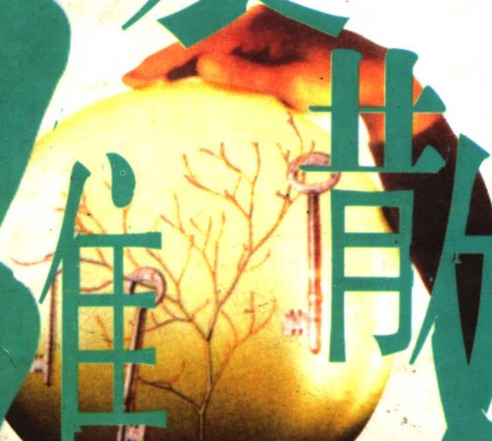
最新修订

# 发散思维辅导

## 初中二年级

## 数学

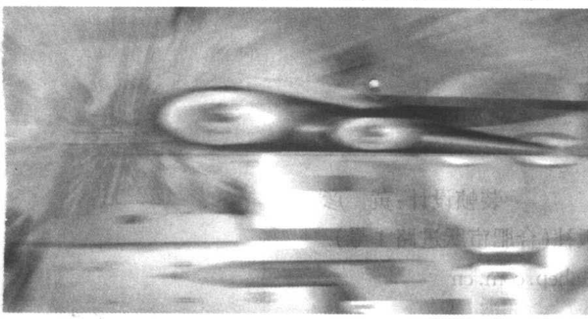


安徽教育出版社

初中二年级
CHUZHONG ER NIANJI

数学
SHU XUE

# 发散思维辅导



主 编：宏 宇
编写者：宏 宇 胡定华
胡宗磊 颜惠丽
于建东

安徽教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学发散思维辅导.二年级／宏宇主编.—2版.
合肥:安徽教育出版社,2001.7
(中学各科发散思维辅导)
ISBN 7-5336-1934-X

Ⅰ.初... Ⅱ.宏... Ⅲ.数学课-初中-教学参考
资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第044574号

责任编辑:严云锦　　装帧设计:黄　彦
出版发行:安徽教育出版社(合肥市跃进路1号)
网　　址:http://www.ahep.com.cn
经　　销:新华书店
排　　版:安徽飞腾彩色制版有限责任公司
印　　刷:安徽天歌印刷厂
开　　本:850×1168　1/32
印　　张:14 25
字　　数:380 000
版　　次:2001年7月第2版　2001年7月第1次印刷
定　　价:14 30元

发现印装质量问题,影响阅读,请与我社发行部联系调换
电　话:(0551)2651321　　邮　编:230061

# 再版说明

发散思维作为一个新的教研课题，已受到广大师生的高度重视．发散思维即求异思维，它的图示就是从一点出发，向思维空间发出的一组射线，尤如夜空中一道道闪电，激发学生思维的火花．

发散思维具有多向性、变异性、独特性的特点，即思考问题时注重多途径、多方案，解决问题时注重举一反三、触类旁通，这与数学知识的思维特征极为相似，因此，在中学阶段，结合数学教学，正确培养和发展学生的发散思维，对造就创造型人才，至关重要．

有鉴于此，我们编写了这套《初中数学发散思维辅导》．全书紧扣教学大纲和最新版数学课本按年级分成三册，各册书均按现行课本章节编写，每章均由：知识系列、发散点分析、发散思维辅导、基础性发散思维训练题、提高性发散思维训练题五部分组成．

训练题大多是围绕下述各种发散思维形式，对课本中的习题加以改造而设置的．家长借此可检查学生对课

本各章节知识的掌握程度;学生借此可以评估课堂学习效果.

全书的结构框架如下:

知识系列——将课本各章知识加以归纳、概括,为引导学生展开发散思维首先奠定基础.

发散点分析——指明各章知识网络中进行发散思维的“结点”,启发和诱导学生逐步进入发散思维空间.

发散思维辅导——借助具体实例,采用题型发散、解法发散、纵横发散、变形发散、变换发散、变更命题发散、转化发散、迁移发散、构造发散、逆向发散、组合发散、分解发散、综合发散等多种形式,对学生进行多思、多解、多变的解题辅导.

☆题型发散是将由发散点出发的典型问题,变换其题型,进行发散思维.

☆解法发散则通过一题多解、一题多变、一题多得的发散思维.

☆纵横发散是通过两个或多个发散点间的联系,以及发散点与其他知识间的联系,借助例题形成发散思维.

☆变形发散是通过对代数式、方程、不等式、函数等形式的改变,达到变繁为简,化难为易,直到问题解决的发散思维.

☆变换发散是适当地运用对称、平移、旋转、位似、等积等几何变换,将那些分散、远离的条件从图形的某一部位转移到适当的新位置上,得以相对地集中,从而发现解题的思路,达到巧妙解题目的的发散思维.

☆变更命题发散是通过变更命题的形式,或维持原命题的条件而改变结论,或改变原命题的条件,维持原结论不变,或同时改变原命题的条件、结论来进行发散思维训练.

☆转化发散是通过保持原命题的实质而变换其形式来进行发散思维训练.

☆迁移发散是利用数式、图形在不同的数学分科中的不同含义与等价形式,把一个分科里的公式、定理、原则或方法,巧妙

地迁移到另一个分科中，达到化繁为简的目的而进行的发散思维．

☆构造发散是恰当地构造出某些元素(如数、式、方程、函数、数轴及几何图形),使问题得以解决的一种发散思维．

☆逆向发散是由目标至条件的定向思考的一种发散思维．

☆组合发散是拾零为整,通过整体构思,发挥整体功能的发散思维．

☆分解发散是把一个命题分解成一些单纯命题并逐个加以分析和解决的发散思维．

☆综合发散是通过教材各章发散点之间的联系、数学各科之间的相互联系、数学与其他学科之间的联系来进行发散思维训练．

基础性发散思维训练题——按照上述发散思维的类型，编拟强调基础，以巩固知识为主，突出与课本同步的适量题目，其中有些题目是对课本练习题加以改造而成的．

提高性发散思维训练题——按照上述的发散类型配置既强调知识又突出能力，尤其是信息迁移能力的题目．这部分内容有一定的梯度和难度．

本套书自 1991 年初版以来,深受中学师生欢迎．大家普遍认为这是一套有利于中学各年级学生学习，以及毕业班学生综合复习的课外读物．因此,现结合 2001 年教材改革的实际情况和广大读者的建议,修订再版,欢迎购阅．

目录

## 代数部分

第八章　因式分解 ……3
知识系列 ……3
发散点分析 ……5
发散思维辅导 ……7
基础性发散思维训练题 ……18
提高性发散思维训练题 ……22
第九章　分　式 ……27
知识系列 ……27
发散点分析 ……30
发散思维辅导 ……33
基础性发散思维训练题 ……50
提高性发散思维训练题 ……56
第十章　数的开方 ……62
知识系列 ……62
发散点分析 ……64
发散思维辅导 ……66
基础性发散思维训练题 ……76
提高性发散思维训练题 ……79
第十一章　二次根式 ……84
知识系列 ……84
发散点分析 ……85
发散思维辅导 ……87
基础性发散思维训练题 ……107
提高性发散思维训练题 ……111

# 目录

## 几何部分


第三章　三角形……………………………………119
知识系列……………………………………119
发散点分析……………………………………124
发散思维辅导……………………………………127
基础性发散思维训练题……………………………………182
提高性发散思维训练题……………………………………195
第四章　四边形……………………………………209
知识系列……………………………………209
发散点分析……………………………………213
发散思维辅导……………………………………218
基础性发散思维训练题……………………………………258
提高性发散思维训练题……………………………………270
第五章　相似形……………………………………282
知识系列……………………………………282
发散点分析……………………………………285
发散思维辅导……………………………………287
基础性发散思维训练题……………………………………331
提高性发散思维训练题……………………………………345
答案、提示与简解……………………………………361
代数部分……………………………………361
几何部分……………………………………380

# 代数部分

代数部分

代数部分

代数部分

# 第八章

# 因式分解

## 知识系列

### 一、因式分解的有关概念

1. 因式

几个整式相乘，每个整式叫做它们的积的因式. 例如$(a-3)\cdot(a+1)=a^2-2a-3$，$a-3$和$a+1$都是$a^2-2a-3$的因式.

2. 公因式

几个整式公有的因式，叫做这几个整式的公因式. 或者说，如果一个整式能同时整除几个整式，那么这个整式叫做这几个整式的公因式.

3. 因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解.

### 二、多项式分解的几种常用方法

1. 提公因式法

一般地，如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

2. 运用公式法

如果把乘法公式反过来,就可用来把某些多项式分解因式.要求熟练运用于因式分解的方法是:

(1)平方差公式　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2)完全平方公式　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

有时也用到公式:

*(3)$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

*(4)$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

3.分组分解法

如果把一个多项式的项分成几组并将各组分别分解因式后,各组间又有公因式,那么就可提取出各组的这个公因式,从而把这个多项式分解因式,这种方法叫做分组分解法.分组分解法有如下几种情况:

(1)分组后能直接提公因式.

(2)分组后能直接运用公式.

*(3)运用添项与拆项分组分解.

(4)$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解.

$x^2+(p+q)x+pq$ 型二次三项式具有以下特点:二次项系数为1,常数项是两数之积,一次项系数是常数项的两个因数之和.

$x^2+(p+q)x+pq$ 型二次三项式的因式分解法为 $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$.其中 $p,q$ 的符号法则:当二次三项式的常数项是正数时,$p,q$ 符号相同且与一次项系数的符号相同;常数项是负数时,$p,q$ 异号,并且绝对值较大的因数与一次项系数的符号相同.

*4.用配方法分解二次三项式

用到完全平方公式、平方差公式以及添项、拆项的技巧,是配方法的关键.添项、拆项是指先加上一个适当的项,再减去此项.

二次三项式 $ax^2+bx+c$ 在有理数范围内分解因式的前提是 $b^2-4ac$ 为一个有理数的平方或零.

## 发散点分析

本章的发散点是多项式因式分解的方法.多项式的因式分解是整式乘法的逆变形,它不仅是继续学习分式、方程的基础,而且始终是数学中重要的恒等变形.熟练地掌握和灵活运用因式分解的各种方法是进一步学好数学的前提.本章安排了一定数量的逆向发散、转化发散和其他类型的发散思维题.逆向发散可化异为同,化生为熟,化多(元、次)为少(元、次),变繁为简,化难为易.转化发散促进数形结合解题,可发挥"形"的直观作用和"数"的思路规范优势,由数思形,由形思数,数形渗透,互相作用,达到化未知为已知,直到问题解决的目的.现将与发散点有关的问题分析如下.

### 一、因式分解的注意事项

1.因式分解与整式乘法互为逆运算.

$$(a+b)(a-b)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftarrows}}a^2-b^2$$

2.在提公因式时,若各项系数都是整数,所提的公因式是各项系数的最大公约数与各项都含有的字母的最低次幂的积.

3.如果多项式的第一项系数是负数,一般要提出"-"号,使括号内的第一项系数是正数,在提出"-"号时,多项式的各项都要变号.

4.有时将因式经过符号变换或将字母重新排列后可化为公因式,例如 $-a-b+c=-(a+b-c)$;又如:当 $n$ 为正整数时,$(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$;$(a-b)^{2n-1}=-(b-a)^{2n-1}$,都是在因式分解

过程中常用到的因式变换.

5.能运用平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 分解的多项式,必须是二项式或视作二项式的多项式,且具有这二项的符号相反,$a$,$b$ 可表示数,亦可表示字母或代数式,每项都能写成数(或式)的完全平方的形式.

6.能运用完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 分解的多项式,必须是三项式或视作三项式的多项式,且具有其中两项符号相同并都能写成数(或式)的完全平方形式,而余下的一项是这两个数(或式)的乘积的2倍.如果三项中的两个完全平方项都带有负号,则应先提出负号,再运用完全平方公式分解因式.

## 二、因式分解的思路与解题步骤

1.先看各项有没有公因式,若有公因式,则先提取公因式;

2.次看能否使用公式法,对于二次三项式,看能否利用 $x^2+(p+q)x+pq$ 型因式分解法来分解;

3.四项以上的多项式,用分组分解法,即通过分组后提取各组公因式或运用公式法来达到分解的目的.如果运用以上方法难以解决,就考虑用拆、添项方法,再利用分组分解法来分解;

4.因式分解的结果必须分解到每一个因式都不能再分解为止;

*5.以上方法均感困难,可考虑用配方法、待定系数法、换元法、试除法因式分解.

因为需要分解因式的多项式是多种多样的,必须根据题目的特点,对具体问题作具体分析,灵活应用有关方法和技巧,才能正确迅速地解题.

(3) $a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$.
$=(a^2b-a^2c)+(b^2c-b^2a)+(c^2c-c^2b)$
$=a^2(b-c)+ba($

# 发散思维辅导

(2) $2(a^2+b^2)(a+b)^2-[(a+b)(a-b)]^2$
$=(a+b)^2[2(a^2+b^2)-(a-b)^2]$
$=(a+b)^2(2a^2+2b^2-a^2-b^2+2ab)$
$=(a+b)^2(a+b)^2=(a+b)^4$

## 多项式因式分解的方法

**【例 1】** 把下列各式分解因式:

(1)$(x+y)^{n+2}-2(x+y)^{n+1}+(x+y)^n$.

(2)$2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$.

(3)$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

**解析** (1)本题先提取公因式,然后运用完全平方公式分解.

原式$=(x+y)^n[(x+y)^2-2(x+y)+1]$

$=(x+y)^n(x+y-1)^2$.

(2)本题先运用平方差公式,然后提取公因式,最后运用完全平方公式因式分解.

原式$=2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a+b)^2(a-b)^2$

$=(a+b)^2[2(a^2+b^2)-(a-b)^2]$

$=(a+b)^2(a^2+2ab+b^2)$

$=(a+b)^4$.

(3)本题应打开括号,采取分组分解法.

原式$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+c^2a-c^2b$

$=(a^2b-a^2c)+(b^2c-c^2b)+(c^2a-b^2a)$

$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)$

$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b+c)(b-c)$

$=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)$

$=(b-c)[a(a-c)-b(a-c)]$

$=(b-c)(a-c)(a-b)$.

$=(a^2b-a^2c)+(b^2c-c^2b)+(c^2a-b^2a)$
$=a^2(b-c)+bc(b-c)+a(b^2-c^2)$
$=a^2(b-c)+bc(b-c)+a(b+c)(b-c)$
$=(b-c)(a^2+bc+ab+ac)$
$=(b-c)[a(a+b)+c(a+b)]=(b-c)(a+b)(a+c)$

$=(x^2-b^2+y^2-a^2)^2-[2(ab-xy)]^2=(x^2-b^2+y^2-a^2+2ab-2xy)(x^2-b^2+y^2-a^2-2ab+2xy)$

$=[(x-y)^2-(a+b)^2][(x+y)^2-(a+b)^2]=(x-y)^2-(a+b)^2(x+y)^2-(a+b)^2$

$=(x^2-y^2)^2-2(a+b)^2$

$=(a+x)^m(b+x)^{n-1}(a-b)$

**题型发散**

$(a+x)^m(b+x)^{n-1}(a+x+a-b-x)$

**发散 1　填空题**

(1)分解因式：$(a+x)^{m+1}(b+x)^{n-1}-(a+x)^m\cdot(b+x)^n$ $=$ $(a+x)^m(b+x)^{n-1}(a-b)$.

(2)分解因式：$(x^2-b^2+y^2-a^2)^2-4(ab-xy)^2=$ $(x-y+a-b)(x-y-a+b)(x+y+a+b)(x+y-a-b)$.

(3)$8\times0.625^2-8\times0.375^2=$ 2 .

**解析**　(1)本题用提取公因式法，得

原式$=(a+x)^m(b+x)^{n-1}[(a+x)-(b+x)]$

$=(a-b)(a+x)^m(b+x)^{n-1}$.

(2)本题先运用平方差公式展开，然后分别运用完全平方公式，最后运用平方差公式分解因式.

原式$=(x^2-b^2+y^2-a^2+2ab-2xy)(x^2-b^2+y^2-a^2-2ab+2xy)$

$=[(x-y)^2-(a-b)^2][(x+y)^2-(a+b)^2]$

$=(x-y+a-b)(x-y-a+b)(x+y+a+b)(x+y-a-b)$.

(3)运用平方差公式计算.

$8\times0.625^2-8\times0.375^2$

$=8\cdot(0.625-0.375)\cdot(0.625+0.375)=8\times0.25=2$.

$x^2y^2(x^n-y^n)$

**发散 2　选择题**

(1)把 $x^{2n}y^2-x^2y^{2n}$($n\geqslant1$ 的整数)分解因式，应是( B D ).

(A)$x^2y^2(x^{2n-2}-y^{2n-2})$　(B)$x^2y^2(x^n-y^n)$

$2\cdot2a\cdot11$

$44a$

(C)$x^{2n}y^{2n}(x+y)(x-y)$

(D)$x^2y^2(x^{n-1}+y^{n-1})(x^{n-1}-y^{n-1})$

(2)多项式 $4a^2+(k+9)a+121$ 为完全平方式时，$k=$ ( A ).

44

35

$11^2$

(A)35　(B)13　(C)30　(D)12



$(2a+11)^2$

$=4a^2+44a$

**解析**　(1)用直接法.本题先提取公因式,再用平方差公式分解因式.

原式 $= x^2y^2(x^{2n-2} - y^{2n-2})$

$= x^2y^2(x^{n-1} + y^{n-1})(x^{n-1} - y^{n-1})$.

故选(D).

本题也可用淘汰法.选项(B)、(C)与原式不等,故舍去.选项(A)未分解到最终结果.故选(D).

(2)用直接法或验证法.当 $4a^2 + (k+9)a + 121$ 为完全平方式时,可得 $(k+9)a = 2\cdot 2a\cdot 11$,即 $ka + 9a = 44a$.

$\therefore\ k = 44 - 9 = 35$.故本题应选(A).

## 解法发散

**发散 1**　分解因式:$x^3 - 2x^2y + xy^2 - x$.

**解法 1**　$x^3 - 2x^2y + xy^2 - x$ $= (x^3-2x^2y+xy^2)-x$

$= x(x^2 - 2xy + y^2 - 1)$　$= x(x^2-2xy+y^2)-x$

$= x[(x^2 - 2xy + y^2) - 1]$　$= x(x-y)^2-x$

$= x[(x-y)^2 - 1]$　$= x(x-y-1)(x-y+1)$

$= x(x - y + 1)(x - y - 1)$.

**解法 2**　$x^3 - 2x^2y + xy^2 - x$

$= (x^3 - 2x^2y + xy^2) - x$

$= x(x^2 - 2xy + y^2) - x$

$= x(x-y)^2 - x$

$= x[(x-y) - 1][(x-y) + 1]$

$= x(x - y - 1)(x - y + 1)$.

**发散 2**　分解因式:$x^3 - 3x^2 + 4$.

**分析**　此题可运用不同的添项或拆项方法有多种解法.

**解法 1**　原式 $= x^3 + x^2 - 4x^2 + 4$

$= (x^3 + x^2) - 4(x^2 - 1)$