中学数学课程
重点提示与分析

高中三年级用

陈继仁主编

学苑出版社

中学数学课程
重点提示与分析

高中三年级用

陈继仁主编

王笃君　方纯义　程远明编

学 苑 出 版 社

中学数学课程重点提示与分析 高中三年级用

学 苑 出 版 社 出 版

〈北京西四颁赏胡同四号〉

空 军 指 挥 学 院 印 刷 厂 印 刷

新 华 书 店 首 都 发 行 所 发 行

开本:787×1092 1/32 印张:7 字数:151千字

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数 1—11,300册

书号:ISBN 7-80060-143-9/G·78 定价:2.35元

前　言

为了帮助在校中学生学好各科基础知识，使学生对所学的知识加深理解，启发学生积极思考，我们编写了这一套《中学各科课程重点提示与分析》，它是中学在校学生的一套系列课外读物。

这套课外读物是根据国家教委全日制中学各科教学大纲和人民教育出版社新修订的教材，并参考部分省市的教材而编写的。

本书按照基本课程的顺序，对书中的重点进行了深入的分析，并对疑难点做了针对性的提示，以提示、分析的方法，帮助学生加深对课程的理解，每章之后都有一定数量的思考题和答案。

本书由陈继仁主编，王笃君、方纯义、程远明参加编写。

编　者

1988年12月

目　　录

代　　数

微积分初步

总　复　习

代　　数

一、排列、组合、二项式定理

（一）知识结构的分析

排列与组合是高中数学中一个独立内容，在内容上和分析问题的方法上都独具特色。虽然这部分内容不多，和旧知识联系很少，但是很重要。它不仅在生产和生活实际中广泛应用，而且也是进一步学习概率、数理统计、近世代数等知识的重要基础和必备的知识。同时在学习和应用这部分知识时，对发展严密的抽象思维、提高思考问题的灵活性和逻辑性都提供了很好的题材。

本部分内容包括：加法原理和乘法原理；排列与组合的意义；排列数与组合数公式及组合数的性质三部分。

这部分内容结构上是从实例中归纳出加法原理和乘法原理，继而又引进了排列的意义。然后用乘法原理推导出排列数公式。在排列意义的基础上引入组合的概念，并推导出组合数的公式及其性质。

在学习内容及分析问题时都要首先弄清概念，例如、加法原理与乘法原理之间，排列定义与组合定义之间，排列数与组合数之间的区别与联系；同时要掌握好分析问题的基本方法和典型题目的典型解法；对于排列数、组合数以及组合数性质要能从排列与组合的意义方面及排列数与组合数公式

上推导出来。

二项式定理中主要有：二项式展开式（公式）；二项式展开式的系数的性质；二项式定理的应用三部分。

（二）重点内容的提示

1、两个基本原理

加法原理　做一件事，完成它可以有几类办法，在第一类办法中有m_1种不同方法，在第二类办法中有m_2种不同方法，……在第n类办法中有m_n种不同方法。那么完成这件事共有$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$种不同方法。

乘法原理　做一件事，完成它需要分成几个步骤，做第一步时有m_1种不同的方法，做第二步时有m_2种不同的方法，……，做第n步时有m_n种不同的方法。那么完成这件事共有$N = m_1 x m_2 x \times \cdots \times m_n$种不同的方法。

两个基本原理是排列组合这部分知识的最基本的公式，是推导排列数公式理论根据，也是分析排列组合问题的一种很重要办法。

学好两个原理最关键问题是区分两个原理的相异点。在加法原理中的几类办法中每种不同的方法是独立的并列的，即是每一种方法实现，事件都可以完成；乘法原理中完成一件事要分几个步骤，这里要求每个步骤中任取一种方法，依次做完n步，事件都可以完成。也就是说各步骤都要完成，事件才能完成。所以其中的各种方法是互相依存的。

另外，使用加法原理时应确定好分类的标准。分类时必须能达到这样的基本要求：1．完成事件的各种方法必须属于所分的一类办法中的一种。2．是分别在两类办法中的任

何两种方法不能相同；在使用乘法原理时，也必须有正确的分步标准，它的基本要求是：1．每个步骤各有一种方法完成时，对应完成事件的一种方法。2．各步骤之间的方法彼此无关，并且每个步骤完成的方法个数应恰是完成这个步骤所有的方法。

在使用两个基本原理要注意审题，找出事件是什么，确定好分类、分步的标准，不要重复也不要遗漏，多想几种方案，选取最简捷的方法。

例 把红、黄、白三种颜色的三个小球，放在四个不同的盒中，有多少种方法？

分析 把事件分成三步进行，第一步是先放红球，有四种方法。第二步是放黄球，也有四种方法。第三步是放白球，也有四种放法。三步都完成，事件完成。所以共有$4\times4\times4=64$种放法。

例 下面各题中需要用加法原理还是乘法原理、还是不能用加法原理也不能用乘法原理，

（1）某班有男生14人，女生16人（1）那么选出一个人当班长有多少种选法？

（2）若选出2人，要求必须是1个男生，一个女生，有多少选法？

答①加法原理 ②分两步进行，乘法原理

例 从甲城到乙城有3班火车，2班轮船，5班汽车（1）那么从甲到乙乘交通工具，有几种乘坐方法？（2）若乙城到丙城，有2班火车，3班汽车，那么从甲经过乙到丙，共有多少种乘坐方法？

答：（1）加法原理 （2）乘法原理。

例 $A=\{1,2,3\}$　　$B=\{4,5,6\}$，

（1）那么在集合A与集合B中的单元素子集共有多少个？

（2）以A集合元素为横坐标，B集合元素为纵坐标的点共有多少个？

答：（1）是加法原理；（2）用乘法原理；

例 商店里有5种上衣，3种裤子，

（1）某人要买上衣，裤子各一件，有多少种衣裤搭配的方法？

（2）某人要买一件上衣或一件裤子，有多少种选择方法？

答：（1）是用乘法原理；（2）用加法原理；

2、排列、组合的意义

排列：从n个不同的元素中，任取$m(m\leqslant n)$个元素，按照一定顺序排成一列，叫做从n个不同的元素，取出m个元素的一个排列。

组合：从n个不同的元素中，任取出$m(m\leqslant n)$个不同元素，组成一组，叫做从n个不同元素取出m个元素的一个组合。

例 有书皮是红色、黄色、白色三本不同的书，取出两本送给同学。那么可以抽出红黄、红白、黄白、三种情况颜色书送给同学，因为送给同学红黄两本书与送给同学黄红两本书是一回事，所以这每一种取出书的结果，就叫一个组合。

如果还是这三本书，我们取出两本在书架上，就它的摆放方式有：红黄、黄红、红白、白红、黄白、白黄，共有6种，其每一种摆法就叫一个排列。

排列与组合两个定义的最大区别就是，排列中元素相同而顺序不同的排列是不同的排列。而组合中元素相同，顺序不同的组合，是同一种组合。也就是说排列与元素的顺序有关，组合与顺序无关。

另外，排列与组合彼此也是联系很密切的两个概念。例如，在红、黄、白，三本书抽取2本摆放书架上，这个排列问题，我们可以把它分解成两步，先从红、黄、白三本不同的书抽取两本，共有红黄、红白、黄白，三个组合。而这每个组合对应两种不同排法，则有红黄，黄红，红白，黄白，白黄，六种摆法。

所以每个排列可分解成先取出元素然后再把元素排成一列两个步骤。

3．排列数与组合数

排列数，（就是排列的个数）。从n个不同的元素中，取出m(m≤n）个元素的所有排列的个数，叫做从n个元素取m个的排列数，用P_n^m表示。

组合数（就是组合的个数），从n个不同的元素中取出m(m≤n）个元素，所有的组合的个数，叫做从n个元素取出m个元素的组合数。用C_n^m符号表示；

在解题时，应明确排列与排列数是不同的概念，从n个不同元素中取出m个，排成一列，就叫做一个排列，它不是个数，是结果。

而排列数是指那些排列的个数。它是个数，而不是排列结果。

组合与组合数的区别和排列与排列数一样。

排列数公式： $P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$；当

$n=m$时，$P_n^n=n!$；

选排列$P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

组合数公式：$C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$；

组合数$C_n^m=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$；

组合数与排列数关系是$C_n^m P_m^m=P_n^m$；

组合数的性质是$C_n^m=C_n^{n-m}$；$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$；

对排列数组合数的公式和性质，应注意以下一些问题

（1）P_n^m，是表示m个连续自然数的乘积，其最大乘数是n。在运算时，也常把连续自然数乘积写成排列数形式，例如a是自然数，$a(a-1)(a-2)\cdots(a-50)=P_a^{51}$。

（2）$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$中，最后一个因式“$n-m+1$”容易写错，写时可联想到第一个乘数是$(n-0)$，第二个乘数是$n-1$，第三个乘数是$n-2$，所以可推得第m个因式是$n-(m-1)=n-m+1$，例如$P_{n+1}^{n-1}=(n+1)n(n-1\cdots[(n+1)-(n-1)+1]=(n+1)n\cdots\times4\times3$；

（3）$0!=1$，$C_n^0=1$，是规定的。

（4）对组合数性质，要能从组合意义上和组合数公式上论证，推理。能促使对组合性质的更加深刻的理解。

（5）对排列数组合数另一些常用的恒等式，也应掌握好，对解题很有益处。例如：

$(n+1)!=(n+1)n!$　　　$n\cdot n!=(n+1)!-n!$；

$KC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$；

（6）在解题中要注意到P_n^m，C_n^m中n是自然数$m\geqslant0$且

$m\in Z$，$m\leqslant n$，这些条件。

例 计算$C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}$时要以$\begin{cases}3n\geqslant 38-n\\3n\leqslant 21+n\\n\in N\end{cases}\Rightarrow n=10$

入手，从而计算得出来原式$=C_{30}^{28}+C_{31}^{30}=466$；

例一 证明下列恒等式

（1）$P_{n+1}^{m}=P_{n}^{m}+mP_{n}^{m-1}$

（2）$KC_{n}^{k}=nC_{n-1}^{k-1}$

（1）证法一：

$$P_{n}^{m}+mP_{n}^{m-1}=\frac{n!}{(n-m)!}+\frac{mn!}{[n-(m-1)]!}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}+\frac{m.n!}{(n-m+1)!}$$

$$=\frac{(n-m+1).n!+mn!}{(n-m+1)!}=\frac{n!\ (n+1)}{(n-m+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}=P_{n+1}^{m}.$$

证法二

从$n+1$个元素取出m的排列可分成两类，一类含a，另一类不含a；含a的再从其余n个元素中取出$m-1$个，共m个元素的排列：就是把m个元素安置在m个位置上，但要把a安置好，共有$P_{m}^{1}=m$个安排方法，其余$m-1$个元素由n个元素选出来，再安插到$m-1$个位置上共有P_{n}^{m-1}种排法，根据乘法原理可得，共有$P_{m}^{1}P_{n}^{m-1}$种排列方法；不含a的，只从n个元素选m个元素进行排列，共有P_{n}^{m}种。根据加法原理可知，含a，与不含a的共有排列数是$P_{n}^{m}+mP_{n}^{m-1}$。

$\therefore P_{n+1}^{m}=P_{n}^{m}+mP_{n}^{m-1}$.

（2）**证法一**

$$KC_m^k=\frac{Kn!}{K!\ (n-k)!}=\frac{n!}{(K-1)!\ (n-K)!}$$

$$=\frac{n(n-1)!}{(K-1)!\ [(n-1)-(K-1)]!}=nP_{n-1}^{k-1}.$$

证法二

$KC_n^k=C_k^1C_n^k$，就是从n个元素选出K个元素进行组合，共有C_n^k个组合．再由K个元素的组合中选取一个元素共有$C_n^kC_k^1$种；这种事件，可理解成从n个同学选出K名代表，再从K个代表中选出一名代表团的团长；

因为，大家都有当选可能，所以可以先从n名同学中，选出这各具有双重身份团长，有C_n^1各选法，再由其余$n-1$个人选出$K-1$个同学做代表。根据乘法原理，共有$C_n^1C_{n-1}^{k-1}$种选法　　$\therefore C_k^1C_n^k=C_n^1C_{n-1}^{k-1}$　　$\therefore KC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$；

例二　计算下列各式

（1）$C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2+C_7^2$

$P_2^2+P_3^2+P_4^2+P_5^2+P_6^2+P_7^2$

（2）化简　$P_n^n+P_{n+1}^n+P_{n+2}^n+\cdots+P_{2n}^n$

（3）化简　$1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+n\cdot n!$

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

（1）**解**：$\because C_2^2=C_3^3$

$\therefore$原式$=C_3^3+C_3^2+\cdots+C_7^2=C_8^3=56$。

$P_2^2+P_3^2+\cdots P_6^2=C_2^2 2!+C_3^2\cdot2!\ \cdots+C_6^2\cdot2!$

$=2!\ (C_2^2+C_3^2+\cdots+C_7^2)=2!\ \times56=112$；

若n个组合数相加且下标是连续自然数。

上标相同时，往往用组合数性质2：$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m-1}$

（2）**解**：原式$=n!(C_{n}^{n}+C_{n+1}^{n}+\cdots+C_{2n}^{n})=n!C_{2n+1}^{n+1}$

（3）**解**：$n\cdot n!=(n+1)!-n!$

$\therefore$原式$=2!-1!+3!-2!+\cdots+(n+1)!-n!=[2!+3!+\cdots+(n+1)!]-[1!+2!+\cdots+n!]=(n+1)!-1$；

$$\because \frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)-\left[\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right]=\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$，

例三 求证 $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!\quad(n\geqslant3)$

分析：$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}=2^{1+2+\cdots+n-1}=2\cdot2^{2}\cdot2^{3}\cdots2^{n-1}$，

$\therefore$要证 $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$ 就是要证$2\cdot2^{2}\cdots2^{n-1}>1\cdot2\cdot\cdots n$，$\therefore$只要证 $2^{n-1}>n$即可，

证明：1^{0}当$n=3$时 $2^{n-1}=4>3$，$\therefore n=3$时不等式成立。

2^{0}假设$n=K\quad(K\geqslant3)$时，$2^{k-1}>K$

那么当$n=K+1$时 $2^{k}=2\cdot2^{k-1}>2K=K+K>K+1$，

$\therefore n=K+1$时不等式成立。根据1^{0}、2^{0}可得当$n\geqslant3$时

$2^{n-1}>n$ 成立。

∴可得出 $2^2>3$，$2^3>4\cdots$ $2^{n-1}>n$,

∴$2^1\cdot2^2\cdots2^{n-1}>2\cdot3\cdots n=n!$

∴ $2^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!$。

本题证明时还可构造一个函数 $f(n+1)=\dfrac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!}$

$n\geqslant3$车n是自然数，$f(n+1)=\dfrac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n+1)!}$，$f(n+1)\div f(n)$

$=\dfrac{2^n}{n+1}$ 用数学归纳法证明 $n\geqslant3$

时 $\dfrac{2^n}{n+1}$ ∴$f(n)$是增函数。又∵$f(3)=\dfrac{2^3}{3!}>1$

∴$n\geqslant3$时，$f(n)>1$ 即 $\dfrac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}>1$

∴ $2^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!$；

例四 解方程（1）$P_4^2C_{x+3}^{x-1}=C_8^3P_{x+1}^2-P_{x+1}^2$

（2）$\begin{cases}P_x^y:P_x^{y-1}=10\\3C_x^y=5C_x^{y-1}\end{cases}$

（1）解： $P_4^2C_{x+3}^4=(C_8^3-1)P_{x+1}^2$

$4\cdot3\dfrac{(x+3)(x+2)(x+1)x}{4!}=(\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3!}-1)$

$(x+1)\cdot x$,

$\frac{1}{2}(x+3)(x+2)(x+1)x=55x(x+1)$，

∵ $x+3\geqslant4$ 且 $x+1\geqslant2$ ∴$x\geqslant1$ ∴$x\neq0$

$x+1\neq0$。

∴原方程可化成 $(x+3)(x+2)=110$,

$x=-13$，（不合题舍去） $x=8$，∴原方

程解是$x=8$；

（2）解：$\begin{cases}\dfrac{P_x^y}{P_x^{y-1}}=10 & \cdots\cdots（1）\\ 3C_x^y=5C_x^{y-1} & \cdots\cdots（2）\end{cases}$

由（1）$\dfrac{x!}{(x-y)!}\cdot\dfrac{(x-y+1)!}{x!}=10$ $\because x\neq 0\ x\neq y$

$\therefore x-y=9$

由（2）$\dfrac{3x!}{(x-y)!y!}=\dfrac{5x!}{(x-y+1)(y-1)!}$

$\therefore \dfrac{3}{y}=\dfrac{5}{x-y+1}$ $\therefore$可得出 $3x-8y=-3$，

$\begin{cases}x-y=9 & \cdots\cdots（3）\\ 3x-9y=-3\cdots\cdots & （4）\end{cases}$ $x=15$ $y=6$；

原方程解是$\begin{cases}x=15\\ y=6\end{cases}$；

4、排列与组合应用题

在分析排列组合应用题时，应弄清楚事件的条件和结论。哪是元素，哪是位置，并确定好分类，分步标准。同时在解题中应掌握一些典型问题的解法，不断总结，归纳解题方法，提高解题的能力。

下面分单纯的排列，组合的应用题和组合排列混合应用题举些典型例题解法，从中阐述一些带有规律性的东西。

例一 用0、1、2、3、4、5六个数字组成没有重复数字且比201345大的自然数，共有多少个？

分析：把数字看成为元素，把数位看成位置，本题中元素0、1是不能在十万位的，它们是特殊元素；十万位这个

数位不能添入“0”和“1”所以十万位有特殊要求，叫特殊位置。

解法一 以位置为主解题，常叫成“位置分析法”，把六个数字添入“□□□□□□”中，在十万位（即画×框内）有特殊要求，应先填写，可由2、3、4、5中选一个填入，共有P_4^1种填法。其它数位（即其字框内）由其余五个数字填写，共有P_5^5种填法，根据乘法原理，共有$P_4^1P_5^5$种填法，因为其中有一个是201345，应减去，所以共有$P_4^1P_5^5-1=479$个数字满足条件。

解法二 以元素为主考虑，常叫“元素分析法”。本题中数字“0”“1”，有特殊要求，叫特殊元素，特殊元素应先安排，从除十万位的其它五个数位选出2个安排0.1，共有P_5^2种安排方法，其余4个元素安排其余4个数位中，共有P_4^4种，根据乘法原理，共有$P_5^2P_4^4$种排法，其中包括201345，减去后，共有$P_5^2P_4^4-1=479$个不同的数。

解法三 排除法，不考虑附加条件就进行排列，然后减去不合条件的排列个数。

本题不考虑附加条件共有P_6^6种排列，0.1在十万位的共有$P_2^1P_5^5$种，还有一个201345，也不符合条件。∴近合条件的共有$P_6^6-P_2^1P_5^5-1=479$个数。

解法四 根据条件可知，十万位上数字只能是2、3、4、5，但3、4、5在十万位时，六位数必大于201345，2在十万位时，就不一定了。∴以3、4、5和2不同元素来分类考虑，可分成两类，以3、4、5为十万位数字的共有$P_3^1P_5^5$个数，以2为十万位且大于201435的数共有P_5^5-1个，根据加法原理共有$P_3^1P_5^5+P_5^5-1$个数。