

高等学校教材

# 数学物理方程

(第二版)

下 册

陈庆益 李志深 编著

$$\begin{aligned}u_{xt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0\end{aligned}$$

高等教育出版社

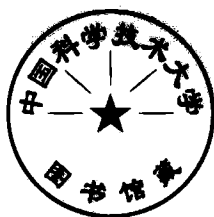
高等学校教材

# 数学物理方程

(第二版)

下册

陈庆益 李志深 编著



高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书为第二版,是在第一版的基础上总结了近几年的教学经验,并吸收了兄弟院校的宝贵意见,从表述方式或材料安排方面作了较大改动,使之更便于教学。

本书共十章,分上、下册出版。上册(前五章)包含古典数学物理方程的基本内容。第1章用微元法引出三类典型方程的定解问题,而把变分原理及相应的引出方式放入章末的附录中;第2、3、4章分别讨论波动方程、位势方程和热传导方程典型定解问题的适定性、解法及解的性质;第5章介绍二阶线性偏微分方程的分类和特征概念,并对典型方程作出总结;第6章基本上按数学分析的水平介绍广义函数,包括Соболев空间、嵌入定理及迹定理;第7章讨论一般的常系数方程及其基本解;第8章讲述变系数椭圆方程及退化的椭圆方程和双曲方程;第9章在对非线性方程的特性作一般性考察后,初步介绍冲击波和孤波;第10章介绍近似解,包括解析近似及数值近似。每章各节除附有习题外,还在各章末列有注释与文献,供进一步学习参考。

本书上册可作为高等院校数学专业的基础课教材,下册可作为选修课以及有关专业研究生课程的教学用书。

### 高等学校教材 数学物理方程

(第二版)

下 册

陈庆益 李志深 编著

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印刷

开本 $850 \times 1168$  1/32 印张8 字数198,000

1979年1月第1版 1987年4月第2版

1987年4月第1次印刷

印数 00,001—3,620

书号 13010·01330 定价 1.35元

# 目 录

## 下 册

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 6. 广义函数 .....                  | 1  |
| 6.1. 广函及其运算 .....              | 1  |
| 6.1.1. $\delta$ 分布及广函的定义 (1)   |    |
| 6.1.2. 广函的基本运算 (9)             |    |
| 6.1.3. 广函的变元变换 (14)            |    |
| 6.1.4. 广函的导数 (18)              |    |
| 习题 6.1 (21)                    |    |
| 6.2. 广函的结构 .....               | 23 |
| 6.2.1. 广函在有界域中的结构 (23)         |    |
| 6.2.2. 任意广函的结构 (26)            |    |
| 6.2.3. 紧台广函的结构 (29)            |    |
| 6.2.4. 缓增广函的结构 (32)            |    |
| 习题 6.2 (34)                    |    |
| 6.3. 广函的 Fourier 变换 .....      | 34 |
| 6.3.1. 检试函数的 Fourier 变换 (34)   |    |
| 6.3.2. 广函的 Fourier 变换 (38)     |    |
| 6.3.3. 广函的卷积 (43)              |    |
| 6.3.4. 广函的 Fourier 变换简表 (48)   |    |
| 习题 6.3 (51)                    |    |
| 6.4. Соболев 空间 .....          | 52 |
| 6.4.1. 空间 $W_p^m(\Omega)$ (52) |    |
| 6.4.2. 嵌入定理 (54)               |    |
| 6.4.3. 空间 $H'$ (57)            |    |
| 6.4.4. 迹定理 (60)                |    |
| 习题 6.4 (63)                    |    |
| 注释与文献 .....                    | 63 |
| 7. 一般常系数方程 .....               | 65 |
| 7.1. 基本解 .....                 | 65 |
| 7.1.1. 初值问题情形 (65)             |    |
| 7.1.2. 某些方程的基本解 (71)           |    |
| 7.1.3. 基本解简表 (83)              |    |
| 习题 7.1 (86)                    |    |
| 7.2. 基本解的存在性 .....             | 86 |

|                                                  |                                      |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 7.2.1. 台阶积分法 (86)                                | 7.2.2. 泛函延拓法 (91)                    |
| 习题 7.2 (94)                                      |                                      |
| 7.3. 适定定解问题 .....                                | 95                                   |
| 7.3.1. 初值问题 (95)                                 | 7.3.2. 混合问题 (98)                     |
| 习题 7.3 (102)                                     |                                      |
| 注释与文献 .....                                      |                                      |
| 102                                              |                                      |
| 8. 变系数方程 .....                                   | 103                                  |
| 8.1. 椭圆方程 .....                                  | 103                                  |
| 8.1.1. 方程与边值条件 (103)                             | 8.1.2. Green 公式 (111)                |
| 8.1.3. $H^s(\Omega)$ ( $s \geq 2m$ ) 中的正则性 (116) | 8.1.4. $H^s(\Omega)$ ( $s \geq 2m$ ) |
| 中的存在与唯一性 (124)                                   |                                      |
| 习题 8.1 (126)                                     |                                      |
| 8.2. 退化的二阶椭圆方程 .....                             | 127                                  |
| 8.2.1. 二维情形 (127)                                | 8.2.2. 极大值原理 (132)                   |
| 8.2.3. 唯一性与误差估计 (143)                            | 8.2.4. 弱解的存在性条件 (145)                |
| 习题 8.2 (147)                                     |                                      |
| 8.3. 退化的二阶双曲方程 .....                             | 148                                  |
| 8.3.1. 初值问题 (148)                                | 8.3.2. 混合问题 (157)                    |
| 习题 8.3 (172)                                     |                                      |
| 注释与文献 .....                                      |                                      |
| 173                                              |                                      |
| 9. 非线性方程 .....                                   | 174                                  |
| 9.1. 一般性讨论 .....                                 | 174                                  |
| 9.1.1. 非线性引起的奇性 (174)                            | 9.1.2. 某些初等解法 (178)                  |
| 习题 9.1 (182)                                     |                                      |
| 9.2. 拟线性双曲组 .....                                | 183                                  |
| 9.2.1. 运动波 (183)                                 | 9.2.2. 双曲组 (186)                     |
| 9.2.3. 间断初值问题 (189)                              | 9.2.4. 混合问题 (195)                    |
| 习题 9.2 (196)                                     |                                      |
| 9.3. 孤波 .....                                    | 197                                  |
| 9.3.1. KdV 方程 (197)                              | 9.3.2. 孤波间的相互作用 (201)                |
| 9.3.3. 立方 Schrödinger 方程 (203)                   | 9.3.4. 正弦 Gordon 方程 (204)            |
| 习题 9.3 (207)                                     |                                      |

---

|                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| 注释与文献               | 207                 |
| 10. 近似解             | 209                 |
| 10.1. 解析近似解         | 209                 |
| 10.1.1. 加权余量法 (209) | 10.1.2. 正则摄动法 (214) |
| 10.1.3. 奇摄动法 (218)  | 习题 10.1 (230)       |
| 10.2. 数值近似解         | 230                 |
| 10.2.1. 有限差分法 (230) | 10.2.2. 有限元素法 (239) |
| 习题 10.2 (246)       |                     |
| 注释与文献               | 247                 |

## 6. 广义函数

广义函数(以后简称广函)及其 Fourier 变换理论是研究偏微分方程的重要工具. 本章力图在数学分析水平上介绍广函理论, 包括广函的局部结构; 然后初步论述 Соболев 空间及嵌入定理, 并提及迹定理.

### 6.1. 广函及其运算

#### 6.1.1. $\delta$ 分布及广函的定义

在力学、物理学及技术科学中, 常考虑一些集中量的分布密度或密度分布. 例如, 在通常的三维空间  $R^3$  中某点  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  放置单位正电荷, 若用

$$\delta(x - x^0) \equiv \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0)$$

表示电荷的空间分布密度, 那么, 形式地由密度的通常定义可以认为

$$\begin{cases} \delta(x - x^0) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \\ \iiint_{R^3} \delta(x - x^0) dx = 1, \end{cases}$$

这里用  $\Delta Q$  记含点  $x$  的体元  $\Delta V$  中所含的电荷总量. 由此应该有

$$\begin{cases} \delta(x - x^0) = \begin{cases} \infty, & x = x^0, \\ 0, & x \neq x^0, \end{cases} \\ \iiint_{R^3} \delta(x - x^0) dx = 1. \end{cases} \quad (1)$$

一般地, 对于在点  $x^0$  放置的集中正电荷  $q$ , 则可形式地引进密度

分布

$$\rho(x, x^0) = f(x) \delta(x - x^0),$$

这里  $f(x)$  为任一连续函数, 只要求

$$f(x^0) = q.$$

但是应该有

$$\begin{aligned} \rho(x, x^0) &= \begin{cases} \infty, & x = x^0, \\ 0, & x \neq x^0, \end{cases} \\ \iiint_{R^3} \rho(x, x^0) dV &= \iiint_{R^3} \delta(x - x^0) f(x) dx \\ &= f(x^0) = q. \end{aligned} \quad (2)$$

对于其他的集中量, 也可同样地引进密度分布函数, 并且都涉及这个  $\delta$  分布或  $\delta$  函数.

显然, 这个  $\delta$  函数不能在经典的点函数意义下来理解, 因为在任何积分理论中, 都得出  $\delta(x - x^0)$  沿  $R^3$  的积分值为 1 的结果. 但由于这个  $\delta$  分布确实反映或至少近似地反映一种现实的量的关系: 单位集中量的密度分布, 并给现实的不连续量提供一种数数表述的可能性, 所以多年来得到广泛的应用.

为了从数学方面认识这个  $\delta$  函数, 先由 (1) 及 (2) 形式地引出一些推论. 首先注意, 对于具任意有限维数  $n$  的实空间  $R^n = \{x: x = (x_1, \dots, x_n)\}$ , 位于任一固定点

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

的单位集中量的密度分布是

$$\delta(x - x^0),$$

它是非负的对称函数 (不妨取  $x^0 = (0, \dots, 0)$  为坐标原点),

$$\delta(-x) = \delta(x) \geq 0, \quad \forall x \in R^n, \quad (3)$$

这里  $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ . 其次, 作为单位集中量的密度分布, 对于在点  $x^0$  放置集中量  $q = f(x^0)$  的任一连续延拓  $f(x)$ , 应有

$$\int \delta(x-x^0)f(x)dx=f(x^0)=q. \quad (4)$$

这里及以后常略去积分号下的积分域;只在有所强调时,才标明积分域是某个特定的域。最后,虽然我们不能从点函数的角度来看待 $\delta$ 分布,但却可由它对一些函数的作用值(4)来获取对这个 $\delta$ 分布的信息。也就是说,可以把 $\delta$ 分布作为一定函数空间 $\Phi$ 上的连续线性泛函来看待。关于泛函,下面将作详细说明。为了使 $\delta$ 分布便于运算,例如无穷可微,不妨对函数空间 $\Phi$ 作较强的要求。下面将看到,取 $\Phi$ 为由所有在 $R^n$ 中无穷可微而分别在不同的有界域外恒等于零的实或复值函数 $\varphi(x)$ 组成的空间 $C_0^\infty(R^n)$ ,是特别有利的。 $C_0^\infty(R^n)$ 中函数通常称为检试函数或基本函数;相应地称 $C_0^\infty(R^n)$ 为检试函数空间或基本空间。还有其他的基本空间,但 $C_0^\infty(R^n)$ 是最重要的基本空间。

引用已广泛流行的记号

$$\text{supp}\varphi=\{x: \varphi(x)\neq 0, x\in R^n\}^-,$$

这里用 $M^-$ 记集 $M$ 的闭包 $\textcircled{1}$ ,并称 $\text{supp}\varphi$ 为函数 $\varphi$ 的台或支集(support),则 $C_0^\infty(R^n)$ 中的函数 $\varphi$ 称为紧台函数,因为这时 $\text{supp}\varphi$ 为紧集(即 $R^n$ 中的有界闭集),在 $\text{supp}\varphi$ 之外, $\varphi(x)\equiv 0(x\notin \text{supp}\varphi)$ 。

一般地,可引用记号

$$C_0^m(\Omega)=\{\varphi(x): \varphi\in C^m(R^n), \text{supp}\varphi\text{为}\Omega\text{中紧集}\},$$

其中 $\Omega$ 为 $R^n$ 中开集, $C^m(R^n)$ 表示 $R^n$ 中 $m$ 次连续可微的实或复值函数组成的空间, $m$ 为某个非负整数,可取值零,也可取值 $\infty, 0\leq m\leq\infty$ 。 $C_0^m$ 也可记作 $C_c^m$ 。

**例 1** Dirichlet 函数是

$\textcircled{1}$  点集 $M$ 的闭包 $M^-$ 或 $\overline{M}$ 是对 $M$ 添加其所有的极限点而得的闭集。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

它的台  $\text{supp } f = [-\infty, \infty]$ , 即整个实轴.

空间  $C_0^\infty(R^n)$  中的函数是很多的, 例如有函数

$$\varphi(x; a, b, c) = \begin{cases} c \exp \frac{-b^2}{a^2 - |x|^2}, & |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 < a^2, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $a$  及  $b$  为任意正数,  $c$  为任一实数或复数.

下面的定理说明  $C_0^\infty(R^n)$  中函数的稠密度.

**定理 1** 任一函数  $f(x) \in C_0^0(R^n)$  可用  $C_0^\infty(R^n)$  中函数列一致逼近, 即  $C_0^\infty$  为  $C_0^0$  的稠密子空间.

**证明** 由  $f(x)$  利用下式构造其光滑的均值函数:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{|x-\xi| < \varepsilon} f(\xi) \varphi(x-\xi; \varepsilon, \varepsilon, A_\varepsilon) d\xi, \quad (6)$$

其中  $A_\varepsilon$  为正数, 它使得

$$\int \varphi(x; \varepsilon, \varepsilon, A_\varepsilon) dx = A_\varepsilon \int_{|x| < \varepsilon} \exp \frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2} dx = 1. \quad (7)$$

由(6)知  $\text{supp } f_\varepsilon$  含于  $\text{supp } f$  的  $\varepsilon$  邻域  $\Omega = \{x: |x-\xi| \leq \varepsilon, \xi \in \text{supp } f\}$  中, 故  $f_\varepsilon$  具紧台; 因  $\varphi \in C_0^\infty$ , 显然有  $f_\varepsilon \in C_0^\infty$ . 据(7)有

$$\begin{aligned} f(x) - f_\varepsilon(x) &= \int_{|x-\xi| < \varepsilon} f(x) \varphi(x-\xi; \varepsilon, \varepsilon, A_\varepsilon) d\xi \\ &\quad - \int_{|x-\xi| < \varepsilon} f(\xi) \varphi(x-\xi; \varepsilon, \varepsilon, A_\varepsilon) d\xi \\ &= \int_{|x-\xi| < \varepsilon} [f(x) - f(\xi)] \varphi(x-\xi; \varepsilon, \varepsilon, A_\varepsilon) d\xi. \end{aligned}$$

因  $f$  连续, 故对任一给定的  $\delta > 0$ , 取  $\varepsilon > 0$  充分小, 只要  $|x-\xi| \leq \varepsilon$ , 就有  $|f(x) - f(\xi)| < \delta$ . 于是由上式得

$$|f(x) - f_\varepsilon(\xi)| \leq \delta \int_{|x-\xi| \leq \varepsilon} \varphi(x-\xi, \varepsilon, \varepsilon, A_\varepsilon) d\xi = \delta.$$

这表明当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $f_\varepsilon$  一致逼近于  $f$ .

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  显然以实或复数域作系数域组成线性空间. 现在对这个空间的函数列  $\{\varphi_i(x)\}$  引进收敛性概念. 若

1) 所有  $\varphi_i$  在同一有界闭域  $K$  外恒等于零, 即  $\text{supp } \varphi_i \subset K$ ,  $j \in N^+$ , 这里  $N^+$  表示由正整数组成的集;

2)  $\{\varphi_i\}$  的各阶导数列  $\{\partial^\alpha \varphi_i\}$ ,  $|\alpha| \in N$ , 在  $K$  上一致收敛于零, 其中  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  为任何  $n$  重指标, 即  $\alpha \in N^n$ . 且

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, N = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

(8)

则称列  $\{\varphi_i(x)\}$  在  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  中收敛于零. 通常记  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  具备上述收敛性而成的(拓扑)空间为  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  或  $\mathcal{D}$  (L. Schwartz 空间), 则列  $\{\varphi_i(x)\}$  在  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  中收敛于零可简记为

$$\varphi_i \rightarrow 0(\mathcal{D}).$$

$\varphi_i \rightarrow \varphi(\mathcal{D})$  当然由  $\varphi_i - \varphi \rightarrow 0(\mathcal{D})$  来定义. 类似地可定义空间  $\mathcal{D}(\Omega) \equiv C_0^\infty(\Omega)$  中的收敛性. 显然, 在这种收敛性定义下,  $\mathcal{D}$  及  $\mathcal{D}(\Omega)$  都是完备空间.

于是可定义广函如下.

**定义 1**  $\mathcal{D}$  上的广函(或称分布)  $f$  是  $\mathcal{D}$  上的连续线性泛函, 即对  $\mathcal{D}$  中每个检试函数  $\varphi(x)$ , 有确定的实或复数

$$f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle$$

与  $\varphi$  相对应, 并具备下面两个性质:

1) **线性** 对任何两个实或复数  $a$  及  $b$ , 有

$$f(a\varphi + b\psi) = af(\varphi) + bf(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

2) 连续性 当  $\varphi_i \rightarrow 0(\mathcal{D})$  时,  $f(\varphi_i) \rightarrow 0$  (在数列的通常收敛性定义下).

$\mathcal{D}$  上分布的全体记作  $\mathcal{D}'$ , 称为广函空间(分布空间).

一般地, 空间  $E$  上的连续线性泛函的全体称为  $E$  的对偶空间, 记为  $E'$ .

例 2  $\delta$  分布是  $\mathcal{D}$  上如下定义的广函:

$$\langle \delta(x-x^0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x^0), \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9)$$

读者可核验这样确定的  $\delta$  分布确实是  $\mathcal{D}$  上的一个连续线性泛函.  $\delta$  分布通常称为 Dirac 分布或测度; 在技术科学中则称为脉冲符号或脉冲函数.

例 3 任经典的局部  $L$  可积函数 (即在  $\mathbb{R}^n$  的任一有界域上 Lebesgue 可积的函数)  $f(x)$  以如下方式确定一个广函<sup>①</sup>:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int \overline{f(x)} \varphi(x) dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (10)$$

据  $\mathcal{D}$  中收敛性定义并注意  $\text{supp } \varphi$  为有界闭集, 容易看出, 当  $\varphi_i \rightarrow 0(\mathcal{D})$  时, 由 Lebesgue 积分理论中的极限交换定理, 确有  $f(\varphi_i) \rightarrow 0$ , 故 (10) 定义一个广函. (10) 中的  $\overline{f(x)}$  是  $f(x)$  的复共轭值. 以后会看到, 对复值泛函, 换  $f$  或  $\varphi$  为其复共轭值, 有其方便之处. (10) 中用  $\overline{f}$  而不用  $\overline{\varphi}$ , 为的是符合定义 1 中的线性要求,  $f(a\varphi) = a f(\varphi)$ , 而不是  $f(a\varphi) = \overline{a} f(\varphi)$ .

由 (10) 知广函空间  $\mathcal{D}'$  包含所有的局部  $L$  可积函数. 故  $\mathcal{D}'$  为非空集; 另一方面, 由于  $\mathcal{D}'$  还包含  $\delta$  分布这种“非经典”的广函, 所以广函空间  $\mathcal{D}'$  确实扩大了经典的函数空间. 为此须证明, 由 (9) 定义的  $\delta$  分布不能用任何一个局部  $L$  可积函数表示为形式 (10). 应用反证法. 设存在某个局部  $L$  可积函数  $f(x)$  (因  $\delta$  作用于实的  $\varphi$

① 有时也用到不取复共轭值的形式, 而用圆括号表示:

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx.$$

取实值,可取  $f$  为实值函数),使

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

特别对由(5)确定的  $\varphi(x; a, a, 1) \in \mathcal{D}$ , 有

$$\int_{|x| < a} f(x) \varphi(x; a, a, 1) dx = \varphi(0; a, a, 1) = \frac{1}{e},$$

注意右边的值与  $a$  无关. 令  $a \rightarrow 0$ , 上式左边的值因积分域缩为一点而趋于零, 而与右边的值  $e^{-1}$  不相等. 所得矛盾表明  $\delta$  分布确不能用经典的局部  $L$  可积函数表示为(10)的形式. 这种情况引出下面的定义.

**定义 2** 由局部  $L$  可积函数  $f(x)$  按(10)确定的广函称为**函数型广函**或**正规广函**; 非正规广函统统称为**奇型广函**.

$\delta$  分布是奇型广函, 但不是仅有的奇型广函, 下面还会见到其他的奇型广函. 注意任一奇型广函不能由局部  $L$  可积函数表示为(10)的形式.

**例 4** 对任一局部  $L$  可积函数  $f(x)$ , 由

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \partial^p \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n) \quad (11)$$

也确定一个广函  $f \in \mathcal{D}'$ . 根据  $\mathcal{D}$  中收敛性定义, 容易核验这个线性泛函的连续性. 当  $|p| > 0$  且  $f$  处处不存在导数时, (11) 给出一个奇型广函.

**定义 3** 当  $|p| \equiv p_1 + \dots + p_n$  是使广函  $f \in \mathcal{D}'$  表为形式(11)的最小阶数时, 称  $f$  为  $|p|$  阶广函. 若  $|p| < \infty$ , 则称  $f$  为**有限阶广函**.  $\mathcal{D}$  上所有的有限阶广函组成的空间记作  $\mathcal{D}'_r$ .

根据定义 3, 正规广函为零阶广函. 以后会看到,  $n$  维空间的  $\delta$  分布是  $n$  阶广函.

此后经常要用到两个广函相等的概念.

**定义 4** 若广函  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  在  $\Omega$  的某一子域  $\omega$  中使得

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega), \quad (12)$$

则称  $f$  在  $\omega$  内为零广函. 若广函  $f$  及  $g$  在  $\omega$  内使  $f - g$  为零广函, 则称  $f$  与  $g$  在  $\omega$  中相等; 若  $f$  与  $g$  在  $\Omega$  的任一子域  $\omega$  中相等, 即称  $f$  与  $g$  在  $\Omega$  中相等. 使广函  $f$  为零广函的最大开子集  $\omega \subset \Omega$  的余集, 称为广函  $f$  的台或支集, 记作  $\text{supp } f$ .

**例 5** 等式  $\delta(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1) \cdots \delta(x_n)$  在  $\mathcal{D}'$  中按如下意义成立:

$$\begin{aligned} \langle \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta(x_1), \langle \delta(x_2), \dots, \langle \delta(x_n), \varphi(x_1, \dots, x_n) \rangle \dots \rangle \rangle \\ &= \langle \delta(x_1), \langle \delta(x_2), \dots, \langle \delta(x_{n-1}), \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \rangle \dots \rangle \rangle \\ &= \dots = \varphi(0, \dots, 0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

即  $\delta(x_1) \cdots \delta(x_n)$  为张量积  $\delta(x_1) \otimes \cdots \otimes \delta(x_n)$ , 并按上式作用.

还可核验(作为习题)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(\ln|x| - 1)\varphi''(x) dx &= \left\langle \text{Pv } \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \\ &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \end{aligned} \quad (13)$$

这里  $\text{Pv } \frac{1}{x}$  记由右边极限定义的非局部可积函数  $\frac{1}{x}$  的 Cauchy 主值. 于是  $\frac{1}{x}$  也是  $\mathcal{D}'$  中的奇型广函. 以后会看到,  $\frac{1}{x}$  的各阶导数也在  $\mathcal{D}'$  中. 因此,  $\mathcal{D}'$  也包含许多非局部可积的经典函数. 但奇性太高的函数, 例如  $e^{\frac{1}{x}}, e^{\frac{1}{x^2}}$  等, 则不在  $\mathcal{D}'$  中.

最后考虑急降函数空间 (L. Schwartz  $\mathcal{S}$  空间)  $\mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &= \{ \varphi(x) : \sup_{\alpha, \beta} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, x \in \mathbb{R}^n, \\ &\quad |\alpha|, |\beta| = 0, 1, 2, \dots \} \end{aligned} \quad (14)$$

即  $\mathcal{S}$  中函数  $\varphi$  当  $|x| \rightarrow \infty$  时比  $|x|^{-1}$  的任何正幂更快地趋于零,

$\varphi$  的各阶导数  $\partial^\alpha \varphi$  也具此性质. 故  $\mathcal{S}$  称为急降函数空间,  $\mathcal{S}$  中元  $\varphi$  称为急降函数.  $\mathcal{S}$  中函数列  $\{\varphi_j(x)\}$  的收敛性如下定义(显然,  $\mathcal{S}$  在这种收敛下的完备空间):

$$\varphi_j(x) \rightarrow 0(\mathcal{S}): \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi_j(x)| = 0, \quad (15)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

由此可引进  $\mathcal{S}$  上的连续线性泛函空间  $\mathcal{S}'$ , 即  $\mathcal{S}$  上的广函空间  $\mathcal{S}'$ .  $\mathcal{S}$  上广函当  $|x| \rightarrow \infty$  时仅仅能具幂增率  $O(|x|^k)$ , 故  $\mathcal{S}'$  称为缓增广函空间. 显然有包含关系:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}, \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

$\mathcal{S}$  中不属于  $\mathcal{D}$  的函数有  $e^{-|x|^2}$ ,  $\mathcal{D}'$  中不属于  $\mathcal{S}'$  的广函有  $e^{|x|^2}$ .

### 6.1.2. 广函的基本运算

根据广函定义, 容易把经典函数的一些运算法则推广到广函空间. 以下仅就  $\mathcal{D}'$  考察,  $\mathcal{S}'$  中的情况基本上是类似的, 在有不同之处, 再特别提出.

$\mathcal{D}'$  中任意两个广函  $f$  及  $g$  的和  $f+g$  定义为如下的广函:

$$\langle f+g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

不难看出,  $f+g$  确作成  $\mathcal{D}$  上的连续线性泛函. 特别当  $f$  及  $g$  都是经典的局部  $L$  可积函数时, 和  $f+g$  归为通常的函数和  $f(x)+g(x)$ .

广函  $f$  与数  $a$  的积  $af$  定义为广函:

$$\langle af, \varphi \rangle = a \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

易知这样定义的积  $af$  确为  $\mathcal{D}$  上的连续线性泛函, 且当  $f$  为经典函数  $f(x)$  时, 积  $af$  归为通常的积  $af(x)$ .

结合以上两种运算, 知  $\mathcal{D}'$  以实或复数域作为系数域形成线性空间.

还可定义广函  $f$  与任一无穷可微函数  $a(x) \in \mathcal{E} \equiv C^\infty(\mathbb{R}^n)$  的

积:

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, \bar{a}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (3)$$

这样定义的泛函  $af$  显然是线性的, 尚须核验它的连续性. 为此只须注意当  $\varphi_i \rightarrow 0(\mathcal{D})$  时, 确有  $(\bar{a}\varphi_i) \rightarrow 0(\mathcal{D})$ . 事实上, 由乘积微分运算方面的 Leibniz 法则

$$\partial^\alpha(\bar{a}\varphi) = \sum_{|j|=0}^{|\alpha|} \binom{\alpha}{j} \partial^j \bar{a} \partial^{\alpha-j} \varphi$$

及  $\mathcal{D}$  中收敛性定义, 知上述收敛性成立. 于是线性泛函  $af$  的连续性得到保证. 显然, 当  $f$  为经典的局部  $L$  可积函数  $f(x)$  时, 积  $af$  归为通常的乘积  $af(x)$ .

**注 1** 函数型广函的作用形式 6.1.1(10) 中的复共轭值  $\bar{f}$ , 显然不影响上述三种运算的经典情况. 例如, 和  $f+g$  归为通常的和  $f(x)+g(x)$ , 而不是  $\overline{f(x)} + \overline{g(x)}$ : 因为 6.1.1(10) 只是一种作用关系, 而不是在任一点给出  $\bar{f} + \bar{g}$  的值. 这里我们顺便强调一下: 经典的连续函数由它在其定义域中每点  $x$  处的值确定; 而广函作为连续线性泛函, 则由它作用于空间  $\mathcal{D}$  中每个元  $\varphi$  的值所确定.

**注 2** 对于  $\mathcal{S}'$ , 在由 (3) 定义的积  $af$  中, 还要求  $a(x)$  具性质:

$$a(x) = O(|x|^k), \quad a \in \mathcal{S}', \quad (4)$$

$k$  为某非负整数, 即  $a$  具幂增率. 这个要求是显然的, 因为  $\mathcal{S}'$  中广函只能具幂增率. 具性质 (4) 的函数  $a(x)$ , 称为空间  $\mathcal{S}$  或  $\mathcal{S}'$  上的乘子.

注意, 一般不能定义  $\mathcal{D}'$  中任意两个广函的乘积, 例如,  $\delta \cdot \delta$  一般是没有意义的 (近年来, 物理学界和数学界都以多种方式定义这类乘积). 容易看出,  $\mathcal{D}'$  上具结合性的乘法运算会导致矛盾:

$$\left[ \left( \text{Pv} \frac{1}{x} \right) \cdot x \right] \cdot \delta = 1 \cdot \delta = \delta,$$

$$\text{Pv} \frac{1}{x} \cdot (x \cdot \delta) = \text{Pv} \frac{1}{x} \cdot 0 = 0.$$

这里用到由定义式(3)立即推出的结果  $x\delta=0$ :

$$\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = (x\varphi)|_{x=0} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

**例 1**  $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ .

事实上, 根据定义式(3)有:

$$\begin{aligned} \langle a(x)\delta(x), \varphi(x) \rangle &= \langle \delta(x), \bar{a}(x)\varphi(x) \rangle = \bar{a}(0)\varphi(0) \\ &= \langle a(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

**定义 1**  $\mathcal{D}'$  中广函列  $\{f_i\}$  的极限  $f$  如下理解:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle f_i, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (5)$$

这种借助通常数列收敛性引进的收敛性, 称为弱收敛性; 相应极限称为弱极限. 定语“弱”常被略去. (5)可简记为

$$f_i \rightarrow f(\mathcal{D}'). \quad (6)$$

类似地可定义广函级数  $\sum_i f_i$  的收敛性及  $\mathcal{D}'$  中的弱基本列.

注意列  $\{f_i\} \subset \mathcal{D}'$  的弱极限  $f$  的连续性有待证明.

**定理 1** 若  $\mathcal{D}'$  中广函列  $\{f_i\}$  有弱极限  $f$ , 则  $f \in \mathcal{D}'$ ; 从而  $\mathcal{D}'$  为弱完备空间, 即  $\mathcal{D}'$  中每个弱基本列  $\{f_i\}$  有弱极限  $f \in \mathcal{D}'$ .

**证明**  $f$  显然为线性泛函; 对每个  $\varphi \in \mathcal{D}$ , 有确定的数  $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle f_i, \varphi \rangle$  与  $\varphi$  相对应. 为了证明  $f$  的连续性, 只须核验: 当  $\varphi_i \rightarrow 0(\mathcal{D})$  时, 有  $\langle f, \varphi_i \rangle \rightarrow 0$ . 应用反证法. 设存在列  $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}$ , 使

$$|\langle f, \varphi_i \rangle| \geqslant c > 0, \quad i=1, 2, \dots, \quad (7)$$

且  $\varphi_i \rightarrow 0(\mathcal{D})$ , 即

$$|\partial^\alpha \varphi_i| \leqslant 1/4^i, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots. \quad (8)$$

取  $\psi_i = 2^i \varphi_i \in \mathcal{D}$ , 显然有  $\psi_i \rightarrow 0(\mathcal{D})$ , 但  $|\langle f, \psi_i \rangle| \rightarrow \infty$ . 选  $\{\psi_i\}$  的