 7-80169-899-1/G·382

版权所有 侵权必究

内容简介

本书是华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)的配套参考用书。为了便于学生学习,本书的编排严格与教材保持一致。全书对每一小节都总结了知识要点及思想方法,这部分内容不是对教材知识点的罗列,而是着重知识点之间的联系,帮助学生在更高层次上理解教材内容。

对课后习题,我们力争做到“全”、“详”、“精”。“全”是指本书包括了教材中所有习题的解答,包括横线下的习题和作为选修内容的习题。“详”是指我们对每一道习题都给出了详细的解题步骤。“精”则是对习题的解答都是在参考国内外现在资料基础上给出最好的方法,而且比较难的习题在解题之前有解题分析,比较典型的习题解后还有解后注意事项。

在每个内容单元之后,我们给出了几个有关本单元的综合练习与提高习题,这些习题都是各校考研习题或者是国内外数学竞赛习题,供学有余力的同学使用,习题之后有详细的答案和提示。

前 言

数学分析是数学系最重要的一门专业基础课,因为它不仅是大学数学系第一门重要课程,而且大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用,至于它的基本概念、思想和方法,更可以说是无处不在。数学专业后继专业课程如微分方程、实变函数和复变函数、概率论、统计及泛函分析、微分几何等课程都要以数学分析为基础。同时数学分析也是数学专业各个方向上考研必考的专业基础课。

数学分析逻辑性很强,只要在课堂上专心听讲,一般是可以听得懂的,但即便能听懂,习题还是难以顺利完成。这是因为数学分析习题的技巧性很强,只了解基本的理论和方法,不辅以相应的技巧,是很难顺利应用理论和方法解出习题的。这些都给学生的学习带来不少困难。针对这一问题,为了帮助学生克服困难,使学生尽快掌握这门课程的思想方法,我们编写了这套辅导用书。

当然,任何参考书都只是启发思维的辅助工具,只有在经过独立思考之后再对照相应的参考教材,才能有所收获。因此希望读者能正确使用本书,达到提高数学素养和学好数学分析的双重目的。当然限于编者的水平,本书一定有不少缺点和错误,欢迎读者批评指正。作者 email: wgpyxh@163.com

编者

目 录

第十二章	数项级数	1
	§1 级数的收敛性	1
	知识要点及思想方法	1
	课后习题详解	2
	§2 正项级数	8
	知识要点及思想方法	8
	课后习题详解	9
	§3 一般项级数	15
	知识要点及思想方法	15
	课后习题详解	17
	总练习题详解	22
第十三章	函数列与函数项级数	25
	§1 一致收敛性	25
	知识要点及思想方法	25
	课后习题详解	27
	§2 一致收敛函数列与函数项级数的性质	34
	知识要点及思想方法	34
	课后习题详解	35
	总练习题详解	40
第十四章	幂级数	44
	§1 幂级数	44
	知识要点及思想方法	44
	课后习题详解	46
	§2 函数的幂级数展开	52
	知识要点及思想方法	52
	课后习题详解	54
	§3 复变量的指数函数·欧拉公式	57
	课后习题详解	57
	总练习题详解	58
第十五章	傅里叶级数	62
	§1 傅里叶级数	62
	知识要点及思想方法	62

	课后习题详解	64
	§2 以 $2l$ 为周期的函数的展开式	74
	知识要点及思想方法	74
	课后习题详解	74
	§3 收敛定理的证明	81
	知识要点及思想方法	81
	课后习题详解	82
	总练习题详解	84
	级数 练习与提高	88
	答案与提示	88
第十六章	多元函数的极限与连续	91
	§1 平面点集与多元函数	91
	知识要点及思想方法	91
	课后习题详解	92
	§2 二元函数的极限	98
	知识要点及思想方法	98
	课后习题详解	99
	§3 二元函数的连续性	104
	知识要点及思想方法	104
	课后习题详解	105
	总练习题详解	109
第十七章	多元函数微分学	112
	§1 可微性	112
	知识要点及思想方法	112
	课后习题详解	113
	§2 复合函数微分法	120
	知识要点及思想方法	120
	课后习题详解	120
	§3 方向导数与梯度	124
	知识要点及思想方法	124
	课后习题详解	125
	§4 泰勒公式与极值问题	128
	知识要点及思想方法	128
	课后习题详解	129
	总练习题详解	139
第十八章	隐函数定理及其应用	143
	§1 隐函数	143
	知识要点及思想方法	143
	课后习题详解	143
	§2 隐函数组	148

	知识要点及思想方法	148
	课后习题详解	148
	§ 3 几何应用	155
	知识要点及思想方法	155
	课后习题详解	155
	§ 4 条件极值	159
	知识要点及思想方法	159
	课后习题详解	160
	总练习题详解	164
	多元函数微分学 练习与提高	170
	答案与提示	171
第十九章	含参量积分	173
	§ 1 含参量正常积分	173
	知识要点及思想方法	173
	课后习题详解	174
	§ 2 含参量反常积分	179
	知识要点及思想方法	179
	课后习题详解	181
	§ 3 欧拉积分	185
	知识要点及思想方法	185
	课后习题详解	187
	总练习题详解	190
第二十章	曲线积分	194
	§ 1 第一型曲线积分	194
	知识要点及思想方法	194
	课后习题详解	195
	§ 2 第二型曲线积分	198
	知识要点及思想方法	198
	课后习题详解	198
	总练习题详解	202
第二十一章	重积分	205
	§ 1 二重积分概念	205
	知识要点及思想方法	205
	课后习题详解	206
	§ 2 直角坐标系下二重积分的计算	209
	知识要点及思想方法	209
	课后习题详解	209
	§ 3 格林公式·曲线积分与路线的无关性	215
	知识要点及思想方法	215
	课后习题详解	216

	§ 4 二重积分的变量变换	221
	知识要点及思想方法	221
	课后习题详解	222
	§ 5 三重积分	230
	知识要点及思想方法	230
	课后习题详解	230
	§ 6 重积分的应用	235
	知识要点及思想方法	235
	课后习题详解	236
	§ 7 n 重积分	240
	知识要点及思想方法	240
	课后习题详解	240
	§ 8 反常二重积分	242
	知识要点及思想方法	242
	课后习题详解	243
	总练习题详解	244
第二十二章	曲面积分	253
	§ 1 第一型曲面积分	253
	知识要点及思想方法	253
	课后习题详解	253
	§ 2 第二型曲面积分	255
	知识要点及思想方法	255
	课后习题详解	256
	§ 3 高斯公式与斯托克斯公式	258
	知识要点及思想方法	258
	课后习题详解	258
	§ 4 场论初步	263
	知识要点及思想方法	263
	课后习题详解	263
	总练习题详解	268
第二十三章	流形上微积分学初阶	272
	课后习题详解	272
	§ 1 n 维欧氏空间与向量函数	272
	§ 2 向量函数的微分	276
	§ 3 反函数定理和隐函数定理	281
	§ 4 外积、微分形式与一般斯托克斯公式	286
	总练习题详解	288
	多元函数积分学 练习与提高	292
	答案与提示	293
	主要参考文献	294

级数

第十二章 数项级数

§ 1 级数的收敛性

知识要点及思想方法

一、级数

1. 级数: 给定一个数列 $\{u_n\}$, 把它的各项用 + 号连接起来的表达式

$$u_1 + \cdots + u_1 + \cdots$$

称为数项级数或无穷级数. (也常简称为级数). u_n 通常称为级数的通项. 级数常简记为 $\sum u_n$.

2. 级数的敛散性与和

如果级数 $u_1 + \cdots + u_1 + \cdots$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S , (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$) 则称级数收敛, 并且 S 为级数的和.

3. 级数与数列的关系

(1) 设 $\sum u_n$ 对应部分和数列 $\{S_n\}$, 则 $\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛.

(2) 对每个数列 $\{x_n\}$, 对应级数 $x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$, 对该级数有 $S_n = x_n$. 于是数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$

级数 $x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 收敛.

可见, 级数与数列是同一问题的两种不同形式.

4. 级数与无穷积分的关系

(1) $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中 $u_n = \int_n^{n+1} f$ 无穷积分可化为级数;

(2) 对每个级数, 定义函数 $f(x) = u_n, n \leq x < n+1, n = 1, 2, \dots$, 易见有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

即级数可化为无穷积分.

综上所述, 级数和无穷积分可以互化, 它们有平行的理论和结果. 可以用其中的一个研究另一个.

二、级数的敛散性

1. 柯西准则

$\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时有:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \epsilon.$$

由该定理可知, 去掉或添加上或改变(包括交换次序)级数的有限项, 不会影响级数的敛散性.

但在收敛时, 级数的和将改变. 去掉前 k 项的级数表为 $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+k}$.

2. 级数收敛的必要条件

$\sum u_n$ 收敛则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

注意 应用柯西准则时, 应设法把式 $\left| \sum_{k=1}^p u_{n+k} \right|$ 适当地放大成只含 n 而不含 p 的式子, 令其小于 ϵ , 从而确定 N .

三、收敛级数的基本性质

性质 1 $\sum u_n$ 收敛, a 为常数则 $\sum au_n$ 收敛, 且有 $\sum au_n = a \sum u_n$ (收敛级数满足分配律).

性质 2 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 收敛则 $\sum (u_n \pm v_n)$ 收敛, 且有 $\sum (u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n$.

注意 $\sum u_n$ 、 $\sum v_n$ 、 $\sum (u_n \pm v_n)$ 三者之间敛散性的关系.

性质 3 若级数 $\sum u_n$ 收敛, 则任意加括号后所得级数也收敛, 且和不变. (收敛数列满足结合律)

课后习题详解

1. 证明下列级数的收敛性, 并求其和数:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \dots;$$

解 此类型题目一般要先观察其特点, 找出其中的规律,

$$\begin{aligned} \text{由题可知: } S_n &= \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1}\right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1}\right) \end{aligned}$$

取极限有: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5}$, 所以该级数收敛, 并且和为 $\frac{1}{5}$.

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

解 此级数由两个级数相加组成, 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的级数, 所以收敛于 $\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 则是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比级数, 收敛于 $\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, 由定理 12.2 级数的性质可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \text{ 收敛于 } 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

解 这里要用到一个常用的变换:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

则级数的前 n 项和 S_n 可写作:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \cdots - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \end{aligned}$$

$$\text{取极限得: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

所以该级数收敛且和为 $\frac{1}{4}$.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

解 先求前 n 项和:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) - (\sqrt{n+1} - 1) \\ &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \\ &= 1 - \sqrt{2} + \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \\ &= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

取极限得: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$, 所以此级数收敛且和为 $1 - \sqrt{2}$.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

解 和前面一样, 我们还是先求出级数的前 n 项和, 这里要使用一定技巧, 由于 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}$

且 $2S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^{k-1}}$, 则

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_n - S_n \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \\ &= \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}\right) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \end{aligned}$$

取极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$. 故原级数收敛且和为 3.

2. 证明: 若级数 $\sum u_n$ 发散, $c \neq 0$, 则 $\sum cu_n$ 也发散.

证明 此类题既可用定义证明, 也可用反证法证明, 根据级数发散的充要条件: 若级数 $\sum u_n$ 发散则任取某正数 ε_0 , 对任何正整数 N , 总存在正整数 $m_0 (> N)$ 和 p_0 , 有 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0$, 对级数 $\sum cu_n$ 来讲有:

$$|cu_{m_0+1} + cu_{m_0+2} + \cdots + cu_{m_0+p_0}| = |c| |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq |c| \varepsilon_0$$

根据级数发散的充要条件, $\sum cu_n$ 也发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散, 试问 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散吗? 又若 u_n 与 $v_n (n=1, 2, \cdots)$ 都是非负数, 则能得出什么结论?

解 若 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散, 但级数 $\sum (u_n + v_n)$ 不一定发散. 例如: 级数 $\sum \frac{1}{n}$ 与 $\sum \left(-\frac{1}{n}\right)$ 都发散, 但级数 $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0$ 收敛.

当 u_n 和 v_n 都是非负数时, 若 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散, 则 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散. 证明如下:

由于 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都发散, 则由发散级数定义, 对任何正整数 N , 存在整数 $m_0 (m_0 > N)$ 和 p_0 及 $m_1 (> N)$ 和 p_1 有下式成立:

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| > \varepsilon_0$$

$$|v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1}| > \varepsilon_1$$

对级数 $\sum (u_n + v_n)$ 有:

$$|(u_{m_1+1} + v_{m_1+1}) + (u_{m_1+2} + v_{m_1+2}) + \cdots + (u_{m_1+p_1} + v_{m_1+p_1})|$$

$$= |(u_{m_1+1} + u_{m_1+2} + \cdots + u_{m_1+p_1}) + (v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1})| \\ \geq |u_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1}| \geq \varepsilon_1$$

由定理 12.1 知级数 $\sum (u_n + v_n)$ 发散.

4. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

证明 此类题一般要用到级数收敛定义. 先写出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 的部分和 $S_m = \sum_{n=1}^m (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 + \cdots - a_m + a_m - a_{m+1} = a_1 - a_{m+1}$

取极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} (a_1 - a_{m+1}) = a_1 - a$ 命题得证.

5. 证明: 若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则

(1) 级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散;

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时, 级数 $\sum (\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) = \frac{1}{b_1}$.

分析 有关级数收敛、发散的证明一般需用到级数的定义, 通常先确定部分和, 之后再求证.

证明 (1) 级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$

取极限得: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. 所以级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$

级数 $\sum (\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}})$ 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}) = (\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}) + (\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}) + \cdots + (\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}$ 取极限得: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{b_1}$

所以级数 $\sum (\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}) = \frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4.5 题的结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}.$$

分析 解题的先决条件是将所给表达式化为与 4.5 题相同的形式, 再利用已有结果解题.

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n})$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a+n-1} = 0$ 且 $a_1 = \frac{1}{a}$ 由 4 题结果知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a} - 0 = \frac{1}{a}$.

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) \right]$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 0$ 且 $a_1 = 1$ 由 4 题结果有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1 - 0 = 1.$$

(3) 由于 $\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{[(n+1)^2+1] - (n^2+1)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}$ 由 5 题

(2) 结果: 令 $b_n = \frac{1}{n^2+1}$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 且 $b_1 = \frac{1}{2}$, 则有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{1}{2}.$$

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum \frac{\sin 2^n}{2^n}; \quad (2) \sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2+1};$$

$$(3) \sum \frac{(-1)^n}{n}; \quad (4) \sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}.$$

分析 对于用定义判断的级数, 主要是根据 ϵ 给出相应 N 的对应形式.

解 (1) 由于 $|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| = \left| \frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}} + \frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}} \right| < \sum_{k=1}^p < \frac{1}{2^{m+k}}$
 $< \frac{1}{2^m} \left(1 - \frac{1}{2} \right) < \frac{1}{2^m}$

所以对于 $\forall \epsilon$, 我们可取 $N = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 当 $m > N$ 时, 对于 $\forall p$ 有 $|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \epsilon$, 故级数收敛.

(2) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{3}$ 对任意 N , 取 $m_0 = N+1$ $p_0 = 1$

$$\begin{aligned} \text{则 } |u_{m_0+1}| &= \left| \frac{(-1)^{m_0} (m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1} \right| = \left| \frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1} \right| \\ &> \left| \frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+(m_0+1)^2} \right| = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

由柯西准则知该级数发散.

(3) 对于 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$, 对于任意 $m > N$ 及任意整数 $p > 0$, 有:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} + \frac{(-1)^{m+2}}{m+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m+p}}{m+p} \right| = |(-1)^{m+1}| \left| \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{m+p} \right| \\ &= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{m+p} \\ &= \frac{1}{m+1} - \left[\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{m+p} \right] \\ &< \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} < \epsilon \end{aligned}$$

所以级数收敛.

(4) 取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 对任意 N , 取 $m_0 = 2N$, 取 $p_0 = m_0$ 有 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}|$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{(m_0+k)^2 + (m_0+k)^2}} \right| \geq \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{(m_0+k)^2 + (m_0+k)^2}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{\sqrt{(m_0+p_0)^2 + (m_0+p_0)^2}} = \frac{p_0}{\sqrt{2(m_0+p_0)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \epsilon \end{aligned}$$

由柯西准则知, 该级数发散.

8. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是: 任给正数 ϵ , 存在某正整数 N , 对一切 $n > N$ 总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \epsilon$$

分析 此类证明题一般要用到柯西准则

证明 必要性 若 $\sum u_n$ 收敛. 由柯西准则知: 对于 $\forall \epsilon > 0$, 存任 $N_1 > 0$, ($N \in$ 整数), 使得当 $n > m > N_1$ 时有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \epsilon$$

取 $N > N_1 + 1$, 则对任何 $n > N$ 有:

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \epsilon$$

充分性 若对于 $\forall \epsilon > 0$, 存任某自然数 N , 对一切 $n > N$, 总有 $|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \epsilon$ 则对于一切 $n > m > N$, 有:

$$\begin{aligned} &|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| \\ &= |(u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n) - (u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m)| \\ &\leq |(u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n) + (u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m)| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \quad \text{由柯西收敛准则知级数收敛.} \end{aligned}$$

命题得证.

9. 举例说明: 若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = 0,$$

此级数仍可能不收敛.

解 例如级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散. 但对每一个固定 p

$$\begin{aligned} &\text{有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+p} = 0. \end{aligned}$$

10. 设级数 $\sum u_n$ 满足: 加括号后级数

$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$ 收敛 ($n_1 = 0$), 且任同一括号中的 $u_{n_k+1}, u_{n_k+2}, \cdots, u_{n_{k+1}}$ 符号相同, 证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

证明 因为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$ 收敛. 由柯西收敛准则的推论有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}}) = 0$$

由于括号内各项同号,有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k+1} + u_{n_k+2} + \cdots + u_{n_{k+j}}) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots (n_{k+1} - n_k)$$

设 $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$, $S'_k = \sum_{i=1}^k (u_{n_i+1} + \cdots + u_{n_{i+1}})$. 对 $\forall$ 正整数, 总存在正整数 k , 使 $n = n_k + j \quad 1 \leq j \leq n_{k+1} - n_k$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^{k-1} (u_{n_i+1} + \cdots + u_{n_{i+1}}) + (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+j}}) \\ &= S'_{k-1} + (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+j}}) \end{aligned}$$

由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} (k-1) = \infty$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S'_{k-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+j}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S'_{k-1}$$

所以 $\sum u_n$ 收敛且和不变.

§2 正项级数

知识要点及思想方法

一、正项级数收敛的一般判别原则

1. 正项级数

如果对于任意 n , 都有 $u_n > 0$, 则称级数 $\sum u_n$ 为正项级数.

2. 基本判别定理

正项级数收敛的充要条件为其部分和数列有界.

3. 正项级数敛的比较原则

设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数, 且存在 N , 使得当 $n > N$ 时有 $u_n \leq v_n$, 则

(i) 若级数 $\sum v_n$ 收敛则级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 若级数 $\sum u_n$ 发散, 则 $\sum v_n$ 发散.

注意 (ii) 是 (i) 的逆否命题.

4. 比较原则的极限形式

设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

(i) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 共敛散;

(ii) 当 $l = 0$, 如果 $\sum v_n$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 收敛;

(iii) 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\sum v_n$ 发散, 则 $\sum u_n$ 发散.

注意 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数, 若 $u_n = o(v_n)$, 特别地, 若 $u_n \sim v_n, (n \rightarrow \infty)$, 则 $\sum u_n$