

几何王国导游

(初中三年级用)

初中数学课外读物

几何王国导游

（初中三年级用）

王 白 水

湖 北 少 年 儿 童 出 版 社

几何王国导游

(初中三年级用)

王白水

*

湖北少年儿童出版社出版 湖北省新华书店发行

武汉市江汉印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 4.5印张 93,000字

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印数：1-116,400

统一书号：7305·106 定价：0.47元

内 容 提 要

这是一本初三几何课程的辅助读物。

本书运用生动活泼的语言，形象地介绍了比较枯燥的数学知识。它以导游的形式，引导读者去几何王国探幽揽胜，去领略精美的几何结构的无穷奥秘，去欣赏几何王国的绮丽风光。书中详尽介绍的22个风景群落，又恰恰是初三几何课本中的重点和难点内容，使得读者能在轻松愉快的气氛中，加深对这些内容的理解。

本书的另一个特点是贯彻了数形结合的原则。力图通过用数量关系论证位置关系，以及借助位置关系把握有关几何元素的数量关系，来探索初中阶段几何与代数早期综合的基本途径，加强对学生思维能力的训练。

书中安排了一定数量的练习题，便于读者巩固和复习所学的知识，进一步提高分析问题和解决问题的能力。

目 录

楔子.....	(1)
一 在新的起点上	
——从全等到相似.....	(3)
二 通向相似形的船和桥	
——比例变形和比例的基本性质.....	(9)
三 再谈通向相似形的船和桥	
——合分比定理和它的应用.....	(14)
四 三谈通向相似形的船和桥	
——等比定理和它的应用.....	(18)
五 相似形的奠基石	
——平行线判定定理.....	(24)
六 在数形结合的道路上	
——三角形内角平分线性质的定理说明了什么... (30)	
七 红花虽好，还得绿叶扶持	
——相似形和它的应用.....	(36)
八 再谈相似形园林中的丘壑美	
——关于直角三角形的比例线段.....	(43)
九 你知道倍立方问题吗	
——关于几何作图中的代数方法.....	(48)
十 还是要发挥“形”的作用	
——从相似到位似.....	(56)

十一	再谈数与形的结合	
	——相似变换杂谈	(63)
十二	又一个新的领域	
	——圆的基本概念	(70)
十三	又一类数形结合的讨论方法	
	——从直线和圆的相关位置谈起	(74)
十四	怎样确定一个圆	
	——在动点运动的过程中寻找规律	(78)
十五	量角器为什么是半圆形的	
	——关于角与弧的度量及其它	(84)
十六	正弦定理与圆	
	——再谈三角法证几何题	(91)
十七	又一类重要的比例线段	
	——从运动的角度看圆幂定理	(98)
十八	沟通直线形和圆的金色桥梁	
	——四点共圆及其应用	(104)
十九	你会画五角星吗	
	——关于等分圆问题	(110)
二十	$\pi = 3.1416?$	
	——关于圆周率的一些问题	(115)
二一	为什么说“白马非马”	
	——漫谈数学命题	(121)
二二	从黄道吉日谈起	
	——漫谈轨迹问题	(127)
二三	并非结束的结束语	(133)

楔 子

……科学是到处为家的——不过任何
不播种的地方，它不会获得丰收。

——赫尔岑

新学年快开始了。小贝和小克在一块商量着，怎样安排好初中阶段最后一年的学习。

两个数学迷商量的结果还是老办法，周末找找谷老师，请谷老师根据他们的学习进度，有针对性地作一些具体的指导。他们知道，这位退休的老教师是最喜欢和孩子们谈数学的。

果然，谷老师很爽快地答应了。几十个周末就是在这种没有主题而又有主题的情况下，谈过来了。谷老师谈得比较杂，有时也似乎扯得很远，但归根到底，都和初三几何课程有关。他非常风趣地说：“两年来，你们一直在几何王国漫游，我算是又当了一年义务的导游员。在旅游途中，有人导游和没有人导游，情况也许不太一样。我虽然不敢保证你们‘一日看遍长安花’，处处都看得那么细致、那么深刻、那么具体，但是，在你们足迹所到之处，至少看到了一些主要的风景区和主要的风景点。”

小贝和小克也不愧是认真好学的“游客”，谷老师的每

一次谈话，他们都认真地作了详尽的纪录，而且他们并不保守，常常围绕纪录中提出的问题，和同学们展开讨论。慢慢地，这本纪录在他们的同学中间传开了。

作为这本纪录的一个读者，我又从其中摘抄了一部分，因为是摘抄，所以前后各篇之间，衔接得不十分紧密。但总体来看，倒都和相似形与圆密切相关。对于初次涉足于这个领域的人，的确有所启发，的确能发挥导游的作用。

我愿把它奉献给亲爱的小读者，建议你们也认真地浏览一下。

一 在新的起点上

——从全等到相似

入之愈深，其进愈难，而其见愈奇。

——王安石

古话说：“行远必自迩，登高必自卑。”这句话的大意是：走向遥远必须从近处开始；攀登高峰必须从山脚开始。在几何王国里，你们已经走了一段不算太短的路程了。今天要讲的相似形，是一个新的起点。为了“温故而知新”，我们还是从全等形谈起。望文生义，全等形就是两个处处一模一样的图形。显然，它们之间也应该是彼此相似的。但是，为了明确起见，还是让我们再回顾一下，到底什么是全等形？或者退一步说，什么是全等三角形？

也许你们会说：“这还不简单，全等三角形不就是边、角、边，角、边、角，……吗？”应该指出，这样的回答是不确切的，也是不恰当的。因为这里仅仅回答了判定三角形是否全等的条件，并没有回答什么是全等三角形的定义。从几个特定的判定定理出发，是无法作出一般性的回答的。

什么是全等形或全等多边形呢？

当然，在初二时，我们刚学几何，还没有涉及命题的结

构和数学命题。因此，来不及明确地给出多边形全等的有关定义。但是，我希望你们回忆一下，当时我们究竟是怎样引入“全等”这个崭新的概念的？

“适合。”对！两个多边形的对应部分完全重合，这两个多边形就叫做全等多边形。这种完全重合不正意味着它们的“对应角相等，对应边也相等”吗？这就是全等形定义所包含的全部条件。这种办法，这个条件，能不能照搬到相似形的定义中来呢？

请看，这里有三块三角板，每一块的三个角都分别是 30° 、 60° 和 90° 。从直观出发，它们显然是彼此相似的。它们能否相互重合呢？由于它们的大小不一样，边长不相等，当然不能重合。这就是说，它们之间虽然还保留着对应角相等这一条件，但对应边之间不再保持相等的关系。这些对应边之间具有什么样的关系呢？

让我们具体实践一下看，下面是已经量出的三块三角板的边长：

第一块 43mm, 74.5mm, 86mm;

第二块 57mm, 98mm, 114mm;

第三块 86mm, 149mm, 172mm。

这样，我们马上可以写出如下的等式

$$\frac{43}{57} = \frac{86}{114} \approx \frac{74.5}{98},$$

$$\frac{43}{86} = \frac{86}{172} = \frac{74.5}{149}.$$

从第二个式子看，正好是“对应边成比例”，但是从第

一个式子看，则只好说是近似于成比例，好一个讨厌的“近似于”！这个“近似于”是不是由于量度上的误差引起的呢？让我们再想想别的办法。

大家知道，直角三角形中，如果一个锐角是 30° ，那么这个锐角的对边等于斜边的一半。再借助于勾股定理，立即可以得到（见图1）

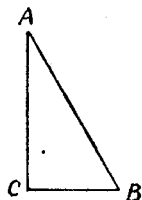


图 1

$$AB = 2 BC, AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3} BC.$$

这样，假定上述三块三角板中，对应于 30° 角的边长分别是 a_1 、 a_2 和 a_3 ，那么它们的三边长就可以写成：

第一块 $a_1, 2a_1, \sqrt{3}a_1$;

第二块 $a_2, 2a_2, \sqrt{3}a_2$;

第三块 $a_3, 2a_3, \sqrt{3}a_3$ 。

现在，问题十分清楚了：它们的对应边恰好成比例。这样，我们也就清楚地看出，相似三角形的定义应该是：

如果两个三角形中，它们的三个内角分别对应相等，三个内角的对边也对应成比例。那么这两个三角形就彼此相似。

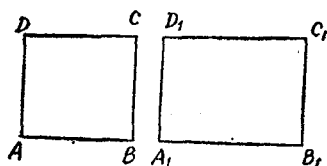
讲到这里，你们也许还会有疑问。既然上面的例题中，三边对应成比例是由三角对应相等推出来的。那么，这个定义的条件是不是多余了呢？说得确切一些，是不是条件过剩呢？比如说，是不是可以直接定义为“对应角相等的两个三角形是相似三角形”呢？这个问题提得好！这是一个“非中有是，似是而非”的问题。我们说“非中有是”，是因为这个命题对于三角形而言，确实是成立的，我们又说“似是而

非”，是因为这个命题仅仅对于三角形成立，而不能推而广之到任意的多边形，不具有普遍性的意义，因而不能用来作为相似形的定义。

比如说，象图2那样，正方形 $ABCD$ 和长方形 $A_1B_1C_1D_1$ ，它们的对应角显然都相等，但二者并不相似，因为它们的对应边不成比例。

$AB : A_1B_1 \neq AD : A_1D_1$ 。同样地，如果仅仅对应边成比例，而对应角不相等，那么，这两个多边形同样也不能构成相似形。图3就是这方面的适例。对于这个问题，你们能不能举出另外的例题来证实上述的论断呢？建议你们试一试。

总而言之，我们上面讲了那么多，不过是为了说明相似

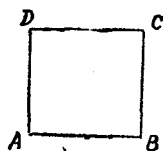


(甲)

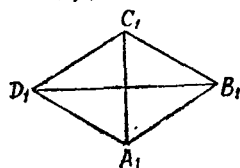
(乙)

图 2

三角形定义中条件并不过剩，而且是缺一不可的。对应角相等、对应边成比例，抓住了这两条，我们就可以得到相似多边形的定义。



(甲)



(乙)

图 3

两个边数相同的多边形中，如果它们的对应角都相等，对应边都成比例，那么这两个多边形叫做相似多边形。

现在让我们回到原来的出发点——全等形。请你们考虑一下这个问题：两个全等形是不是也满足这个定义呢？也就是说：两个全等形是不是也可以称为相似形呢？

我相信你们一定看得出来，这个问题的答案是肯定的。因为，第一，全等形的对应角相等；第二，全等形的对应边之比等于1为一定值，满足相似形定义的要求。事实上，我们总是说：全等形就是相似比为1的相似形。懂得这一点是很重要的，这可以使我们把相似形和全等形看成一个总体，既可以把全等形看成相似形的特例，也可以把相似形看成全等形的推广。著名数学家华罗庚说过：读书既要从薄到厚，也要从厚到薄。我以为，用上面所讲的方法来把握全等形和相似形，就是一个值得重视的“从厚到薄”的过程。

在上面的讨论中，还有一点值得注意。我们采用的讨论方法，明显地增加了计算方面的比重，这是学习相似形与学习全等形的一个重要不同之点。在一部分同学的心目中，有一种错误的观念：计算是代数的事，论证是几何的事。计算与论证，井水不犯河水，彼此毫不相干。这种观念，应该说是完全错误的。正确的倒是在计算过程中，随时注意理论根据，看看计算的每一步是否合理。举一个简单的例子来说吧！

$$\text{若 } ax = b, \text{ 则 } x = \frac{b}{a},$$

就未必一定是可行的。因为如果 $a = 0$ 怎么办？

同样地，在论证中如果能借助计算，常常可以简化推理过程。上面我们用勾股定理推证对应边成比例就是一个明显

的例子。宋代大文学家王安石在《游褒禅山记》中说：“入之愈深，其进愈难，而其见愈奇。”他谈的是山水旅游，其实在数学王国的旅游中也同样是这个道理。今天，谈到计算和论证的综合正好是一个新的旅途的开始。我希望你们也要知难而进。

最后，今天我还要指明的一点是：由于相似形中涉及到大量的比例线段，也就必然要用到大量的比例变形。这样一来，你们在小学学过的一点点比例知识就远远不够用了。正因为这样，所以初中几何课本中就用整整一节专门讨论比例的有关性质。这个问题，我们同样要认真的讨论。

二 通向相似形的船和桥

——比例变形和比例的基本性质

不解决桥或船的问题，过河就是一句空话。不解决方法问题，任务也只是瞎说一顿。

——毛泽东

上次我们已经讲过，相似形与比例线段有关。因此，学习比例变形是学习相似形的必要前提。从这个意义上看，我们简直可以这样说：在相似形的领域里漫游，比例变形是极其重要的桥和船。当然，桥和船本身也是风景区的有机组成部分。去过西湖的人都知道，孤山是重要的风景点，从杭州城去孤山，断桥是必经之路。然而“断桥残雪”，也正好是西湖十景之一。

看来，我们还得花一段不太短的时间，来考察一下我们的交通工具——比例变形。磨刀不误砍柴工嘛！

现在，我们先从小学的基础谈起。

在那里，我们知道：若四量成比例，那么两内项之积等于两外项之积。把这个性质写成式子就是

若 $a:b=c:d$ ，则 $ad=bc$ 。

小学阶段，解比例式就是从这个性质出发的。现在，我们要从这个性质的反面提出一个新问题：若 $ad=bc$ ，能否把这四个数写成比例式呢？

回答是肯定的。只要 $ad=bc \neq 0$ ，也就是 a, b, c 和 d 都不是0，那么同时用 bd 来除等式的两边，马上可以得到

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

也就是 $a:b=c:d$ 。

但是，这个答案并不是十分令人满意的。因为 $ad=bc \neq 0$ 这个条件是我们自己加上去的。完全有理由反问一句，如果 $ad=bc=0$ 呢？

请你们注意，我这样说，并不是鸡蛋里面挑骨头，故意挑剔。因为学习数学就是需要这样严谨的推理论证过程，而不容许逻辑上的任何疏漏。

事实上，当 $ad=bc=0$ 时，乘积 ad, bc 中各自至少有一个因子为零。这里又有两种可能，一种是确实两端各只有一个因子为0。比如说， $a=c=0$ ，这时，原等式直接可以写成

$$0 \cdot d = 0 \cdot b, \text{ 也就是 } 0 = 0$$

这样，同时以 bd 除等式两边时，将得到

$$0:b=0:d$$

也就是 $a:b=c:d$ 仍然成立。

但是，对于另一种可能性——等式某一端的两个因子都是零呢？比如说， $a=d=c=0$ ，这时实际上已排除了以 bd 除等式两边的可能性（请你们想一想，这是为什么）。因此，这时尽管有 $ad=bc$ ，但我们并不能把这四个数写成比例式。

上面的情况表明，在关于比例式的讨论中，它们的因子为0的情况，是一类特别值得注意的情况。尽管从基本点看，它的根据十分简单，不就是除数不能为0吗！但是，在中学数学里，很多似是而非的结论，往往就是从这里引入的。

请看下面的事例。

已知 $a=b$ ，则 $a^2=ab$ 。

等式两边同时减去 b^2 ，则有

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

就是 $(a+b)(a-b) = b(a-b)$ 。

等式两边同时除以 $a-b$ ，则有

$$a+b=b$$

由条件 $a=b$ ，可得 $b+b=b$ 。

即 $2=1$ 。

最后的结论当然是错误的。错在哪里呢？相信你们能够找出来，这里就不多说了。

另外还有一点也是值得我们注意的，当 $ad=bc \neq 0$ 时，除了用 bd 去除等式两边之外，我们还能用哪些数去除呢？这样除得的结果又有什么不同呢？仔细分析一下这个问题，将会使我们得到许多有益的启示。

首先我们应该看到， b 、 d 这两个因子，一个来自等式的左端，另一个来自等式的右端，这就是说要想通过上述的方法得到比例式，应该从原等式的两边，一边取一个因数，作为除式的因子。

当左端取 a 时，右端可取 b 或 c ，这样可用两种不同的方