'99考研辅导教材

1999年
硕士研究生入学考试

最后冲刺

（数学分册）

[理工类]

编写 考研试题研究组
主编 北京大学 田茂英

科学技术文献出版社

1999年

硕士研究生入学考试

最后冲刺（数学分册）

（理工类）

编　写：考研试题研究组
编　著：北京大学田茂英教授

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

图书在版编目(CIP)数据

1999 年硕士研究生入学考试最后冲刺:(数学分册)[理工类]/田茂英编著.—北京:科学技术文献出版社,1998
ISBN 7-5023-3067-4

Ⅰ.19… Ⅱ.田… Ⅲ.高等数学-试题-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 16779 号

总 策 划:胡东华
责任编辑:刘新荣
封面设计:胡东华

出 版 者/科学技术文献出版社
地 址/北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
发 行 者/新华书店北京发行所
印 刷 者/中国农业出版社印刷厂
版(印)次/1998 年 3 月第 1 版,1998 年 3 月第 1 次印刷
开 本/787×1092 16 开
字 数/380 千字
印 张/18
I S B N /7-5023-3067-4 /G·663
定 价/19.50 元

前　　言

按照新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试大纲，应广大读者的要求，此次模拟试题的出版较原来作了较大改动。主要有二：将原来模拟试题中的数学一、二（理工类），数学三、四（经济学类）分开，各单独成书。这样，可便于不同类考生分别选用，同时也是为了更好地与已经出版的《1999年硕士研究生入学考试应试教程》（数学分册）[理工类]、[经济类]相配合。第二方面变动较大的是：通过精心选编，数学一、数学二又各增加了三套模拟试题，即数学一由原来的七套题增加至十套，数学二由原来六套题增加至九套。其它部分根据新大纲也作了较大幅度的修改。

考试大纲规定：理工类考生考试分为数学一、数学二（试卷一，试卷二）二种试卷。各种试卷所适用的专业及考试内容比例等，可参见本书各种试卷（模拟试题）前的说明。我们编写的模拟试题是按照正规的考试试卷编写的，并且试题所涉及的数学知识点覆盖了全部数学考试大纲的要求。对填空题和选择题给出了详细答案，有些题还给出了提示，对计算题和证明题作了详细解答。所有这些都有利于实战，也便于培养和强化考生的解题、应试能力。**通过模拟训练，可发现薄弱环节，结合应试教程和单元测练，及时查漏补缺。**

本书不仅是工学类研究生入学应试者的复习用书，也可作为理工类院校在校生及电大、夜大的学生的教学参考书，也适合于自学者阅读。

由于水平有限，书中难免有错误和不妥之处，欢迎批评指正。

本书历年切题率高。

编　　者

于北京大学燕北园

目　　录

注:1998 年考研数学试题参考解答及评分标准见《应试教程》(数学分册)[理工类]

第一部分　数学一（试卷一）

数学一的说明

一、适用的专业

力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理科学与工程、船舶与海洋工程、原子能科学与技术、航空和宇航技术、兵器科学与技术、机械工程、材料科学与工程、冶金、土木、水利、测绘、化学工程与工业化学、地质勘探、矿业、石油、铁道、公路、水运以及建筑学、技术科学史、轻工、纺织、林业工程、农业工程六个学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

二、考试内容

1. 高等数学：(1) 函数、极限、连续；(2) 一元函数微分学；(3) 一元函数积分学；(4) 向量代数和空间解析几何；(5) 多元函数微分学；(6) 多元函数积分学；(7) 无穷级数；(8) 常微分方程。

2. 线性代数：(1) 行列式；(2) 矩阵；(3) 向量；(4) 线性方程组；(5) 矩阵的特征值和特征向量；(6) 二次型。

3. 概率论与数理统计初步：(1) 随机事件和概率；(2) 随机变量及其概率分布；(3) 二维随机变量及其概率分布；(4) 随机变量的数字特征；(5) 大数定律和中心极限定理；(6) 数理统计的基本概念；(7) 参数估计；(8) 假设检验。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1) 高等数学　约 60%

(2) 线性代数　约 20%

(3) 概率论与数理统计初步　约 20%

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题　约 30%

(2) 解答题(包括证明题) 约 70%

第一套模拟试题

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{n}} =$ ________

(2) $\int \dfrac{x^2+\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}}{x(1+x)}\mathrm{d}x =$ ________

(3) 已知平面 π 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 1，2，坐标原点到平面 π 的距离为$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则平面 π 在 z 轴上的截距为________。

(4) 设线性方程组

$$\begin{cases} bx_1 + (2+b-a)x_2 + (ab^2-2a)x_3 = 0 \\ -x_1 + (a-3)x_2 + abx_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

的基础解系含有 2 个解向量，则 $a =$ __2__，$b =$ __-1__。

(5) 测量某种溶液的浓度 25 次，算得标准差 $S = 0.025$（克 / 米^3）。设测量值服从正态分布，溶液浓度的 95% 的置信区间的长度 $l =$ ________。

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分。在每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后括号内）

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$($ab<0$) 上连续，在 (a,b) 内除 $x=0$ 外 $f'(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x) = 0$，则 $x=0$ 是(　　)。

(A) 极值点；　　　　(B) 驻点；

(C) 拐点；　　　　(D) 以上三种情况都不对。

(2) 设 $\vec{F} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$，其中 P,Q,R 有二次连续偏导数，则 $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} =$ (　D　)

(A) $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial z^2}$；　　(B) $\dfrac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}$；

(C) 1；　　(D) 0。

(3) 将极坐标下的二次积分 $\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_0^{\arcsin\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 化为直角坐标下（先对 x 积分）的二次积分是(　　)。

(A) $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(B) $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_1^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$；

(D) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$。

(4) 设 A 为 n 阶实方阵，X 为 $n \times 1$ 矩阵，那么，以下命题成立的是(　　)。

(A) 若 $AX=0$ 有解时，$A^TAX=0$ 也有解，则 A 必可逆；

(B) 若 $A^TAX=0$ 有解时，$AX=0$ 也有解，则 A 必可逆；

(C) $A^TAX=0$ 的解必是 $AX=0$ 的解；

(D) $A^TAX=0$ 的解与 $AX=0$ 的解无任何关系。

(5) 设随机变量 X 服从参数是 3 的指数分布，对任意常数 C，则 $E(2X-C)^2-[E(2X)-C]^2=$(　　)。

(A) 0；　　(B) $\frac{1}{3}$；

(C) $\frac{1}{9}$；　　(D) $\frac{4}{9}$。

三、(本题 7 分)

(1) 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点，使在该点处的切线平行于平面 π：

$$x+2y+z=4$$

且在该点处 $|z|$ 不小于 1。并求过该点的切线方程 L。 $x+1=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$

(2) 求切线 L 绕 z 轴旋转一周所成曲面的方程。

四、(本题 8 分)

设 $y_0(x)$ 是微分方程

$$y'=a(x)y^2+b(x)y+r(x)$$

的一个特解，通过变量替换 $$u(x)=\frac{1}{y-y_0(x)}$$

求原方程的通解。

五、(本题 7 分)

计算积分

$$I=\iint_{S^+}[x^2\cos\alpha+(y^2+1)\cos\beta+(z^2+3)\cos\gamma]dS$$

其中 S^+ 是曲线 $\begin{cases} y+1=z \\ x=0 \end{cases}$ $(-1\leqslant y\leqslant 0)$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面的 y 轴正向一侧。α,β,γ 为 S 上外法线 $\vec{n}$ 的方向角。

六、(本题 7 分)

设 $a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$ 单调,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛。证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

也收敛

七、(本题 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b](a > 0)$ 上连续,在 (a,b) 内可微,且 $f'(x) \neq 0$。证明存在 $\xi,\eta,\zeta \in (a,b)$,使得

$$\frac{f'(\zeta)}{f'(\xi)} = \frac{\xi}{\eta}$$

八、(本题 6 分)

已知三阶实方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \end{pmatrix}$$

的两个特征值分别为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$,其中 x, y 是待定的常数。

(1) 不算出 x,y 而求 A 的另一个特征值 λ_3;

(2) 矩阵 A 的列向量组是否线性相关?为什么?(在 x,y 未知的情况下)

(3) 求常数 x,y;

(4) 求 A 的列向量组的一个极大无关组。

九、(本题 8 分)

设 A 为任意 n 阶方阵,证明 $r(A^{n+1}) = r(A^n)$

十、(本题 8 分)

某大型商场每天接待顾客 10000 人,设每位顾客的消费额(元),服从[100,1000]上的均匀分布,且顾客的消费额是相互独立的,试求该商场的销售额(元)在平均销售额上、下浮动不超过 20000(元)的概率。

十一、(本题 6 分)

设随机变量 X,Y 和 Z 相互独立,且 $X \sim N(0.2,1)$,$Y \sim N(0,1)$,而 $Z \sim x^2(1)$。又 $X_1,X_2,\cdots,X_5,Y_1,Y_2,Y_3$ 及 Z_1,Z_2 是分别来自总体 X,Y 和 Z 的简单随机样本。求统计量

$$\xi = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_5 - 1}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Z_1 + Z_2}}$$

所服从的分布,并指明其参数。

第一套模拟试题参考解答

一、(1) **提示**　考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{x}}$;1。

(2)$x-\ln|1+x|+(\arctan\sqrt{x})^2+C$。

(3) $\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$。　(4)$a=2,b=-1$。

(5)$l=0.02$

二、(1)(B);　(2)(D);　(3)(B);　(4)(C);　(5)(D)。

三、解

(1) 由于　$x'_t=1,y'_t=2t,z'_t=3t^2$

故曲线在点(x,y,z)处的切向量为$\vec{a}=\{1,2t,3t^2\}$,因为L平行于平面π,所以有

$$1+4t+3t^2=0$$

由此解得$t_1=-1,t_2=-\dfrac{1}{3}$,注意到$|z|$不小于1,故所求切点为

$$x=-1,y=1,z=-1$$

于是所求切线的方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$$

(2) 将切线L的方程写为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}(z-2)\\[2ex] y=\dfrac{1}{3}(1-2z)\end{cases}$$

于是所求旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=\frac{1}{9}(z-2)^2+\frac{1}{9}(1-2z)^2$$

即

$$x^2+y^2-\frac{5}{9}z^2+\frac{8}{9}z-\frac{5}{9}=0$$

四、解　由变量替换解出

$$y=y_0(x)+\frac{1}{u}$$

我们先求$u(x)$,将

$$y' = y'_0(x) - \frac{1}{u^2}u'$$

代入原方程，得

$$y'_0(x) - \frac{u'}{u^2} = a(x)[y_0^2(x) + 2\frac{y_0(x)}{u} + \frac{1}{u^2}] + b(x)[y_0(x) + \frac{1}{u}] + r(x)$$

由于 $y_0(x)$ 是原方程的一个特解，故得

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{2a(x)}{u}y_0(x) + \frac{a(x)}{u^2} + \frac{b(x)}{u}$$

即

$$u' + [2a(x)y_0(x) + b(x)]u = -a(x)$$

这是一阶线性非齐次方程，于是得

$$u = e^{-\int[2a(x)y_0(x)+b(x)]dx}\{C + \int[-a(x)]e^{\int[2a(x)y_0(x)+b(x)]dx} \cdot dx\}$$

从而可给出原方程的通解为

$$y = y_0(x) + \frac{1}{u}$$

其中 u 已解出。

五、解 $\quad I = \iint_{S^+} x^2 dydz + (y^2+1)dzdx + (z^2+3)dxdy$

方法一 利用高斯公式。

补上有向曲面 S_1：

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

其方向与 y 轴负向一致。记 S 与 S_1 围成的空间区域为 Ω。因高斯公式的正向是指外侧，而本题指定的是内侧，故三重积分前应加负号。Ω 由 $(y+1)^2 = x^2 + z^2$ 及 $y = 0$ 围成，Ω 在 xoz 平面上的投影为平面区域 D_{xz}：

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

故可采用柱坐标计算，于是

$$\begin{aligned} I + \iint_{S_1^+} - \iint_{S_1^+} &= \oiint_{S^+ + S_1^+} x^2dydz + (y^2+1)dzdx + (z^2+3)dxdy - \iint_{S_1^+} \\ &= -2\iiint_{\Omega} (x+y+z)dv - \iint_{S_1^+} \\ &= -2\int_0^{2\pi}d\theta \int_0^1 rdr\int_{r-1}^0 [r\cos\theta + r\sin\theta + y]dy - [-\iint_{x^2+z^2\leqslant 1} 1 \cdot dzdx] \\ &= -2\int_0^{2\pi}d\theta \int_0^1 r[(1-r)r\cos\theta + (1-r)r\sin\theta - \frac{1}{2}(1-r)^2] \cdot dr \end{aligned}$$

$$+\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 1} \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=-4\pi\cdot\left(-\frac{1}{24}\right)+\pi=\frac{7\pi}{6}$$

方法二 曲面 $S: y+1=\sqrt{x^2+z^2}(y\leqslant 0)$ 在 yoz 平面上的投影为 D_{yz}：

$$-y-1\leqslant z\leqslant y+1,\ -1\leqslant y\leqslant 0$$

又对 x 轴正向的前后两侧内法线方向相反，故

$$\iint_{S^+} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}[(y^2+1)-z^2]\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}[(y^2+1)-z^2]\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

同理可得

$$\iint_{S^+}(z^2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

而曲面 S 在 xoz 平面上的投影为 D_{xz}：$\begin{cases}x_2+z_2\leqslant 1\\ y=0\end{cases}$，曲面 S^+ 的法线与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$，故

$$\begin{aligned}\iint_{S^+}(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\iint\limits_{D_{xz}}[(\sqrt{x^2+z^2}-1)^2+1]\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r[(r-1)^2+1]\mathrm{d}r\\&=\frac{7\pi}{6}\end{aligned}$$

因此，原积分

$$I=\frac{7\pi}{6}$$

六、证明 由于 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 单调，则偶数项

$$\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots+a_{2n}}<\frac{2n}{na_n}=\frac{2}{a_n}$$

奇数项

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots+a_{2n+1}}<\frac{2n+1}{(n+1)a_n}<\frac{2(n+1)}{(n+1)a_n}=\frac{2}{a_n}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n}$ 收敛，所以由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛。

七、证明 令 $g(x)=\ln x$，则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足哥西中值定理的条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\ln b-\ln a}{f(b)-f(a)}=\frac{1}{\xi f'(\xi)}$$

于是

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{\xi f'(\xi)}\cdot\frac{1}{(b-a)} \tag{1,1}$$

又 $g(x)=\ln x, f(x)$ 在$[a,b]$上分别满足拉格朗日中值定理的条件,故存在 $\eta,\zeta\in(a,b)$,使

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\eta} \tag{1,2}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\zeta) \tag{1,3}$$

将(1,2),(1,3)代入(1,1)式,得

$$\frac{1}{\eta}=\frac{1}{\xi f'(\xi)}\cdot f'(\zeta)$$

即

$$\frac{\xi}{\eta}=\frac{f'(\zeta)}{f'(\xi)}$$

八、解 (1) 由矩阵 A 的特征值与 A 的迹的关系得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3$$

故

$$\lambda_3=3-\lambda_1-\lambda_2=3-0-3=0$$

(2) 因为

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$$

所以矩阵 A 不满秩,即 $r(\mathrm{A})<3$,因此,A 的列向量组线性相关。

(3) 为求 x,y 的值,分别将 $\lambda_1=0,\lambda_2=3$ 代入 A 的特征方程

$$|\lambda_1E-A|=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-x&-1&-1\\-1&-y&-1\end{vmatrix}=-1+x+y-xy=0$$

$$|\lambda_2E-A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-x&2&-1\\-1&-y&2\end{vmatrix}=5-2x-2y-xy=0$$

由此解得

$$x=1,y=1$$

故

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

(4) 设 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。由于 $r(A)=1$，而 A 的任何一列 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 都不是零向量，故任何一列都是 A 的列向量组的一个极大无关组。

九、证明 只要证明齐次线性方程组

$$A^{n+1}X=0 \text{ 与 } A^nX=0$$

同解即可，其中 X 是 n 维列向量。事实上，若两方程组同解，则它们有相同的基础解系，从而有

$$n-r(A^{n+1})=n-r(A^n)$$

因此，

$$r(A^{n+1})=r(A^n)$$

下面证明两方程组同解。显然，方程组 $A^nX=0$ 的解，必是

$$A^{n+1}X=A(A^nX)=0$$

的解。反之，是 $A^{n+1}X=0$ 的解，也必定是 $A^nX=0$ 的解，否则，假设 $A^nX\neq 0$，则 $X\neq 0$，且 n 维向量组 $X,AX,A^2X,\cdots,A^nX$ 必线性无关，事实上，设

$$k_1X+k_2AX+\cdots+k_{n+1}A^nX=0$$

则

$$A^n(k_1X+k_2AX+\cdots+k_{n+1}A^nX)=0$$

由于 $A^{n+1}X=0$，故得

$$k_1A^nX=0$$

因为 $A^nX\neq 0$，所以 $k_1=0$

再由

$$A^{n-1}(k_2AX+\cdots+k_{n+1}A^nX)=0$$

得

$$k_2=0$$

类似地可证明 $k_3=k_4=\cdots=k_{n+1}=0$，所以 $n+1$ 个 n 维向量 $X,AX,\cdots,A^nX$ 线性无关，这与任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关矛盾。因此，必有 $A^nX=0$，即 $A^{n+1}X=0$ 的解必是 $A^nX=0$ 的解。所以 $A^{n+1}X=0$ 与 $A^nX=0$ 同解。

十、解 设第 k 位顾客的消费额为 $X_k(k=1,2,\cdots,10000)$，商场日销售额为 X，则

$$X=\sum_{k=1}^{10000}X_k$$

因为 X_k 服从[100,1000]上的均匀分布，所以

$$E(X_k)=\frac{1}{2}(100+1000)=550$$

日平均销售额为

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10000}E(X_k)=n\mu=10000\times 550=55\times 10^5,$$

而

$$\sigma^2=D(X_k)=\frac{1}{12}(1000-100)^2=\frac{900^2}{12}$$

由于 $X_k(k=1,2,\cdots,10000)$ 独立同分布，故用林德伯格—列维(中心极限)定理

$$\begin{aligned}
&P\{55\times 10^5-20000\leqslant X\leqslant 55\times 10^5+20000\}\\
&=P\{-\frac{20000}{100\times 900/\sqrt{12}}\leqslant\frac{X-55\times 10^5}{100\times 900/\sqrt{12}}\leqslant\frac{20000}{100\times 900/\sqrt{12}}\}\\
&\approx 2\Phi(\frac{20000}{100\times 900/\sqrt{12}})-1\\
&=2\Phi(0.77)-1\approx 0.56
\end{aligned}$$

因此，日销售额在$[55\times 10^5-2\times 10^4,55\times 10^5+2\times 10^4]$内的概率是 0.56。

十一、解　因为 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 相互独立，且都服从正态分布 $N(0.2,1)$，记

$$\overline{X}=\frac{X_1+\cdots+X_5}{5}$$

则

$$\eta=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\sqrt{5}(\overline{X}-0.2)\sim N(0,1)$$

由于 Y_1,Y_2,Y_3 相互独立，且服从 $N(0,1)$，故

$$Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2\sim\chi^2(3)$$

又 $Z_1\sim\chi^2(1),Z_2\sim\chi^2(1)$。因此

$$\zeta=Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Z_1+Z_2\sim\chi^2(5)$$

且 η 与 ζ 相互独立，故

$$\begin{aligned}
\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\zeta}{5}}}&=\frac{\sqrt{5}(\overline{X}-\frac{1}{5})}{\sqrt{\frac{\zeta}{5}}}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_5-1}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Z_1+Z_2}}\\
&=\xi\sim t(5)
\end{aligned}$$

即统计量

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_5-1}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Z_1+Z_2}}$$

服从 t 分布，且其参数为 5。

第二套模拟试题

一、填空题(本题 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-2x^2}-3}{x^4}=$ ________。

(2) 若函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的改变量为

$$\Delta y=\frac{y\Delta x}{x+\sqrt{x^2+y^2}}+\alpha,(y>0)$$

当 $\Delta x\to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,且 $x=1$ 时,$y=\sqrt{3}$,则 y 与 x 间的函数关系为________。

(3) 记 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$,$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。如果

$\vec{F}(x,y,z)=f(r)\cdot\vec{r}$,$G(r)=\int_{r^2}^{1}kf(\sqrt{\rho})\mathrm{d}\rho$,则当 $\vec{F}(x,y,z)$ 是 $G(r)$ 的负梯度时,$k=$ ________。

(4) 若 n 阶方阵 A,B 满足 $|A|\neq 0$,且 $|B|\neq 0$,则 $(AB)^*=$ ________。

(5) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(-x)$,$-\infty<x<+\infty$,则 X 与 $|X|$ 的协方差 $\mathrm{cov}(X|X|)=$ ________;$P\{X<k,|X|<k\}=$ ________,其中 $0<k<+\infty$。

二、选择题(本题 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。在每小题的选项中,只有一项符合要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且对任意实数 a,b,积分 $\int_a^{a+b}f(x)\mathrm{d}x$ 与常数 a 无关,则 $f(x)=$(　　)。

(A)0;　　(B)$f(b+a)-f(a)$;

(C) 常数;　　(D) 不能确定。

(2) 曲线 $x=\dfrac{t^2}{t-1}$,$y=\dfrac{t}{t^2-1}$,有(　　)条渐近线。

(A)4;　　(B)3;

(C)2;　　(D)1。

(3) 在区间 $(0,2l)$ 内,函数 $f(x)=x$ 的富氏级数中关于正弦函数的第 4 项的(富氏)系数是(　　)。

(A)l/π　　(B)$-\dfrac{l}{\pi}$;