依据国家教育部中小学最新教材编写

数学

初中总复习

（修订版）

主　编：北京师范大学　向佐初

北京师范大学实验中学

北京师范大学附中

北京师范大学二附中

首都师范大学附中

北京四中

初中精讲检测丛书

西苑出版社

·初中精讲检测丛书·

初中总复习数学

（修订版）

主　　编　向佐初

副主编　巴　丹　王青悦

本卷主编　傅佑珊

西苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中总复习数学/向佐初主编．—北京：西苑出版社，1998.9

(初中精讲检测丛书)

ISBN 7—80108—127—7

Ⅰ．初… Ⅱ．向… Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．G633.303

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 14771 号

初中总复习数学

主　　编	向佐初
出版发行	西苑出版社
通讯地址	北京市海淀区永定路 7 号　100039
	电 话　68173419　传 真　68173417
印　　刷	北京市朝阳区科普印刷厂印刷
经　　销	全国新华书店
开　　本	787×1092 毫米 1/32　　印张　14.375
印　　数	1—5000 册　　字数　293 千字
	1999 年 6 月第一版　1999 年 6 月第一次印刷
书　　号	ISBN 7—80108—127—7/G·25

定　价：15.30 元

(凡西苑版图书有缺漏页，残破等质量问题本社负责调换)

前　言

为了配合九年义务教育的实施，加强初中基础知识与同步强化训练，帮助学生更好地学习和掌握教学大纲规定的内容，给学生复习、考试提供一套高质量有特色的导读丛书，以利于全面提高学生素质，打好基础，顺利应试，我们编撰了这套《初中精讲检测丛书》。本《丛书》由北京师范大学有关专家学者领衔主持，并组织北京师范大学实验中学、北京师范大学附中、北京师范大学二附中、首都师范大学附中、北京四中、北京大学附中、北京二中、北京九中、北京八十中、北京理工大学附中、北京师范大学、北方工业大学、北京教育学院西城分院、北京市石景山区教师进修学校，以及其他部分省市教育系统的教授、副教授、特级教师、高级教师、博士、讲师和基础教育专家共百余人，精心笔耕而成。

《丛书》以国家教育部审定的《全日制中学语文、数学、物理、化学、英语教学大纲(修订本)》为指导，以新教材为依据，按教科书的安排逐章编写，力求少而精，特别注意教材知识点的提炼，重点难点精讲，解题技巧与思路分析，巩固提高练习，期中期

末测试等方面的内容，涵盖了初中全部教材知识点。

这套《丛书》与教材同步配套，知识要点精炼，释文简明确切，例证新颖翔实，论证深入浅出，内容全面丰富，重点突出，独树一帜，具有较强的实用性、指导性、权威性，是初中生最佳的辅导读物，也是初中教师、家长们备课和辅导时较好的参考材料。

我们希望广大的初中生、教师、家长会喜欢她、珍爱她，这将使您受益匪浅。

本《丛书》在编辑出版中，曾得到中共中央办公厅西苑出版社的大力支持、杨宪金社长兼总编辑的指导及编辑工作人员的热情帮助，谨在此表示衷心的感谢。由于编写时间仓促，缺点和疏漏是难免的，恳请广大读者、专家批评指正。

北京师范大学　　向佐初

巴　丹

目　录

第一章　一元二次方程

【导引】

本章的主要内容有一元二次方程及其解法、应用；一元二次方程根的判别式及根与系数的关系；可化为一元二次方程的一些简单的高次方程、分式方程和无理方程的解法以及一些简单的二元二次方程组的解法。

一元二次方程的理论是初中代数中最重要的基础知识之一，因此在学习本章时应重点掌握以下几点：

1. 在理解一元二次方程概念的基础上，要会把任何一个一元二次方程化为一般形式，并会求解，掌握，并能熟练运用“开平方法”、“配方法”、“因式分解法”、“公式法”解一元二次方程。

2. 重视对方程根的理论以及一元二次方程根的判别式的理解，并能用判别式判定方程根的情况；掌握一元二次方程根与系数的关系及应用。

3. 切实掌握列方程解应用题的方法和技能。明确列方程解应用题的核心是分析题意，搞清楚问题所涉及的等量关系是解题的关键。

4. 明确解简单的高次方程、分式方程和无理方程的基本思路是：无理方程转化为有理方程，分式方程转化为整式方程，高次方程则进行降次，最后归结为一元一次或一元二

次方程求解。对于其中一些特殊的方程,根据其结构特点,宜采用“换元法”解。“换元法”换元,可化难为易,化繁为简,是一种十分重要的数学方法,要切实掌握,做到灵活运用。

5. 二元二次方程组的解法,实际上是“降次”、“消元”的综合运用。在学习中要注意总结和掌握一些简单的二元二次方程组的解法。

第一节　一元二次方程的概念及解法

一、教材精讲

(一)知识要点

1. 一元二次方程的概念及其一般形式。

2. 一元二次方程的基本解法:直接开平方法;配方法;公式法;因式分解法。

(二)重点难点提示

1. 只含有一个未知数,并且含未知数的项的次数最高是2的整式方程,叫做一元二次方程。关于x的一元二次方程的一般形式(或标准形式)是$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,任何关于x的一元二次方程经过化简、整理后皆可成为一般形式。这里有两点需加以注意。

(1)化为一般形式前的方程必须是一个关于x的整式方程,并且未知数的最高次数是2。

(2)$a\neq0$是一元二次方程一般形式的组成部分。

2. 一元二次方程的解法是本章知识的重点,而解一元二次方程,其关键是判断方程的特点,选择最佳解题方法,

其基本思想是“降次”，把二次方程转化为一次方程求解。

(1)直接开平方法的理论根据是平方根的定义。如果能把方程化为 $x^2=a(a\geqslant0)$ 的形式，那么将两边同时开方，得 $x=\pm\sqrt{a}$ 。这里应注意：一个数的平方根有两个，故开平方一定要取“±”，得到两个一元一次方程，否则会丢根。此外应明确：“开方”是解方程时，使方程降次的一种具体方法。

(2)一元二次方程可以通过配方的方法将其化为 $(x+m)^2=n(n\geqslant0)$ 的形式，再利用直接开平方法去解，这就是配方法。它的理论根据是乘法公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$。应用配方法解方程，如果二次项系数不是 1 时，必须先将二次项系数化为 1。

(3)应用配方法和直接开平方法可以导出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \langle 1\rangle$$

将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的系数 a、b、c 直接代入求根公式〈1〉，从而求出方程根的方法，叫做公式法。应用公式法解方程应注意两点：①必须先把方程整理成标准形式后，才能确定系数 a、b、c 的值，从而代入公式求解。②因为 b^2-4ac 的值是否非负决定方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 是否有实根，所以一般先要计算 b^2-4ac 的值。当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，就代入求根公式去求根；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实根。

(4)如果一元二次方程的一边是零，另一边能分解成两个一次因式的积的时候，那么，使每一个因式为零的解，就

是原方程的解。这样就把一元二次方程求根问题降次为解两个一元一次方程。这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法。

(三)范例分析

例 1　把方程$(1-3x)(x+3)=2x^2+1$化成一般式，并写出方程中的二次项系数，一次项系数和常数项。

解：去括号，得：$x-3x^2+3-9x=2x^2+1$ 移项、合并同类项，得方程的一般形式：

$$-5x^2-8x+2=0$$

即
$$5x^2+8x-2=0$$

∴　此方程的二次项系数是 5，一次项系数是 8，常数项是-2。

说明：如果一般式中二次项系数是负数时，我们就把方程两边都乘以-1，使二次项系数变成正数，这样，对以后的解一元二次方程可以减少错误。

例 2　关于 x 的方程$(m+3)x^2-mx+1=0$是不是一元二次方程?

解：当 $m+3\neq0$，即 $m\neq-3$ 时，$(m+3)x^2-mx+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程。

当 $m=-3$ 时，原方程变为 $3x+1=0$，是一元一次方程。

说明："关于 x 的二次方程$(m+3)x^2-mx+1=0$ 与关于 x 的方程$(m+3)x^2-mx+1=0$"是不同的，应特别引起注意。前者根据一元二次方程定义，可以肯定二次项系数 $m+3\neq0$，即 $m\neq-3$，而后者必须分 $m+3=0$ 与 $m+3\neq0$ 二种情况加以讨论。

例 3　用直接开平方法解方程。

(1)$(3x+1)^2-9=0$

(2)$(x+2)(x-2)=4$

(3)$x^2+2x-15=0$

(4)$ax^2+c=0$　$(a\neq 0)$

解:(1)移项,得　　　　$(3x+1)^2=9$

开平方,得　　　　$3x+1=\pm 3$

即　$3x+1=3$　或　$3x+1=-3$

$\therefore$　$x_1=\frac{2}{3}$　　　$x_2=-\frac{4}{3}$

说明:一个字母可以表示一个具体的数也可以表示一个代数式;反之,一个代数式有时也可以看做一个字母。本题解答过程中,就是把$(3x+1)$看作一个"元"来解的。这种换元的思想在今后的学习中应引起重视。

(2)去括号,得:$x^2-4=4$

移项,得:$x^2=8$

开平方,得:$x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$　$x_1=2\sqrt{2}$,$x_2=-2\sqrt{2}$

(3)移项,得:$x^2+2x=15$

两边都加上 1,得:$x^2+2x+1=16$

配方,得:$(x+1)^2=16$

开平方,得:$x+1=\pm 4$

即　$x+1=-4$　或　$x+1=4$

$\therefore x_1=-5$,　　$x_2=3$

(4)移项,得:$ax^2=-c$　　$(a\neq 0)$

两边都除以 a，得：$x^2=-\frac{c}{a}$

①当 a、c 同号时，方程无实根；

②当 $c=0$ 时，$x_1=x_2=0$；

③当 a、c 异号时，$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}=\pm\frac{\sqrt{-ac}}{a}$

说明：此方程是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，当 $b=0$ 时的情况。由于负数没有平方根，因此 $-\frac{c}{a}<0$，$\frac{c}{a}>0$，即 a、c 同号时，方程没有实数根。

例 4　用配方法解方程：$2x^2-5x-3=0$

分析：这个方程的二次项系数是 2，为了便于配方，先把二次项系数化为 1，为此方程各项系数都除以 2。

解：方程两边都除以 2，得：

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

移项：$x^2+\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}$

配方：$x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2=\frac{3}{2}+(\frac{5}{4})^2$

$$(x+\frac{5}{4})^2=\frac{49}{16}$$

开平方，得：$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}$

即　$x+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$　或　$x+\frac{5}{4}=-\frac{7}{4}$

$\therefore x_1=\frac{1}{2}, x_2=-3$

说明：配方法的要点如下：

(1)方程整理为，左边为二次项和一次项，右边为常数

项；

(2)化二次项系数为1；

(3)方程两边各加上一次项系数一半的平方；

(4)变形为$(x+p)^2=q$的形式。如果$q\geqslant0$,方程的根是$x=-p\pm\sqrt{q}$；如果$q<0$,方程没有实数根。

例5　用公式法解方程：$2y=\sqrt{5}(y^2-\frac{1}{5})$

分析：先把方程化为一般形式后再求解。

解：原方程整理，得：

$$\sqrt{5}y^2-2y-\frac{\sqrt{5}}{5}=0$$

其中，$a=\sqrt{5}$，$b=-2$，$c=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\because b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot\sqrt{5}\cdot(-\frac{\sqrt{5}}{5})=8$$

$$\therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{8}}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{5},x_2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5}$$

说明：应用公式法解题的步骤：

(1)方程要化为一般形式；

(2)确定a、b、c的值，要注意它们的符号；

(3)求出b^2-4ac的值；

(4)最后代人公式求根。

例6　用因式分解法解方程。

(1) $2x^2-11x+5=0$

(2) $4x(x+1)=(2x-1)(x+1)$

(3) $25(x+3)^2-16(x+2)^2=0$

解：

(1)方程左边应用十字相乘法分解因式

$(2x-1)(x-5)=0$

$2x-1=0$ 或 $x-5=0$

$\therefore x_1=\frac{1}{2}, x_2=5$

(2)把方程右边的项移到左边来，使右边为0，左边可应用提公因式法分解因式

$4x(x+1)-(2x-1)(x+1)=0$

$(x+1)(2x+1)=0$

$x+1=0$ 或 $2x+1=0$

$\therefore x_1=-1, x_2=-\frac{1}{2}$

(3)方程左边应用平方差公式分解因式

$[5(x+3)+4(x+2)][5(x+3)-4(x+2)]=0$

即 $(9x+23)(x-7)=0$

$9x+23=0$ 或 $x-7=0$

$\therefore x_1=-\frac{23}{9}, x_2=7$

说明：(1)在应用因式分解法时，首先应将右边的各项移到方程左边，使方程右边为0，再将方程左边的式子分解因式；

(2)因式分解时，应灵活运用初二学过的几种方法，如提公因式法；公式法以及十字相乘法等；

(3)一般只在方程移项后，左边的式子易于分解时才使用这种解法。

例 7　用适当方法解下列各方程。

(1)$(x+3)(x-1)=5$

(2)$3x(x+2)=5(x+2)$

(3)$(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x$

(4)$3(1+\frac{x}{100})^2=\frac{363}{100}$

(5)$25(3x-2)^2=(2x-3)^2$

(6)$3x^2-10x+6=0$

(7)$(2x+1)^2+3(2x+1)+2=0$

(8)$x^2+(2-\sqrt{2})x+\sqrt{2}-3=0$

分析与解：

方程(1)虽然左边已经分解因式，但右边不是零，所以应去掉括号，再整理成 $x^2+2x-8=0$，然后用因式分解法解得 $x_1=2, x_2=-4$。

方程(2)不要去掉括号，更不能两边同时除以$(x+2)$，应把 $5(x+2)$移到右边，用提公因式法将左边分解为$(x+2)(3x-5)$，等号右边是零，解得 $x_1=-2, x_2=\frac{5}{3}$。

方程(3)缺常数项，不能两边约去 x，而一定要移项得$(1-\sqrt{2})x^2-(1+\sqrt{2})x=0$ 后，用提公因式法得 $x\cdot[(1-\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})]=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-3-2\sqrt{2}$。

方程(4)宜采用开平方法解，方程两边都除以 3 后得

$(1+\frac{x}{100})^2=\frac{121}{100}$，解得 $x_1=10, x_2=-210$。

方程(5)可运用如下两种方法：其一是，将右边的代数式移到左边后应用平方差公式分解因式；其二是，直接开平方法得 $5(3x-2)=\pm(2x-3)$，$\therefore 15x-10=2x-3$ 或 $15x-10=-2x+3$，解得 $x_1=\frac{7}{13}, x_2=\frac{13}{17}$，这里要特别注意的是，开平方一定要取“±”，否则将会丢根。

方程(6)左边不能在有理数范围内因式分解，故可采用公式法，解得 $x_1=\frac{5+\sqrt{7}}{3}, x_2=\frac{5-\sqrt{7}}{3}$。

方程(7)中，若把 $2x+1$ 看成未知元 y，关于 y 的方程 $y^2+3y+2=0$ 可采用因式分解法解方程。

解：$[(2x+1)+2][(2x+1)+1]=0$

即 $\quad 2(2x+3)(x+1)=0$

$$2x+3=0 \quad \text{或} \quad x+1=0$$

$\therefore x_1=-\frac{3}{2}, x_2=-1$

方程(8)为一元二次方程的一般形式，可用公式法求解，但计算较难，若认真分析，应用十字相乘法可将方程左边分解因式。

解法一：$a=1, b=2-\sqrt{2}, c=\sqrt{2}-3$

$$\because b^2-4ac=(2-\sqrt{2})^2-4(\sqrt{2}-3)$$
$$=18-8\sqrt{2}=16-2\times4\times\sqrt{2}+2$$
$$=(4-\sqrt{2})^2$$

$$\therefore x=\frac{-(2-\sqrt{2})\pm\sqrt{(4-\sqrt{2})^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-2\pm(4-\sqrt{2})}{2}$$