数学分析教程

第一卷 第二分册

M. K. 格列本卡
C. И. 諾渥舍諾夫 著

高等教育出版社

数学分析教程 第一卷 M. K. 格列本卡 … 著 高 … 教 计

數學分析教程

第一卷 第二分册

M. K. 格列本卡
C. H. 諾渥舍諾夫 著
楊從仁 譯

高等教育出版社

本書系根据苏俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的格列本卡(М.К. Гребенча)、諾渥舍諾夫(С.И. Новоселов)合著"数学分析教程"卷一(Курс математического анализа, том 1)1951年第三版譯出。原書經苏联高等教育部审定为师范学院数理系教科書。本書專供师范学院数理系一年級及二年級兩年一貫制数学分析教材，或作高等数学課程的参考。

原書分兩卷，中譯本每卷分二个分册出版。

数学分析教程

第一卷 第二分册

М.К. 格列本卡，С.И. 諾渥舍諾夫著

楊从仁譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印訂 新华書店發行

統一書号13010·199 開本850×1168 1/32 印張10 7/16

字數267,000 印數17,501—19,500 定價(6)¥1.10

1954年5月第1版 1959年7月北京第6次印刷

目　錄

第二編　微分學

第三編　積分學

第二編　微分學

第五章　導數

§ 59　曲線的切線

我們試討論一個簡單弧:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

並設這個弧上的點 M 是參數值 t_0 的像,式中 $\alpha<t_0<\beta$。t_0 點的近傍的像是這個曲線上的某一段弧 σ (圖 204)。 現在試看通過 M 點和弧 σ 上的任意一點 $\overline{M}$ 所作的割線。次令 $\bar{\alpha}$ 代表這個割線 $M\overline{M}$ 和 OX 軸的傾角。 每一參數值 t (異於 t_0) 對應曲線上一個確定的點 $\overline{M}$ 並確定了割線 $M\overline{M}$ 的傾角 $\bar{\alpha}$, 這就是說 $\bar{\alpha}(t)$ 是定義在 t_0 點近傍內 $t\neq t_0$ 時的函數(圖 205)。假設 $\lim\limits_{t\to t_0}\bar{\alpha}(t)$ 存在且等於 α。

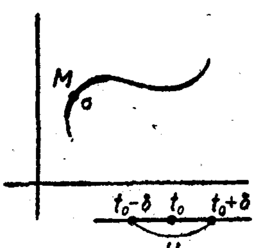

圖 204

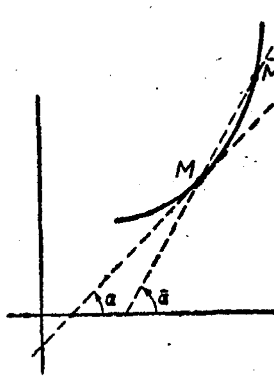

圖 205

定義　通過 M 點且和 OX 軸的傾角是 α 的直線 MT 叫做這個曲

線在 M 點的切線。

過 M 點引直線 MP 和 MQ 依次與 OX 軸構成傾角 $\alpha+\varepsilon$ 和 $\alpha-\varepsilon$。由極限的定義，有這樣的一個近傍 U_{t_0} 存在使屬於這個近傍的每一個 $t\neq t_0$ 所對應的傾角 $\alpha(t)$ 都滿足 $|\alpha(t)-\overline{\alpha}|<\varepsilon$。這就是說，對應的割線 $M\overline{M}$ 位於交角是 2ε 的直線 MP 和 MQ 內(圖 206)。因之，只要參數 t 充分接近 t_0，則對應的割線和直線 MT 的夾角可以任意的小。

由於切線具備這樣的性質，我們就規定說：曲線上 M 點的切線是通過 M 點的割線的極限位置。

由定義可以知道，在曲線上的某一點 M 或無切線存在(若 $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{\alpha}$ 不存在)或只有一個切線存在(由於極限的唯一性定理)。

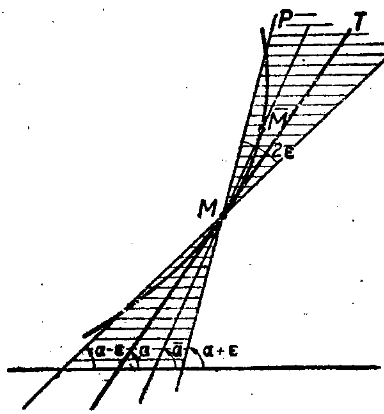

圖 206

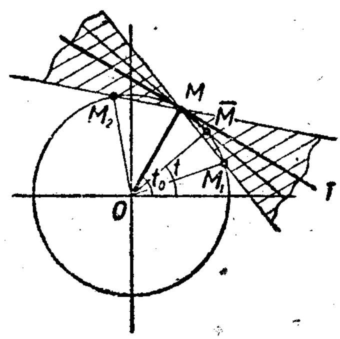

圖 207

注意 切線的存在，甚至於它的位置都和這個曲線的參數表示法無關。事實上，假若我們引入新參數 $t=F(\tau)$，式中的 $F(\tau)$ 是連續單調函數。設 t_0 和 τ_0 是相互對應的參數值。由複合函數的極限的定理，用新參數代表的割線和 OX 軸的傾角的極限是和 $\overline{\alpha}(t)$ 在 t_0 點的極限相同的：

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\overline{\alpha}=\lim_{\tau\to\tau_0}\overline{\alpha}(F(\tau))=\lim_{t\to t_0}\overline{\alpha}(t)=\alpha.$$

例 1. 在直線上任意一點的切線都和這個已知的直線相重合。事實上，每一個割線 $M\overline{M}$ 都和這個直線重合，因此這些割線的極限位置也和這個直線重合。

2. 我們證明：由現在的觀點所定義的切線，就圓周上的一點 M 而論是和初等幾何裏所定義的切線一致。事實上，設 M 是以 O 爲圓心的圓周上的一點。引直線垂直半徑 OM（圖 207）。由初等幾何的定義，這個直線就是圓周在 M 點的切線。我們證明它是過 M 點的割線的極限位置。事實上先作兩個割線 MM_1 和 MM_2 依次和 MT 的夾角都是 ε。並不失掉證明的普遍性，我們不妨假設已知圓的圓心就在坐標原點，由此可以把這個圓的參數方程式寫成

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,$$

式中的參數代表指向圓周上已知點的半徑和橫軸所成的中心角。設 t_0 是和 M 點對應的參數值。再令等角 M_1OM 和 M_2OM 等於 δ，則 M_1 是參數值 $t_0-\delta$ 的像，M_2 是參數值 $t_0+\delta$ 的像。在 M_2MM_1 弧上任取一點 $\overline{M}$，並設 $\overline{M}$ 是參數值 t 的像。和點 M 對應的是割線 $M\overline{M}$，它與 MT 的交角小於 ε。這就是說，MT 是過 M 點的割線的極限位置，也就是說 MT 是圓周上 M 點的切線。

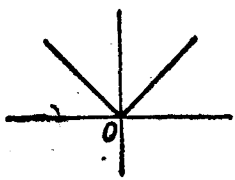

圖 208

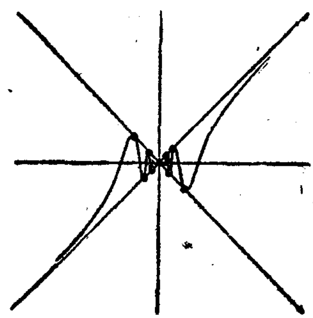

圖 209

3. 設 $y=|x|$（參數 $t=x$）。在 $O(0,0)$ 點切線不存在。事實上，在 $x=0$ 這一點的任意一個近傍都有割線存在而依次和兩個不同的直線 $y=x$（若 $x>0$）和 $y=-x$（若 $x<0$）相重合，因此在 O 點割線的極限位置不存在（圖 208）。

4. 設 $y=x\cos\frac{1}{x}$。在 O 點任意一個近傍都有割線存在，依次與直線

$$y=x\left(\text{對 } x=\frac{1}{2k\pi}\right)\text{ 和 } y=-x\left(\text{對 } x=\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)$$

相重合。因之割線的極限位置在 O 點不存在，也就是說，這個曲線在坐標原點無切線（圖 209）。

單邊切線。設想給定了一個簡單弧:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad 式中\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta。$$

設弧 σ 是 t_0 點的含於開間隔 (α,β) 內的 δ 近傍的像。t_0 點的像 M 把弧 σ 分成兩個弧,兩者之一 σ_+ 是參數值 $t_0\leqslant t<t_0+\delta$ 的像,另一個弧 σ_- 是參數值 $t_0-\delta<t\leqslant t_0$ 的像(圖 210)。由於這個寫像的一一對應性,除 M 點外弧 σ_+ 和弧 σ_- 不含公共點。就 M 點而論,這兩個弧可以看做位置在這個曲線上不同的兩邊。

設 $\overline{M}$ 是弧 σ_+ 上的任意一點,$\overline{\alpha}$ 是割線 $M\overline{M}$ 的傾角。

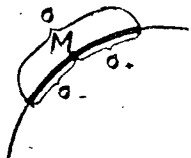

圖 210

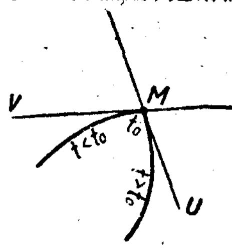

圖 211

若 $\lim\limits_{t\to t_0+}\overline{\alpha}$ 存在且等於 α_+,則以 α_+ 爲傾角的直線 MU 叫做這個曲線在 M 點的右切線(關於已知的參數)。

同理,若 $\lim\limits_{t\to t_0-}\overline{\alpha}$ 存在且等於 α_-,則以 α_- 爲傾角的直線 MV 叫做這個曲線在 M 點的左切線(關於已知的參數)。直線 MU 和 MV 叫做這個曲線在 M 點的單邊切線。

定義 所謂曲線上某一點 M 的單邊切線是指通過 M 點和通過 M 點同一邊的點的割線的極限位置。

若 $\lim\limits_{t\to t_0+}\overline{\alpha}=\lim\limits_{t\to t_0-}\overline{\alpha}$,則 $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{\alpha}$ 存在。因之若單邊切線重合,則在已知點的切線存在。反之當然也成立。單邊切線不相等的點叫做角點。在角點上切線不存在。

注意 《右》切線和《左》切線的概念是和參數的選擇有關的,例如把參數 t 換成 $-t$,則《右》切線變成《左》切線,《左》切線變成《右》切線。

例 1. 曲線 $y=|x|$(參數 $t=x$)在 $O(0,0)$ 點有右切線 $y=x$ 和左切線 $y=-x$。坐標原點是角點。

2. $y=x\sin\frac{1}{x}$。

這個曲線在 $O(0,0)$ 點無單邊切線。

因爲在 $x=0$ 的任意一個近傍內有變數值 $x>0$ 存在而使直線 $y=x$ 和 $y=-x$ 都是割線，這就是說，右切線在 O 點不存在，同理可以證明左切線也不存在。

§ 60 切線的斜率

現在我們試研究一個圖形在以 $x=a$ 爲橫坐標的已知點 M 有切線的函數 $f(x)$。設這個切線 MT 不與横軸成垂直。次令 ε 是小於 $\frac{\pi}{2}$ 的任意一個正數。由此有這樣一個正數 δ 存在使過點 M（以 a 爲横坐標）和 a 點的 δ 近傍內任一點 x 所對應的點 $\bar{M}$（以 x 爲横坐標）的割線與 a 點的切線的交角的絶對值小於 ε。令切線 MT 和横軸的傾角是 $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$（圖 212），並令割線 $M\bar{M}$ 的傾角是 $\bar{\alpha}(x)$。因之 $|x-a|<\delta$ 時便有
$$|\bar{\alpha}(x)-\alpha|<\varepsilon,$$
換句話說 $\lim\limits_{x\to a}\bar{\alpha}(x)=\alpha$。

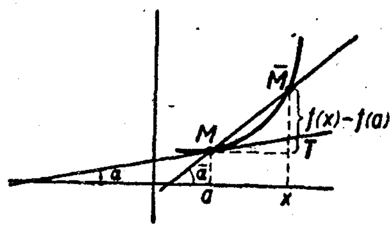

圖 212

因爲 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，所以對於充分小的 ε 傾角 $\bar{\alpha}(x)$ 也異於 $\frac{\pi}{2}$。計算割線 $M\bar{M}$ 的斜率我們得
$$\operatorname{tg}\bar{\alpha}(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

由於正切函數的連續性我們有
$$\lim_{x\to a}\operatorname{tg}\bar{\alpha}(x)=\operatorname{tg}\alpha.$$

因之，只要連續函數 $f(x)$ 的圖形在 a 點有切線且不與横軸成垂直，則在 a 點的切線的斜率等於
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\operatorname{tg}\alpha.$$

§ 61 導數

給定了定義在 $x=a$ 點近傍的函數 $f(x)$。

定義　函數在 a 點(有限點)的增量和自變數的增量的商在 a 點的極限值叫做函數 $f(x)$ 在 a 點的導數，換句話說，即是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

函數 $f(x)$ 在 a 點的導數用記號 $f'(a)$ 代表:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 不存在，則函數在 a 點無導數。

若 a 點不是 $f(x)$ 的定義域的聚點，則 $f'(a)$ 沒有意義。

命 $x-a=h$，則 $x=a+h$，由此

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

已知函數 $f(x)$ 有導數的諸點構成一個集合 $\mathfrak{M}$。每一 $x\in\mathfrak{M}$ 對應一個導數值 $f'(x)$，因之 $f'(x)$ 是定義在集合 $\mathfrak{M}$ 上的函數。這個函數叫做函數 $f(x)$ 的導數。根據定義有

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}.$$

若函數在某一數集合的每一點都有導數，我們就說這個函數在這個集合上有導數。因此，我們可以說一個函數在閉間隔上，開間隔內，在某點近傍內有導數等等。

求導數的運算叫做微分法。

例 1.　函數 $\sin x$ 在任意一點 a 都有導數且等於 $\cos a$。事實上，

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim\cos\frac{x+a}{2}\cdot E=\cos a.$$

我們讓讀者自己去證明：函數 $\cos x$ 在任意一點 a 都有導數且等於 $-\sin a$。

2\. $f(x)=x^3$。在開間隔 $(-\infty,\infty)$ 內我們有

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{X^3-x^3}{X-x}=\lim(X^2+Xx+x^2)=3x^2.$$

3\. $f(x)=\sqrt{x}$。在開間隔 $(0,\infty)$ 內我們有

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{\sqrt{X}-\sqrt{x}}{X-x}=\lim\frac{1}{\sqrt{X}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4\. $f(x)=\frac{1}{x}$。在開間隔 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 內我們有

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{\frac{1}{X}-\frac{1}{x}}{X-x}=\lim\left(\frac{-1}{Xx}\right)=-\frac{1}{x^2}.$$

5\. 設 $f(x)=|x|$。

我們有
$$f(x)=\begin{cases}x & (x>0)\\ -x & (x<0),\end{cases}$$

由此（讀者容易證明）

$$f'(x)=\begin{cases}1 & (\text{在開間隔 }(0,\infty)\text{ 內})\\ -1 & (\text{在開間隔 }(-\infty,0)\text{ 內})。\end{cases}$$

在 0 點導數不存在，因為

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\frac{|x|}{x}$$

不存在。

6\. 函數 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在 0 點無導數。因為

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac{1}{x}.$$

在 0 點無極限。

定理　若函數 $f(x)$ 在 a 點有導數，則

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\omega(x)(x-a) \tag{1}$$

式中 $\omega(x)$ 代表一個在 a 點連續的函數且在 a 點的值等於零：

$$\lim_{x\to a}\omega(x)=\omega(a)=0.$$

證明： 設
$$\omega(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\quad 若 x\neq a$$
$$\omega(x)=0\qquad 若 x=a.$$

我們有

$$\lim_{x\to a}\omega(x)=\lim\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right)=f'(a)-f'(a)=0.$$

由函數 $\omega(x)$ 的定義可知等式 (1) 成立，再由上述的證明有

$$\lim_{x\to a}\omega(x)=0=\omega(a).$$

推論　若函數 $f(x)$ 在 a 點有導數，則 $f(x)$ 在 a 點連續。

事實上由等式 (1) 可得

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=f'(a)\lim(x-a)+\lim\omega(x)\lim(x-a)=0,$$

換句話說
$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

上述推論的反定理不成立。換句話說，連續函數在某已知點不一定有導數。例如函數 $|x|$ 在 0 點連續，但在這一點沒有導數(參考例 5)。

我們可以構造這樣的函數的例子：在某一已知間隔內連續，但在這個間隔內的任意一點都沒有導數。

注意　在 a 點有導數因而在 a 點連續的函數可能在 a 點的任意一個近傍內都是不連續的。例如由下述對應定律定義在所有實數的集合上函數：

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (\text{若 } x \text{ 是有理數}) \\ -x^2 & (\text{若 } x \text{ 是無理數}), \end{cases}$$

僅在一點 $x=0$ 連續。我們容易證明 $f'(0)$ 存在。事實上，我們有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} x & (\text{若 } x \text{ 是有理數}) \\ -x & (\text{若 } x \text{ 是無理數}), \end{cases}$$

因此
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即是說
$$f'(0)=0.$$

§ 62　導數的幾何解釋

根據 § 60，若連續函數 $f(x)$ 的圖形在 $M(a,f(a))$ 點有切線且不與橫軸成垂直，則切線 MT 的斜率等於導數 $f'(a)$。我們容易證明這一

事實的反定理也成立。

定理 若函數 $f(x)$ 在 a 點有導數，則 $f(x)$ 的圖形在 $M(a, f(a))$ 點有切線 MT，且 MT 的斜率就等於導數 $f'(a)$。

證明：由定理所設的條件可知割線 $M\overline{M}$（仍用 § 60 所使用的記號）的斜率的極限存在：

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} \overline{\alpha}(x) = \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$

但在這個時候（由於反正切函數的連續性）傾角

$$\overline{\alpha}(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

的極限也存在。我們有

$$\lim_{x\to a} \overline{\alpha}(x) = \lim \operatorname{arc\,tg} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \operatorname{arc\,tg} f'(a).$$

因此與橫坐標軸構成傾角

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} f'(a)$$

的直線 MT 是割線 $M\overline{M}$ 的極限位置，換句話說，MT 是圖形上 M 點的切線。斜率等於

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(a).$$

綜合以上就是我們所要證明的。

例 1. $f(x) = \sin x$,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

這就是說，正弦曲線在 $O(0,0)$ 的切線與橫坐標軸所構成的角度等於 $\frac{\pi}{4}$ (圖 213)。

2. $f(x) = x^2 + px + q$,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(x^2+px+q)-(a^2+pa+q)}{x-a} = \lim \frac{(x-a)(x+a)+p(x-a)}{x-a} =$$

$$= \lim (x+a+p) = 2a+p.$$

在橫坐標是 $-\frac{p}{2}$ 的點我們有 $f'\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$，因此在這一點的切線和橫軸平行 (圖 214)。

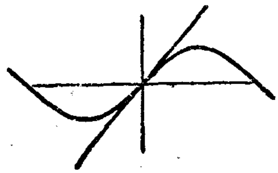

圖 213

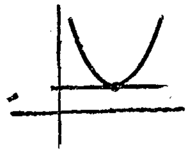

圖 214

§ 63 導數的力學解釋

設想一個作等速運動的質點。若在時間 t 內經過距離 s，則商 $\frac{s}{t}$ 是常數——運動速度。現在試考察一個不作等速運動的質點。設 $s(t)$ 是在 t 時刻內所經的距離。我們試考察某一時刻 t 和它的一個臨近時刻 t_0。在時間間隔 t_0 到 t 內質點所經的距離等於 $s(t)-s(t_0)$。我們叫商 $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ 做時間間隔 t 到 t_0 內的平均速度。一般的說，這個商不是常數。我們叫極限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

做 t_0 時刻的瞬時速度。

因之在 t_0 時刻的瞬時速度是函數 $s(t)$ 在 t_0 點的導數。

§ 64 關於導數的定理

具有導數的函數的運算的定理。在以下的諸定理中，同時討論兩個或數個函數 $f_1(x)$，$f_2(x)$，……，$f_n(x)$ 時我們常假設：

1° 每一個函數在已知點 x 都有導數，

2° x 是同時被討論的已知函數的變數值集合的聚點。

定理 I 有導數的函數的平直組合：

$$F(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)$$

也有導數且有

$$F'(x)=c_1f'_1(x)+c_2f'_2(x)+\cdots+c_nf'_n(x).$$