



数学分析教程

第一卷 第二分册

M. E. 格列本卡 著
C. П. 諾渥舍諾夫

高等教育出版社



數 學 分 析 教 程

第一卷 第二分冊

M. K. 格 列 本 卡 著
C. H. 諾 渥 舍 諾 夫
楊 從 仁 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根據蘇俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的格列本卡
(М. К. Гребенча)、諾溫舍諾夫(С. И. Новоселов)合著“數學分析講
程”卷一(Курс математического анализа, том 1) 1951年第三
版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為師範學院數理系教科書。本
書專供師範學院數理系一年級及二年級兩年一貫制數學分析教材，
或作高等數學課程的參考。

原書分兩卷，中譯本每卷分二個分冊出版。

數 學 分 析 教 程

第一卷 第二分冊

М. К. 格列本卡, С. И. 諾溫舍諾夫著

楊從仁譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內大街27號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第084號)

京華印書館印訂 新華書店發行

統一書號 19010·192 開本 850×1198¹/₃₂ 印張 12²/₃

字數 287,000 印數 17,501—17,506 定價 (6) 洋 1.10

1954年5月第1版 1959年2月北京第6次印刷

目 錄

第二編 微分學

第五章 導數	219
§ 59 曲線的切線	219
§ 60 切線的斜率	223
§ 61 導數	224
§ 62 導數的幾何解釋	226
§ 63 導數的力學解釋	228
§ 64 關於導數的定理	228
§ 65 初等函數的導數	235
§ 66 可微分函數	243
§ 67 微分	245
§ 68 最佳局部近似的定理	247
§ 69 萊布尼茲記號	248
§ 70 單邊導數	249
§ 71 無限導數	251
§ 72 導數不連續的函數的例子	254
§ 73 由參數代表的函數的微分法	259
§ 74 在切點的向量半徑與切線的夾角	262
§ 75 高次導數	263
§ 76 複合函數的高次導數	266
§ 77 萊布尼茲公式	267
§ 78 由參數代表的函數的高次導數	270
§ 79 反函數的高次導數	271
§ 80 微分式的變換	272

第六章	微分學基本定理	277
§ 81	基本預備定理	277
§ 82	洛爾定理	279
§ 83	拉格朗日定理	283
§ 84	拉格朗日公式	285
§ 85	拉格朗日定理的推論	286
§ 86	勾股定理	291
§ 87	達布定理	293
§ 88	導數的不連續點	294
§ 89	羅皮塔爾規則	296
第七章	微分學對函數研究的應用	303
§ 90	單調函數	303
§ 91	關於不等式的定理	307
§ 92	函數的極大值和極小值	308
§ 93	局部極值	310
§ 94	局部極值的存在判別法	311
§ 95	可微分函數的局部極值求法	316
§ 96	不可微分函數的局部極值	319
§ 97	全極值求法	322
§ 98	上凹及下凹, 扭轉點	328
§ 99	函數的討論及構圖法	337
第八章	泰勒公式	345
§ 100	基本預備定理	345
§ 101	泰勒多項式	346
§ 102	泰勒公式及其剩餘項	349
§ 103	初等函數的泰勒公式	353
§ 104	最佳局部近似的定理	356
§ 105	泰勒公式對函數研究的應用	358
§ 106	對近似計算的應用	361

第三編 積分學

第九章 原函數的求法	365
§ 107 不定積分	363
§ 108 直接積分法	367
§ 109 分解積分法	370
§ 110 置換積分法	372
§ 111 部份積分法	373
§ 112 有限形式積分法	377
§ 113 簡單有理函數的積分法	378
§ 114 有理函數的初等分式分解法	382
§ 115 有理函數積分法	393
§ 116 無理函數積分法	395
§ 117 三角函數積分法	403
§ 118 三角置換法及雙曲線置換法	413
§ 119 某些超越函數的積分法	414
§ 120 未定係數法	417
第十章 定積分	421
§ 121 導出定積分概念的問題	421
§ 122 閉間隔的分割	424
§ 123 上和及下和	426
§ 124 積分和	429
§ 125 積分和的極限	431
§ 126 上和及下和的極限的定理	433
§ 127 可積分條件	435
§ 128 可積分函數類	436
§ 129 積分概念的擴張	447
§ 130 牛頓-萊布尼茲公式	448
§ 131 關於可積分函數的運算定理	451

§ 132	積分的可加性	454
§ 133	基本不等式	457
§ 134	平均值定理	462
§ 135	積分是上限的連續函數	464
§ 136	第二平均值定理	466
§ 137	積分法及原函數的求法	469
§ 138	置換積分法	472
§ 139	部份積分法	476
§ 140	置換積分法及部份積分法的應用例	477
§ 141	瓦里斯公式	480
§ 142	積分是可加的閉間隔函數	481
第十一章 積分學的應用		485
§ 143	平面圖形的面積計算	485
§ 144	旋轉體的體積的計算	489
§ 145	曲線的弧長	492
§ 146	用積分計算弧長	499
§ 147	弧長作參數	504
§ 148	旋轉體的曲面積	506
§ 149	積分學的物理應用	508
§ 150	定積分的近似計算法	511
第十二章 瑕積分		518
§ 151	簡單瑕積分	518
§ 152	關於簡單瑕積分的定理	522
§ 153	具有幾個特異點的瑕積分	529
§ 154	牛頓-萊布尼茲公式的擴張	532

第二編 微分學

第五章 導數

§ 59 曲線的切線

我們試討論一個簡單弧：

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

並設這個弧上的點 M 是參數值 t_0 的像，式中 $\alpha < t_0 < \beta$ 。 t_0 點的近傍的像是這個曲線上的某一段弧 σ (圖 204)。現在試看通過 M 點和弧 σ 上的任意一點 \bar{M} 所作的割線。次令 $\bar{\alpha}$ 代表這個割線 $M\bar{M}$ 和 OX 軸的傾角。每一參數值 t (異於 t_0) 對應曲線上一個確定的點 \bar{M} 並確定了割線 $M\bar{M}$ 的傾角 $\bar{\alpha}$ ，這就是說 $\bar{\alpha}(t)$ 是定義在 t_0 點近傍內 $t \neq t_0$ 時的函數 (圖 205)。假設 $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{\alpha}(t)$ 存在且等於 α 。

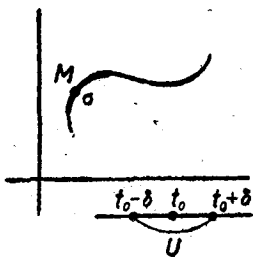


圖 204

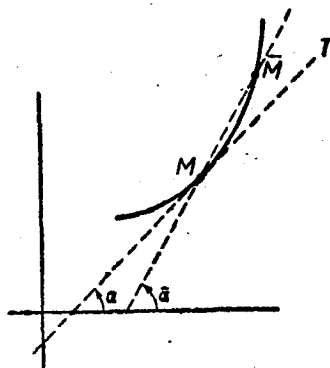


圖 205

定義 通過 M 點且和 OX 軸的傾角是 α 的直線 MT 叫做這個曲

線在 M 點的切線。

過 M 點引直線 MP 和 MQ 依次與 OX 軸構成傾角 $\alpha + \varepsilon$ 和 $\alpha - \varepsilon$ 。由極限的定義，有這樣的一個近傍 U_{t_0} 存在使屬於這個近傍的每一個 $t \in U_{t_0}$ 所對應的傾角 $\alpha(t)$ 都滿足 $|\alpha(t) - \bar{\alpha}| < \varepsilon$ 。這就是說，對應的割線 $M\bar{M}$ 位於交角是 2ε 的直線 MP 和 MQ 內（圖 206）。因之，只要參數 t 充分接近 t_0 ，則對應的割線和直線 MT 的夾角可以任意的小。

由於切線具備這樣的性質，我們就規定說：曲線上 M 點的切線是通過 M 點的割線的極限位置。

由定義可以知道，在曲線上的某一點 M 或無切線存在（若 $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{\alpha}$ 不存在）或只有一個切線存在（由於極限的唯一性定理）。

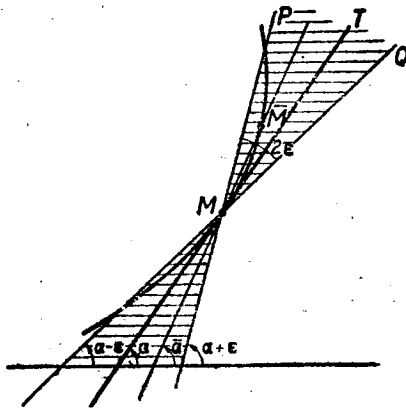


圖 206

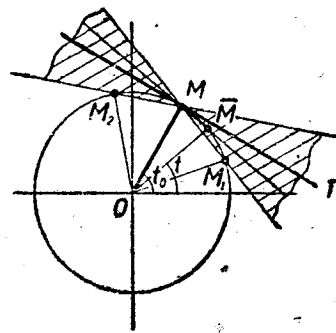


圖 207

注意 切線的存在，甚至於它的位置都和這個曲線的參數表示法無關。事實上，假若我們引入新參數 $t = F(\tau)$ ，式中的 $F(\tau)$ 是連續單調函數。設 t_0 和 τ_0 是相互對應的參數值。由複合函數的極限的定理，用新參數代表的割線和 OX 軸的傾角的極限是和 $\bar{\alpha}(t)$ 在 t_0 點的極限相同的：

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \bar{\alpha} = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \bar{\alpha}(F(\tau)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{\alpha}(t) = \alpha.$$

例 1. 在直線上任意一點的切線都和這個已知的直線相重合。事實上，每一個割線 MM 都和這個直線重合，因此這些割線的極限位置也和這個直線重合。

2. 我們證明：由現在的點所定義的切線，就圓周上的一點 M 而論是和初等幾何裏所定義的切線一致。事實上，設 M 是以 O 為圓心的圓周上的一點。引直線垂直半徑 OM (圖 207)。由初等幾何的定義，這個直線就是圓周在 M 點的切線。我們證明它是過 M 點的割線的極限位置。事實上先作兩個割線 MM_1 和 MM_2 依次和 MT 的夾角都是 ϵ 。並不失證明之普遍性，我們不妨假設已知圓的圓心就在坐標原點，由此可以把這個圓的參數方程式寫成

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

式中的參數代表指向圓周上已知點的半徑和橫軸所成的中心角。設 t_0 是和 M 點對應的參數值。再令等角 M_1OM 和 M_2OM 等於 δ ，則 M_1 是參數值 $t_0 - \delta$ 的像， M_2 是參數值 $t_0 + \delta$ 的像。在 M_2MM_1 弧上任取一點 \bar{M} ，並設 \bar{M} 是參數值 t 的像。和點 M 對應的是割線 MM ，它與 MT 的夾角小於 ϵ 。這就是說， MT 是過 M 點的割線的極限位置，也就是說 MT 是圓周上 M 點的切線。

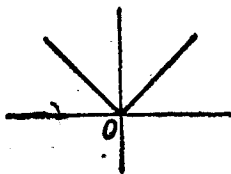


圖 208

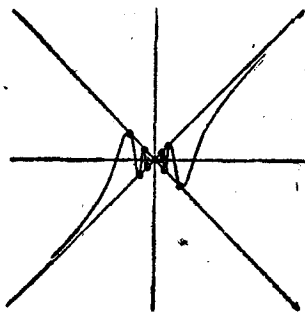


圖 209

3. 設 $y = |x|$ (參數 $t = x$)。在 $O(0,0)$ 點切線不存在。事實上，在 $x=0$ 這一點的任意一個近傍都有割線存在而依次和兩個不同的直線 $y = x$ (若 $x > 0$) 和 $y = -x$ (若 $x < 0$) 相重合，因此在 O 點割線的極限位置不存在 (圖 208)。

4. 設 $y = x \cos \frac{1}{x}$ 。在 O 點任意一個近傍都有割線存在，依次與直線

$$y = x \left(\text{對 } x = \frac{1}{2k\pi} \right) \text{ 和 } y = -x \left(\text{對 } x = \frac{1}{(2k+1)\pi} \right)$$

相重合。因之割線的極限位置在 O 點不存在，也就是說，這個曲線在坐標原點無切線 (圖 209)。

單邊切線。設想給定了一個簡單弧：

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad \text{式中 } \alpha \leq t \leq \beta.$$

設弧 σ 是 t_0 點的含於開間隔 (α, β) 內的 δ 近傍的像。 t_0 點的像 M 把弧 σ 分成兩個弧，兩者之一 σ_+ 是參數值 $t_0 \leq t < t_0 + \delta$ 的像，另一個弧 σ_- 是參數值 $t_0 - \delta < t \leq t_0$ 的像（圖 210）。由於這個寫像的一一對應性 除 M 點外弧 σ_+ 和弧 σ_- 不含公共點。就 M 點而論，這兩個弧可以看做位置在這個曲線上不同的兩邊。

設 \bar{M} 是弧 σ_+ 上的任意一點， α 是割線 $M\bar{M}$ 的傾角。

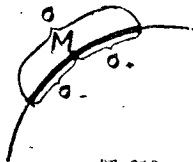


圖 210

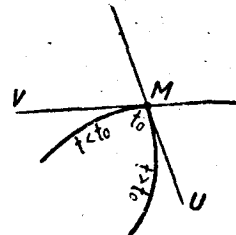


圖 211

若 $\lim_{t \rightarrow t_0+} \alpha$ 存在且等於 α_+ ，則以 α_+ 為傾角的直線 MU 叫做這個曲線在 M 點的右切線（關於已知的參數）。

同理，若 $\lim_{t \rightarrow t_0-} \alpha$ 存在且等於 α_- ，則以 α_- 為傾角的直線 MV 叫做這個曲線在 M 點的左切線（關於已知的參數）。直線 MU 和 MV 叫做這個曲線在 M 點的單邊切線。

定義 所謂曲線上某一點 M 的單邊切線是指通過 M 點和通過 M 點同一邊的點的割線的極限位置。

若 $\lim_{t \rightarrow t_0+} \alpha = \lim_{t \rightarrow t_0-} \alpha$ ，則 $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha$ 存在。因之若單邊切線重合，則在已知點的切線存在。反之當然也成立。單邊切線不相等的點叫做角點。在角點上切線不存在。

注意 «右»切線和«左»切線的概念是和參數的選擇有關的，例如把參數 t 換成 $-t$ ，則«右»切線變成«左»切線，«左»切線變成«右»切線。

例 1. 曲線 $y=|x|$ (參數 $t=x$) 在 $O(0,0)$ 點有右切線 $y=x$ 和左切線 $y=-x$ 。坐標原點是角點。

$$2. y = x \sin \frac{1}{x}.$$

這個曲線在 $O(0,0)$ 點無單邊切線。

因為在 $x=0$ 的任意一個近傍內有變數值 $x>0$ 存在而使直線 $y=x$ 和 $y=-x$ 都是割線，這就是說，右切線在 O 點不存在，同理可以證明左切線也不存在。

§ 60 切線的斜率

現在我們試研究一個圖形在以 $x=a$ 為橫坐標的已知點 M 有切線的函數 $f(x)$ 。設這個切線 MT 不與橫軸成垂直。次令 ε 是小於 $\frac{\pi}{2}$ 的任意一個正數。由此有這樣一個正數 δ 存在使過點 M (以 a 為橫坐標) 和 a 點的 δ 近傍內任一點 x 所對應的點 \bar{M} (以 x 為橫坐標) 的割線與 a 點的切線的交角的絕對值小於 ε 。令切線 MT 和橫軸的傾角是 α ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) (圖 212)，並令割線 $M\bar{M}$ 的傾角是 $\bar{\alpha}(x)$ 。因之 $|x-a| < \delta$ 時便有

$$|\bar{\alpha}(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

換句話說 $\lim_{x \rightarrow a} \bar{\alpha}(x) = \alpha$ 。

因為 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ，所以對於充分小的 ε 傾角 $\bar{\alpha}(x)$ 也異於 $\frac{\pi}{2}$ 。計算割線 $M\bar{M}$ 的斜率我們得

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

由於正切函數的連續性我們有

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} \bar{\alpha}(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

因之，只要連續函數 $f(x)$ 的圖形在 a 點有切線且不與橫軸成垂直，則在 a 點的切線的斜率等於

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \operatorname{tg} \alpha.$$

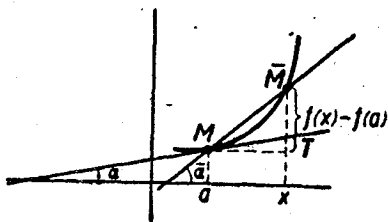


圖 212

§ 61 導數

給定了定義在 $x=a$ 點近傍的函數 $f(x)$ 。

定義 函數在 a 點(有限點)的增量和自變數的增量的商在 a 點的極限值叫做函數 $f(x)$ 在 a 點的導數, 換句話說, 即是

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

函數 $f(x)$ 在 a 點的導數用記號 $f'(a)$ 代表:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 不存在, 則函數在 a 點無導數。

若 a 點不是 $f(x)$ 的定義域的聚點, 則 $f'(a)$ 沒有意義。

令 $x - a = h$, 則 $x = a + h$, 由此

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

已知函數 $f(x)$ 有導數的諸點構成一個集合 \mathfrak{M} , 每一 $x \in \mathfrak{M}$ 對應一個導數值 $f'(x)$, 因之 $f'(x)$ 是定義在集合 \mathfrak{M} 上的函數。這個函數叫做函數 $f(x)$ 的導數。根據定義有

$$f'(x) = \lim_{X \rightarrow x} \frac{f(X) - f(x)}{X - x}.$$

若函數在某一數集合的每一點都有導數, 我們就說這個函數在這個集合上有導數。因此, 我們可以說一個函數在閉間隔上, 開間隔內, 在某點近傍內有導數等等。

求導數的運算叫做微分法。

例 1. 函數 $\sin x$ 在任意一點 a 都有導數且等於 $\cos a$ 。事實上,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a.$$

我們讓讀者自己去證明：函數 $\cos x$ 在任意一點 a 都有導數且等於 $-\sin a$ 。

2. $f(x) = x^3$ 。在開間隔 $(-\infty, \infty)$ 內我們有

$$f'(x) = \lim_{X \rightarrow x} \frac{X^3 - x^3}{X - x} = \lim (X^2 + Xx + x^2) = 3x^2.$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ 。在開間隔 $(0, \infty)$ 內我們有

$$f'(x) = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{X - x} = \lim \frac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ 。在開間隔 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 內我們有

$$f'(x) = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\frac{1}{X} - \frac{1}{x}}{X - x} = \lim \left(\frac{-1}{Xx} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

5. 設 $f(x) = |x|$ 。

我們有

$$f(x) = \begin{cases} x & (x > 0) \\ -x & (x < 0), \end{cases}$$

由此(讀者容易證明)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & (\text{在開間隔 } (0, \infty) \text{ 內}) \\ -1 & (\text{在開間隔 } (-\infty, 0) \text{ 內}). \end{cases}$$

在 0 點導數不存在，因為

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim \frac{|x|}{x}$$

不存在。

6. 函數 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 在 0 點無導數。因為

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}.$$

在 0 點無極限。

定理 若函數 $f(x)$ 在 a 點有導數，則

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \omega(x)(x - a) \quad (1)$$

式中 $\omega(x)$ 代表一個在 a 點連續的函數且在 a 點的值等於零：

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \omega(a) = 0.$$

證明：設 $\omega(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ 若 $x \neq a$

$$\omega(x) = 0 \quad \text{若 } x = a.$$

我們有

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

由函數 $\omega(x)$ 的定義可知等式 (1) 成立, 再由上述的證明有

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0 = \omega(a).$$

推論 若函數 $f(x)$ 在 a 點有導數, 則 $f(x)$ 在 a 點連續。

事實上由等式 (1) 可得

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = f'(a) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0,$$

換句話說

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

上述推論的逆定理不成立。換句話說, 連續函數在某已知點不一定有導數。例如函數 $|x|$ 在 0 點連續, 但在這一點沒有導數(參考例 5)。

我們可以構造這樣的函數的例子: 在某一已知間隔內連續, 但在這個間隔內的任意一點都沒有導數。

注意 在 a 點有導數因而在 a 點連續的函數可能在 a 點的任意一個近傍內都是不連續的。例如由下述對應定律定義在所有實數的集合上函數:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\text{若 } x \text{ 是有理數}) \\ -x^2 & (\text{若 } x \text{ 是無理數}), \end{cases}$$

僅在一點 $x=0$ 連續。我們容易證明 $f'(0)$ 存在。事實上, 我們有

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x & (\text{若 } x \text{ 是有理數}) \\ -x & (\text{若 } x \text{ 是無理數}), \end{cases}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即是說

$$f'(0) = 0.$$

§ 62 導數的幾何解釋

根據 § 60, 若連續函數 $f(x)$ 的圖形在 $M(a, f(a))$ 點有切線且不與橫軸成垂直, 則切線 MT 的斜率等於導數 $f'(a)$ 。我們容易證明這一

事實的反定理也成立。

定理 若函數 $f(x)$ 在 a 點有導數，則 $f(x)$ 的圖形在 $M(a, f(a))$ 點有切線 MT ，且 MT 的斜率就等於導數 $f'(a)$ 。

證明：由定理所設的條件可知割線 $M\bar{M}$ （仍用 § 60 所使用的記號）的斜率的極限存在：

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} \bar{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

但在這個時候（由於反正切函數的連續性）傾角

$$\bar{\alpha}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

的極限也存在。我們有

$$\lim_{x \rightarrow a} \bar{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(a).$$

因此與橫坐標軸構成傾角

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(a)$$

的直線 MT 是割線 $M\bar{M}$ 的極限位置，換句話說， MT 是圖形上 M 點的切線。斜率等於

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(a).$$

綜合以上就是我們所要證明的。

例 1. $f(x) = \sin x$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

這就是說，正弦曲線在 $O(0, 0)$ 的切線與橫坐標軸所構成的角度等於 $\frac{\pi}{4}$ （圖 213）。

2. $f(x) = x^2 + px + q$,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + px + q) - (a^2 + pa + q)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a) + p(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x+a+p) = 2a+p. \end{aligned}$$

在橫坐標是 $-\frac{p}{2}$ 的點我們有 $f'\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$ ，因此在這一點的切線和橫軸平行（圖 214）。



圖 213

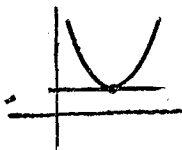


圖 214

§ 63 導數的力學解釋

設想一個作等速運動的質點。若在時間 t 內經過距離 s ，則商 $\frac{s}{t}$ 是常數——運動速度。現在試考察一個不作等速運動的質點。設 $s(t)$ 是在 t 時刻內所經的距離。我們試考察某一時刻 t 和它的一個隣近時刻 t_0 。在時間間隔 t_0 到 t 內質點所經的距離等於 $s(t) - s(t_0)$ 。我們叫商 $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ 做時間間隔 t 到 t_0 內的平均速度。一般的說，這個商不是常數。我們叫極限

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

做 t_0 時刻的瞬時速度。

因之在 t_0 時刻的瞬時速度是函數 $s(t)$ 在 t_0 點的導數。

§ 64 關於導數的定理

具有導數的函數的運算的定理。 在以下的諸定理中，同時討論兩個或數個函數 $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_n(x)$ 時我們常假設：

- 1° 每一個函數在已知點 x 都有導數，
- 2° x 是同時被討論的已知函數的變數值集合的聚點。

定理 I 有導數的函數的平直組合：

$$F(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

也有導數且有

$$F'(x) = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x).$$