21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

全程导学及习题全解

（下）

华东师大第三版

闫晓红　王贵鹏　主编

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

全程导学及习题全解

（下）

华东师大第三版

闫晓红　王贵鹏　主编

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

数学分析全程导学及习题全解．下册/闫晓红，王贵鹏主编．—北京：中国时代经济出版社，2006.2

(21世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 7-80169-899-1

Ⅰ.数... Ⅱ.①闫...②王... Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第157152号

数学分析全程导学及习题全解(下册)

闫晓红 王贵鹏 主编

出 版 者	中国时代经济出版社
地 址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦11层
邮政编码	100007
电 话	(010)68320825 68320496
传 真	(010)68320634
发 行	各地新华书店
印 刷	北京市白帆印务有限公司
开 本	787×1092 1/16
版 次	2006年3月第1版
印 次	2006年3月第1次印刷
印 张	19
字 数	350千字
印 数	1~5000册
定 价	20.00元
书 号	ISBN 7-80169-899-1/G·382

内容简介

本书是华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)的配套参考用书。为了便于学生学习,本书的编排严格与教材保持一致。全书对每一小节都总结了知识要点及思想方法,这部分内容不是对教材知识点的罗列,而是着重知识点之间的联系,帮助学生在更高层次上理解教材内容。

对课后习题,我们力争做到"全"、"详"、"精"。"全"是指本书包括了教材中所有习题的解答,包括横线下的习题和作为选修内容的习题。"详"是指我们对每一道习题都给出了详细的解题步骤。"精"则是对习题的解答都是在参考国内外现在资料基础上给出最好的方法,而且比较难的习题在解题之前有解题分析,比较典型的习题解后还有解后注意事项。

在每个内容单元之后,我们给出了几个有关本单元的综合练习与提高习题,这些习题都是各校考研习题或者是国内外数学竞赛习题,供学有余力的同学使用,习题之后有详细的答案和提示。

前　言

数学分析是数学系最重要的一门专业基础课，因为它不仅是大学数学系第一门重要课程，而且大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用，至于它的基本概念、思想和方法，更可以说是无处不在。数学专业后继专业课程如微分方程、实变函数和复变函数、概率论、统计及泛函分析、微分几何等课程都要以数学分析为基础。同时数学分析也是数学专业各个方向上考研必考的专业基础课。

数学分析逻辑性很强，只要在课堂上专心听讲，一般是可以听得懂的，但即便能听懂，习题还是难以顺利完成。这是因为数学分析习题的技巧性很强，只了解基本的理论和方法，不辅以相应的技巧，是很难顺利应用理论和方法解出习题的。这些都给学生的学习带来不少困难。针对这一问题，为了帮助学生克服困难，使学生尽快掌握这门课程的思想方法，我们编写了这套辅导用书。

当然，任何参考书都只是启发思维的辅助工具，只有在经过独立思考之后再对照相应的参考教材，才能有所收获。因此希望读者能正确使用本书，达到提高数学素养和学好数学分析的双重目的。当然限于编者的水平，本书一定有不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。作者 email：wgpyxh@163. com

编者

目　　录

级　数

第十二章　数项级数

§1　级数的收敛性

知识要点及思想方法

一、级数

1. 级数：给定一个数列$\{u_n\}$，把它的各项用＋号连接起来的表达式

$$u_1+\cdots+u_1+\cdots$$

称为数项级数或无穷级数.（也常简称为级数）. u_n 通常称为级数的通项. 级数常简记为$\sum u_n$.

2. 级数的敛散性与和

如果级数 $u_1+\cdots+u_1+\cdots$ 的部分和数列$\{S_n\}$收敛于 S.（即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$）则称级数收敛，并且 S 为级数的和.

3. 级数与数列的关系

(1) 设$\sum u_n$对应部分和数列$\{S_n\}$，则$\sum u_n$收敛$\Leftrightarrow\{S_n\}$收敛.

(2) 对每个数列$\{x_n\}$，对应级数$x_1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$，对该级数有$S_n=x_n$. 于是数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow$级数$x_1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$收敛.

可见，级数与数列是同一问题的两种不同形式.

4. 级数与无穷积分的关系

(1) $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，其中$u_n=\int_n^{n+1}f$ 无穷积分可化为级数；

(2) 对每个级数,定义函数 $f(x)=u_n, n\leqslant x<n+1, n=1,2,\cdots$,易见有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$. 即级数可化为无穷积分.

综上所述,级数和无穷积分可以互化,它们有平行的理论和结果.可以用其中的一个研究另一个.

二、级数的敛散性

1. 柯西准则

$\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 N 和任意 $p\in\mathbf{N}$ 使得当 $n>N$ 时有:

$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

由该定理可知,去掉或添加上或改变(包括交换次序)级数的有限项,不会影响级数的敛散性.但在收敛时,级数的和将改变.去掉前 k 项的级数表为 $\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+k}$.

2. 级数收敛的必要条件

$\sum u_n$ 收敛则有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

注意 应用柯西准则时,应设法把式 $\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}\right|$ 适当地放大成只含 n 而不含 p 的式子,令其小于 ε,从而确定 N.

三、收敛级数的基本性质

性质 1 $\sum u_n$ 收敛,a 为常数则 $\sum au_n$ 收敛,且有 $\sum au_n=a\sum u_n$(收敛级数满足分配律).

性质 2 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 收敛则 $\sum(u_n\pm v_n)$ 收敛,且有 $\sum(u_n\pm v_n)=\sum u_n\pm\sum v_n$.

注意 $\sum u_n$、$\sum v_n$、$\sum(u_n\pm v_n)$ 三者之间敛散性的关系.

性质 3 若级数 $\sum u_n$ 收敛,则任意加括号后所得级数也收敛,且和不变.(收敛数列满足结合律)

课后习题详解

1. 证明下列级数的收敛性,并求其和数:

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

解 此类型题目一般要先观察其特点,找出其中的规律,

由题可知:$S_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$

取极限有:$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$,所以该级数收敛,并且和为$\frac{1}{5}$.

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

解　此级数由两个级数相加组成，其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的级数，所以收敛于 $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 则是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比级数. 收敛于 $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$，由定理 12.2 级数的性质可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ 收敛于 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

解　这里要用到一个常用的变换：

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

则级数的前 n 项和 S_n 可写作：

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\cdots-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{aligned}$$

取极限得：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$

所以该级数收敛且和为 $\frac{1}{4}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

解　先求前 n 项和：

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\\&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\\&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\\&=1-\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}\\&=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

取极限得：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = 1-\sqrt{2}$，所以此级数收敛且和为 $1-\sqrt{2}$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

解 和前面一样，我们还是先求出级数的前 n 项和，这里要使用一定技巧，由于 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$

且 $2S_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2k-1}{2^{k-1}}$，则

$$
\begin{aligned}
S_n &= 2S_n - S_n\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\\
&= \left(1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}\right)\\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\\
&= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}
\end{aligned}
$$

取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$. 故原级数收敛且和为 3.

2. 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，$c\neq 0$，则 $\sum cu_n$ 也发散.

证明 此类题既可用定义证明. 也可用反证法证明，根据级数发散的充要条件：若级数 $\sum u_n$ 发散则存任某正数 ε_0，对任何正整数 N，总存在正整数 $m_0(>N)$ 和 p_0，有 $|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0$，对级数 $\sum cu_n$ 来讲有：

$$|cu_{m_0+1}+cu_{m_0+2}+\cdots+cu_{m_0+p_0}|=|c||u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant|c|\varepsilon_0$$

根据级数发散的充要条件，$\sum cu_n$ 也发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，试问 $\sum(u_n+v_n)$ 一定发散吗？又若 u_n 与 $v_n(n=1,2,\cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论？

解 若 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散. 但级数 $\sum(u_n+v_n)$ 不一定发散. 例如：级数 $\sum\dfrac{1}{n}$ 与 $\sum\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ 都发散，但级数 $\sum\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\right)=0$ 收敛.

当 u_n 和 v_n 都是非负数时，若 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，则 $\sum(u_n+v_n)$ 一定发散. 证明如下：

由于 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都发散，则由发散级数定义，对任何正整数 N，存在整数 $m_0(m_0>N)$ 和 p_0 及 $m_1(>N)$ 和 p_1 有下式成立：

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|>\varepsilon_0$$

$$|v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}|>\varepsilon_1$$

对级数 $\sum(u_n+v_n)$ 有：

$$|(u_{m_1+1}+v_{m_1+1})+(u_{m_1+2}+v_{m_1+2})+\cdots+(u_{m_1+p_1}+v_{m_1+p_1})|$$

$= |(u_{m_1+1}+u_{m_1+2}+\cdots+u_{m_1+p_1})+(v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1})|$

$\geqslant |v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}|\geqslant \varepsilon_1$

由定理 12.1 知级数 $\sum(u_n+v_n)$ 发散.

4. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

证明　此类题一般要用到级数收敛定义. 先写出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的部分和 $S_m=\sum_{n=1}^{m}(a_n-a_{n+1})=a_1-a_2+a_2-a_3+a_3+\cdots-a_m+a_m-a_m+1=a_1-a_{m+1}$

取极限 $\lim_{m\to\infty}(a_1-a_{m+1})=a_1-a$ 命题得证.

5. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

分析　有关级数收敛、发散的证明一般需用到级数的定义，通常先确定部分和，之后再求证.

证明　(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$

取极限得：$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$. 所以极数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$. 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$

级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)+\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}$　取极限得：$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}$

所以级数 $\sum\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4，5 题的结果求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

分析　解题的先决条件是将所给表达式化为与 4，5 题相同的形式，再利用已有结果解题.

解　(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right)$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+n-1}=0$ 且 $a_1=\frac{1}{a}$ 由 4 题结果知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a}-0=\frac{1}{a}$.

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n}-\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right]$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}=0$且$a_1=1$由4题结果有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=1-0=1.$$

(3) 由于$\dfrac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\dfrac{[(n+1)^2+1]-(n^2+1)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\dfrac{1}{n^2+1}-\dfrac{1}{(n+1)^2+1}$由5题(2)结果：令$b_n=\dfrac{1}{n^2+1}$

由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$且$b_1=\dfrac{1}{2}$. 则有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{2}.$$

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\dfrac{\sin 2^n}{2^n}$；　　(2) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$；

(3) $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$；　　(4) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

分析　对于用定义判断的级数. 主要是根据ε给出相应N的对应形式.

解　(1) 由于$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|=\left|\dfrac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}+\dfrac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\dfrac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|<\sum\limits_{k=1}^{p}<\dfrac{1}{2^{m+k}}<\dfrac{1}{2^m}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2^m}$

所以对于$\forall\varepsilon$,我们可取$N=\left[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当$m>N$时,对于$\forall p$有$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$,故级数收敛.

(2) 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}$对任意$N$,取$m_0=N+1$　$p_0=1$

则$|u_{m_0+1}|=\left|\dfrac{(-1)^{m_0}(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}\right|=\left|\dfrac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}\right|$

$$>\left|\frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+(m_0+1)^2}\right|=\frac{1}{3}$$

由柯西准则知该级数发散.

(3) 对于$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$,对于任意$m>N$及任意整数$p>0$. 有：

$$\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}+\frac{(-1)^{m+2}}{m+2}+\cdots+\frac{(-1)^{m+p}}{m+p}\right|=|(-1)^{m+1}|\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{m+p}\right|$$

$$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m+p}$$

$$=\frac{1}{m+1}-\left[\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m+p}\right]$$

$$<\frac{1}{m+1}<\frac{1}{m}<\varepsilon$$

所以级数收敛.

(4) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$,对任意 N,取 $m_0=2N$,取 $p_0=m_0$ 有 $|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|$

$$=\left|\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+k)+(m_0+k)^2}}\right|\geqslant\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+k)^2+(m_0+k)^2}}$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{p_0}\frac{1}{\sqrt{(m_0+p_0)^2+(m_0+p_0)^2}}=\frac{p_0}{\sqrt{2(m_0+p_0)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\varepsilon$$

由柯西准则知,该级数发散.

8. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:任给正数 ε,存在某正整数 N,对一切 $n>N$ 总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$$

分析　此类证明题一般要用到柯西准则

证明　必要性　若 $\sum u_n$ 收敛. 由柯西准则知:对于 $\forall\varepsilon>0$,存任 $N_1>0$,($N\in$ 整数),使得当 $n>m>N_1$,时有

$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|<\varepsilon$

取　$N>N_1+1$,则对任何 $n>N$ 有:

$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$

充分性　若对于 $\forall\varepsilon>0$,存任某自然数 N,对一切 $n>N$,总有 $|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$

则对于一切 $n>m>N$,有:

$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n|$

$=|(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n)-(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m)|$

$\leqslant|(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n)+(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m)|$

$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$　由柯西收敛准则知级数收敛.

命题得证.

9. 举例说明:若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

此级数仍可能不收敛.

解　例如级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散. 但对每一个固定 p

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+p}=0.$

10. 设级数 $\sum u_n$ 满足:加括号后级数

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛($n_1=0$),且任同一括号中的 $u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$ 符号相同,证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

证明　因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛. 由柯西收敛准则的推论有:

$\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})=0$

由于括号内各项同号,有:

$\lim\limits_{k\to\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+j}})=0 \quad j=1,2,\cdots(n_{k+1}-n_k)$

设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$,$S'_k=\sum\limits_{i=1}^{k}(u_{n_i+1}+\cdots+u_{n_{i+1}})$. 对 $\forall$ 正整数,总存在正整数k,使$n=n_k+j \quad 1\leqslant j\leqslant n_{k+1}-n_k$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=\sum_{i=1}^{k-1}(u_{n_i+1}+\cdots+u_{n_{i+1}})+(u_{n_{k+1}}+\cdots+u_{n_{k+j}})$$
$$=S'_{k-1}+(u_{n_{k+1}}+\cdots+u_{n_{k+j}})$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(k-1)=\infty$,有:

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{k\to\infty}S'_{k-1}+\lim(u_{n_{k+1}}+\cdots+u_{n_{k+j}})=\lim\limits_{k\to\infty}S'_{k-1}$

所以$\sum u_n$ 收敛且和不变.

§2 正项级数

知识要点及思想方法

一、正项级数收敛的一般判别原则

1. 正项级数

如果对于任意 n,都有 $u_n>0$,则称级数$\sum u_n$ 为正项级数.

2. 基本判别定理

正项级数收敛的充要条件为其部分和数列有界.

3. 正项级数判敛的比较原则

设$\sum u_n$ 和$\sum v_n$ 是两个正项级数,且存在 N,使得当 $n>N$ 时有 $u_n\leqslant v_n$,则

(ⅰ)若级数$\sum v_n$ 收敛则级数$\sum u_n$ 收敛;

(ⅱ)若级数$\sum u_n$ 发散,则$\sum v_n$ 发散.

注意 (ⅱ)是(ⅰ)的逆否命题.

4. 比较原则的极限形式

设$\sum u_n$ 和$\sum v_n$ 是两个正项级数且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,则

(ⅰ)当 $0<l<+\infty$ 时,$\sum u_n$ 和$\sum v_n$ 共敛散;

(ⅱ)当 $l=0$,如果$\sum v_n$ 收敛,则$\sum u_n$ 收敛;

(ⅲ)当 $l=+\infty$ 时,如果$\sum v_n$ 发散,则$\sum u_n$ 发散.

注意 设$\sum u_n$ 和$\sum v_n$ 是两个正项级数,若 $u_n=o(v_n)$,特别地,若 $u_n\sim v_n$,$(n\to\infty)$,则$\sum u_n$