日本新高中数学研究丛书 3

方程与不等式

[日] 茂木勇 著

马学成 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书3

方程与不等式

[日]茂木勇 著

马学成 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学传统题材外，还包括一些较新的内容.

本册是第三册，主要内容有：复数，二次方程的求根公式、判别式、根与系数关系及其应用，必要条件和充分条件，恒等式，二次方程组，因式定理，高次方程，三次方程的根与系数关系，分式方程，无理方程，一次不等式，二次不等式，高次不等式，分式不等式，无理不等式，不等式的应用，不等式的证明，算术平均和几何平均的大小关系，绝对不等式. 叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考.

日本新高中数学研究丛书 3

方 程 与 不 等 式

[日]茂木勇 著

马学成 译

文化教育出版社出版

[redacted]北京发行所发行

[redacted]社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 8.25 字数 164,000

1984 年 7 月第 1 版 1986年11月第 1 次印刷

印数 1— 3,500

书号 7057·078 定价 1.05 元

前　言

这次修订的高中数学大纲，高中数学 I 的内容也有所改变. 方程与不等式一如既往，定为数学 I 的学习内容，但处理方法稍有改变. 在初中已学过关于数的集合的结构与等式的性质，方程与不等式是做为从数的集合中选出其部分集合的条件式，在统一的观点下进行学习的. 在高中，则继此前进，目的在于加深理解方程与不等式的基本概念与解法原理，培养学生灵活运用这些知识的能力. 但是，从旧大纲中删去分式方程，无理方程，分式不等式，无理不等式，而且所选取问题的程度，也似乎太低. 从而，进入数学 III 的时候，利用微分法与积分法研究分式函数与无理函数值的变化时会要发生困难的.

本书收集了一些打 * 号的项目，同时，选取的问题也高于教科书的程度. 关于方程与不等式的

解法与原理简明易懂，更加深入，更加广泛

而且以培养论证能力为宗旨. 使苦于学习数学的人，易于理解，使擅长数学的人更加爱好. 关于数学 I 的方程与不等式的发展题、应用问题广泛收集从简易到程度较高的内容，因此确信做为入学考试的参考书也是最适当的. 特别地，遵循

解说 ──→ 例题 ──→ 发展题 ──→ 练习

的顺序反复学习，分阶段在实际本领上下功夫，这是本书的特点. 只要灵活运用本书，深信读者的实际本领将与日俱增.

著　者

几 点 说 明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书，它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长学数学的人更加爱好. 为此，本书的结构编排如下.

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目，凡披阅所及，均能一目了然. 同时，解说既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂

在解说后的提要中，归纳出重要的公式. 因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式. 另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率. 附有*标记的节，是在高中没有学习过的或程度略高的内容.

例题——→发展题——→练习

本书最大的优点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，在不知不觉中增强解决问题的实际能力. 虽然从例题到发展题，依次提高难度，但在解法和要点中，指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者要反复学习，使对这两种问题达到几乎能够背诵的程度. 总之，学习数学最重要的是要

逐步积累学习方法

为此，建议读者，要反复进行学习. 如果前面的两种题都能掌

握，那么解“练习”题时就不会感到什么困难. 反之，如果不大会解“练习”题，那就应该认为学习的还不够深刻.

习题

分 A、B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题；B 中还包含稍难的问题. 因为在高考试题中，这种程度的题目出的最多，所以，对于准备高考的读者，这是不可缺少的问题.

虽然常说，学习数学背下来也没有用，但那是指机械的背诵. 本书不提倡单纯的记忆. 对于数学，在适当指导“怎样进行思考”之后，应记忆应用范围较广的知识. 深切地希望本书的读者，能真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领。

译 者 的 话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十三册，本册是第三册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂．对基础知识作了系统整理，归纳概括，重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究．可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的．本册由辽宁省实验中学马学成译出，由我院教研部钱永耀、刘占元负责审校工作．

由于时间仓促以及译者、校者水平所限，缺点错误，恐难避免．希望读者提出宝贵意见．

辽宁教育学院

1984年6月

目　录

前言……………………………………………………1

几点说明………………………………………………2

1. 复数……………………………………………1

虚数的引入，根号的规定，复数，实部、虚部，复数的相等

2. 复数的另一定义………………………………10

复数，相等的定义，四则的定义，扩展的原则，虚数单位

3. 简单的二次方程………………………………16

恒等式，方程和解，二次方程的解，集合的符号的使用，二项方程，可分解成因式的二次方程

4. 二次方程的求根公式…………………………22

5. 二次方程的判别式……………………………28

实根，虚根，重根，判别式，复数系数的情况

6. 二次方程的根与系数的关系…………………34

实系数的情况，由求根公式得根的和与积，根与系数的关系，复数系数的情况，作为根的条件

7. 二次方程根与系数关系的应用………………43

二次三项式的因式分解，二根是分数的情况，两个变数的二次函数，作二次方程，以 m，n 为根的二次方程

8. 必要条件和充分条件…………………………52

命题的真假，命题的逆，必要条件，充分条件，充要条件，同解

9. 恒等式…………………………………………58

习题(1～22)……………………………………65

10. 二次方程组(一次和二次的联立)……………………68

二元二次方程组的解法,三元二次方程组的解法

11. 二次方程组(二次和二次的联立)*……………………74

12. 因式定理……………………………………80

函数符号,除法的性质,剩余定理,剩余定理的另一证明,因式定理

13. 高次方程……………………………………87

整式方程,可以分解因式,使用因式定理,重根

14. 用换元法解高次方程……………………………93

15. 三次方程的根与系数关系*……………………………99

16. 方程的同解性……………………………………105

方程的同解,同解的证明,同解变形,方程组的同解

17. 分式方程,无理方程*……………………………111

习题(23～40)……………………………………117

18. 不等式的基本性质……………………………120

19. 一次不等式……………………………………126

不等式的解,解和集合,一次不等式,和方程的不同点

20. 二次不等式……………………………………132

二次不等式,相异实根的情况,列表方法,重根和虚根的情况

21. 高次不等式……………………………………138

高次不等式,有三个相异实根的情况,重根和虚根的情况

22. 分式不等式*……………………………………144

23. 无理不等式*……………………………………150

24. 图象在解不等式方面的应用……………………156

25. 不等式在讨论方程方面的应用…………………162

有实根和虚根的条件,两个根都是正数,两个根都是负

数，一根为正而另一根为负的条件，系数中含有参数的一次式的方程

习题(41～53)……168

26. 不等式的证明……170

绝对不等式，条件不等式，使用假定的方法

27. 用函数的思想证明不等式*……176

28. 算术平均和几何平均的大小关系……185

29. 各种绝对不等式……194

三角不等式，切比雪夫不等式，具有一定符号的二次函数，柯西—许瓦尔兹不等式

30. 不等式在求最大、最小值方面的应用……203

算术平均和几何平均关系的应用，判别式的应用，最大值的符号

习题(54～69)……209

练习题答案……211

习题答案……225

1. 复数

关于实系数 x 的二次方程，例如，$x^2=4$，$x^2=3$

这两个方程的解分别是 ±2，$\pm\sqrt{3}$. 但是就下列等式

$$x^2=-1, x^2=-3$$

来看，因为不论 x 为任何实数，则 $x^2\geqslant0$，所以适合这两个等式的实数 x 并不存在. 换句话说，这两个方程在实数范围内没有解.

一般地，如果 $k>0$，那么 $-k<0$，所以二次方程：

$$x^2=-k \qquad ①$$

在实数范围内没有解.

数的扩展

在这里，如果我们把数的范围限制在有理数集合 Q，方程 $x^2=3$ 就没有解，但是引入无理数以后，把数的范围扩展到实数集合 R，这个方程就有解.（这是在初中三年级学习过的内容）

考察方程①的解的情况时，这个方程在实数范围内没有解，为了使这类方程能够有解，我们必须象引入无理数那样再引入新的

数．也就是说，必须把数的范围再加以扩展．

虚数的引入

(1) 我们引入一个平方等于 -1 的新数，这个数用 i 表示．即

$$i=-1$$

(2) 在计算含有 i 的式子时，可把 i 同一般字母同样处理，遇到 i^2 可用 -1 代替．

注意　$k>0$时，方程$x^2=k$有两个解记作$\pm\sqrt{k}$．引入复数后，方程①也有两个解，这两个解记作$\pm\sqrt{-k}$．关于这个问题后面要作详细说明．

根号的规定

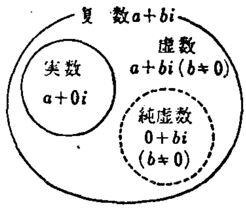
(3) $k>0$ 时，$\sqrt{-k}=\sqrt{k}\,i$

虚数单位

根据上面的规定，把数 i 叫做**虚数单位**．

复数

属于集合：$C=\{\alpha|\alpha=a+bi,a,\ b$ 是实数$\}$的数叫做**复数**．



在复数 $a+bi$ 中，当 $b=0$ 时，$a+0i=a$ 为实数．因此，设全体实数的集合为 R，则

$$R\subset C$$

又，在复数 $a+bi$ 中，当 $b\neq0$ 时，复数 $a+bi$ 叫做**虚数**．这时，如果$a=0$，即 $0+bi=bi$ $(b\neq0)$所表示的数，叫做**纯虚数**．例如，$1+2i$ 是虚数，$-2i$ 是纯虚数．

实部、虚部

在复数 $a+bi$ 中，a 叫**实部**，b 叫**虚部**．

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做**共轭复数**，即 $a+bi$ 的共

轭复数为 $a-bi$. $a+bi$ 的共轭复数记为 $\overline{a+bi}$.

根据虚数单位 i 及其计算的两条性质(1)和(2)，可知：任意两个复数的和、差、积、商(除数不得为零)还是复数. 也就是说，

复数集对算术四则运算是封闭的.

复数的相等

给定两个复数 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$，当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时，这两个复数相等. 即

$$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d$$

提　要

(1) **虚数单位 i**: $i^2=-1$

(2) **i 式的计算**: 把 i 看成普通文字来计算，遇到 i^2 用 -1 代替.

(3) $\sqrt{-k}=\sqrt{k}\,i\ (k>0)$

(4) **数系**

$$\text{复数 } a+bi\begin{cases}\text{实数 } a+0i\ (=a) & \begin{cases}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \text{虚数 } a+bi\ (b\neq 0)\end{cases}$$

例 1. 试作下列计算:

(1) $(3-i)+(-4+5i)$　(2) $(5-6i)-(-2+3i)$

(3) $(3+5i)(-3+4i)$　(4) $\dfrac{1+i}{1-i}$

(5) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$　(6) $(a+bi)(a-bi)$

解法 (3) 脱去括号，把 i^2 换成 -1.

(4) 分子，分母都乘以 $1+i$.

(5) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)$.

解 (1) $(3-i)+(-4+5i)=3+(-4)+(-1+5)i$

$$=-1+4i$$

(2) $(5-6i)-(-2+3i)=5-(-2)+(-6-3)i$

$$=7-9i$$

(3) $(3+5i)(-3+4i)=-9+20i^2+12i-15i$

$$=-29-3i$$

(4) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i^2+2i}{1-i^2}=\frac{1+(-1)+2i}{1-(-1)}$

$$=\frac{2i}{2}=i$$

(5) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

$$=\frac{1+3i^2+2\sqrt{3}\,i}{4}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4}$$

$$\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$=\frac{1-3i^2}{4}=1$$

(6) $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

例 2. 试作下列计算:

(1) $\sqrt{-1}+\sqrt{-4}$　　(2) $(\sqrt{-2})^2$

(3) $(-\sqrt{-2})^2$　　(4) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

解法 根据根号的规定，将$\sqrt{-k}$改成$\sqrt{k}\,i$的形式进行计算.

解 (1) $\sqrt{-1}+\sqrt{-4}=i+2i=3i$

(2) $(\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}\,i)^2=(\sqrt{2})^2i^2=-2$

(3) $(-\sqrt{-2})^2=(-\sqrt{2}\,i)^2=(-\sqrt{2})^2i^2=-2$

(4) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{12}i=\sqrt{3\times12}i^2=\sqrt{36}i^2$
$=-6$

发展题

如果 a,b,c,d 都是实数，i 是虚数单位，试证明下列各式：

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$（其中 $c^2+d^2\neq0$）

要点

(1)，(2) 按 i 的一次式来考虑，并按 i 进行整理.

(3) 展开后，i^2 换成 -1，并按 i 进行整理.

(4) 分母和分子都乘以 $c-di$.

解 (1) $(a+bi)+(c+di)$
$=a+c+(bi+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=a-c+(bi-di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$$=\frac{ac-bdi^2+bci-adi}{c^2-d^2i^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

研究 将实系数的整式 $f(x)$, $g(x)$和$f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$都除以 x^2+1, 如果设所得的余式分别为 $a+bx$, $c+dx$, $A+Bx$, $C+Dx$, $E+Fx$, 那么有以下各式:

$$(a+bi)+(c+di)=A+Bi \quad ①$$

$$(a+bi)-(c+di)=C+Di \quad ②$$

$$(a+bi)(c+di)=E+Fi \quad ③$$

成立. 在这里, i 是虚数单位. 也就是, 复数的和、差、积的计算和上面的余式计算具有完全相同形式.

对此, 可用证明剩余定理的同样方法进行证明.

练习 (答案在211页)

1. 把$(5-2i)^2$, $\frac{2i}{3-i}$, $\frac{1}{i}$表示成 $a+bi$ 的形式.
2. 设 I, I_0 分别表示全体虚数和全体纯虚数的集合, 试证 $I_0\subset I$.
3. 证明上面[研究]中的①, ②和③.

例 3. 设 a, b, c, d 都是实数, i 是虚数单位. 试证明:

(1) 当且仅当 $a=0$ 且 $b=0$ 时, $a+bi=0$ 成立.

(2) 两个复数 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, 当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时, $\alpha=\beta$.

解法 (1) 如果 $a+bi=0$, 为了判明 $a=0$ 和 $b=0$, 首先要证明 $b=0$. 为此, 我们假设 $b\neq 0$, 必定导出不合理的结果. 这时, $a=0$ 随之而推出. 反过来, 如果 $a=0$ 和 $b=0$ 时, 不要忘

记推证 $a+bi=0$.

(2) 由 $\alpha=\beta$ 导出 $\alpha-\beta=0$，再利用(1)的结果.

解 (1) 设 $a+bi=0$. 若 $b\neq 0$，则

$$bi=-a$$

等式的两边同除以 $b(\neq 0)$，得 $i=-\frac{a}{b}$

两边平方： $\left(-\frac{a}{b}\right)^2=i^2=-1$

因为 a,b 是实数，所以 $\left(-\frac{a}{b}\right)^2\geqslant 0$，$-1<0$，这不合理. 因此，$b=0$

其次，由 $a+bi=0$ 得 $a=a+0i=0$

$$\therefore a=0 \text{ 和 } b=0$$

反过来，如果 $a=0$ 和 $b=0$，那么

$$a+bi=0+0i=0$$

(2) 由 $\alpha=\beta$ 得 $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i=0$

根据(1)的结果得 $a-c=0$ 和 $b-d=0$

$\therefore a=c$ 和 $b=d$ （反过来，也成立）.

因此，问题得证.

发展题

设 α,β,γ 都是复数，试证明下列等式：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ （加法交换律）

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ （加法结合律）

(3) $\alpha\beta=\beta\alpha$ （乘法交换律）

(4) $(\alpha\beta)\cdot\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ （乘法结合律）

(5) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ （加法对乘法的分配律）
