北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

概率论

何书元　编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

概 率 论

何书元 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论 / 何书元编著. — 北京：北京大学出版社，2006.1

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-08527-3

I. 概 ··· II. 何 ··· III. 概率论 – 高等学校 – 教材
IV. O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 112832 号

书　　名： **概率论**
著作责任者： 何书元　编著
责 任 编 辑： 刘　勇
标 准 书 号： ISBN 7-301-08527-3/O · 0632
出 版 者： 北京大学出版社
地　　址： 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址： http://cbs.pku.edu.cn
电　　话： 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱： zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者： 北京大学印刷厂
发 行 者： 北京大学出版社
经 销 者： 新华书店
890 mm × 1240 mm　A5　9.75 印张　270 千字
2006 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月第 1 次印刷
印　　数： 0001—4000 册
定　　价： 16.00 元

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

内容简介

本书是高等院校“概率论”基础课的教材. 全书共分六章, 内容包括: 古典概型和概率空间、随机变量和概率分布、随机向量及其分布、数学期望和方差、特征函数和概率极限定理、随机过程简介等. 每小节配有练习题, 每章配有总习题, 书末附有习题答案或提示, 供读者参考. 本书对概率论的基本内容作了系统而全面的介绍, 有许多新的简明讲法, 有利于读者更好地理解所学内容和加深对问题本质的理解.

本书叙述严谨、推导细致、举例丰富, 精选的例题反映了现实生活中的特点, 例如: 赌博问题、判案问题、官员受贿问题、文物保存问题、遗传模型、收藏问题、敏感问题调查、医药疗效问题等. 本书讲述的计算随机变量函数和随机向量函数的密度的方法是解决较为复杂问题的有力方法. 在讲述多元正态分布时, 介绍了退化的多元正态分布; 在讲述数学期望时, 给出了混合分布的数学期望; 对中心极限定理介绍了它的背景和应用.

本书可作为综合大学、高等师范院校、理工科大学、财经院校本科生“概率论”课程的教材或教学参考书. 学习本书的先修课程是高等数学.

作者简介

何书元　北京大学数学科学学院教授、博士, 从事应用随机过程、时间序列分析和概率极限定理的教学和科研工作. 主讲课程有概率论、概率统计、应用随机过程、应用时间序列分析和极限定理等. 兼任教育部数学与统计学教学指导委员会委员、全国统计教材编委会委员.

本书大字体的 pdf 文件概率论 .pdf 可以到

http://cn.math.pku.edu.cn/teachers/hesy/index.htm 免费下载.

序　　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效. 2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时. 并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程 (其中数学系 18 门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合，我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的

时间修订、编写和出版 40 余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》. 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考, 记录了我们教学实践的足迹, 体现了我们教学改革的成果, 反映了我们对新世纪人才培养的理念, 代表了我们新时期的数学教学水平.

经过 20 世纪的空前发展, 数学的基本理论更加深入和完善, 而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛, 而且活跃于生产第一线, 促进着技术和经济的发展, 所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学, 正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化, 数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素, 将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区, 但要十分稳重和积极; 人才培养无止境, 既要遵循基本规律, 更要不断创新. 我们现在推出这套丛书, 目的是向大家学习. 让我们大家携起手来, 为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张 继 平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

前 言

概率是描述随机事件发生的可能性的度量. 概率论通过对简单随机事件的研究, 逐步进入复杂随机现象规律的研究, 是研究复杂随机现象规律的有效方法和工具. 概率论还是学习统计学的基础.

多做习题是打好数学基础、练好数学基本功的必由之路. 本书列出了较多的从易到难的习题供学生们选择. 习题配有答案, 对于技巧性较高的题目还给出提示. 本书在每个小节后都列出较简单的练习题目, 供学习完本小节使用. 课后作业只需要选择所备习题的 1/2 至 3/4 即可达到训练的目的. 有能力的同学应当尝试独立完成每一道习题.

严谨的逻辑推理是基本功. 但是只学好严谨的逻辑推理是远远不够的. 科学领域的原创性成果往往不源于逻辑推理. 开放的形象思维、直觉、灵感、顿悟等等才是原创性成果的源泉. 本书编者试图在培养同学的想象力和考虑问题的直觉方面作一些努力. 但是否能达到目的就难说了. 除了概率论的基本内容外, 本书还力图通过较多的举例和习题介绍概率论的众多应用领域.

本书在 §2.5 和 §3.4 中介绍随机变量函数和随机向量函数的密度的计算方法, 这是解决较为复杂问题的有力方法. 本书的举例和习题的选择较多地考虑了以后继续学习概率论和统计学的需要, 许多举例和习题的结论在今后的学习甚至工作中都是有用的.

多年来, 北京大学数学科学学院将概率论列为本科生第四学期的必修课. 编者曾多次以汪仁官教授的《概率论引论》为教材讲授概率论. 随着时间的推移, 有不少新的讲法和举例逐渐积累, 于是萌生了编写本教材的想法. 为了和其他课程保持衔接, 本书基本保持了《概率论引论》的体系. 从教学规律来讲, 这个体系是合理的.

根据经验, 使用本书作为教材时的授课进度可大致如下 (仅供参考).

第一章占 20% 学时，基本内容是古典概率模型、几何概率、概率空间、条件概率、全概率公式与贝叶斯公式.

第二章占 14% 学时，基本内容是随机变量的独立性、分布函数、连续型随机变量的概率密度.

第三章占 18% 学时，基本内容是随机向量及其联合分布、连续型随机向量及其联合密度、随机向量函数的分布、条件分布和条件密度.

第四章占 20% 学时，基本内容是数学期望及其性质、方差、协方差、相关系数和条件数学期望.

第五章占 20% 学时，基本内容是概率母函数、特征函数、多元正态分布、强弱大数律和中心极限定理.

第六章占 8% 学时，基本内容是泊松过程，马尔可夫链和时间序列的介绍.

全书是针对一个学期的课程 (每周四学时) 设计的. 每周三学时的课程应略去带 * 的内容或第六章. 每周二学时的课程应略去带 * 的内容和第六章. 前五章和不带 * 的部分是本书的主要内容.

除了作者编写的内容外，本书的部分举例和习题选自汪仁官教授的《概率论引论》. 本书的编写还得到了汪教授的大力支持. 作者对汪教授深表感谢.

陈家鼎教授对本书次序统计量的联合密度的推导提供了很好的修改意见，特致谢意.

由于作者水平有限，书中难免不妥之处，请读者不吝指教.

何 书 元

北京海淀蓝旗营

2005 年 10 月

目　录

第一章　古典概型和概率空间

在考虑一个 (未来) 事件是否会发生的时候，人们常关心该事件发生的可能性的大小. 就像用尺子测量物体的长度、用天平测量物体的质量一样，我们用概率测量一个未来事件发生的可能性大小. 将概率作用于被测事件就得到该事件发生的可能性大小的测度值.

为了介绍概率，需要先介绍试验和事件.

§1.1　试验与事件

我们把按照一定的想法去做的事情称为随机试验. 随机试验的简称是**试验**. 下面都是试验的例子:

掷一枚硬币，观察是否正面朝上;

掷一颗骰子，观察掷出的点数;

在一副扑克牌中随机抽取两张,观察是否得到数字相同的一对;

乘电梯从 1 层上到 9 层，观测电梯一共停了几次;

观测放学回家的路上所用的时间;

观测航天器发射的成功与否;

观察明天的最高气温;

考查某商场在一天内来到的顾客数量;

调查一分钟内在某个路口通过了多少辆汽车.

投掷一枚硬币，用 H(head) 表示硬币正面朝上，用 T(tail) 表示硬币反面朝上，则试验有两个可能的结果: H 和 T. 我们称 H 和 T 是样本点，称样本点的集合 $\{H, T\}$ 为试验的样本空间.

投掷一颗骰子，用 1 表示掷出点数 1, 用 2 表示掷出点数 2, $\cdots$, 用 6 表示掷出点数 6, 则试验的可能结果是 $1,2,3,4,5,6$. 我们称这 6 个数是试验的样本点，称样本点的集合

$$\{\omega|\,\omega=1,2,\cdots,6\}$$

是试验的样本空间.

为了叙述的方便和明确，下面把一个特定的试验称为试验 S.

样本点：称试验 S 的可能结果为样本点，用 ω 表示.

样本空间：称试验 S 的样本点构成的集合为样本空间，用 Ω 表示. 于是

$$\Omega=\{\omega\,|\,\omega \text{ 是试验 } S \text{ 的样本点}\}.$$

投掷一颗骰子的样本空间是

$$\Omega=\{\omega|\,\omega=1,2,\cdots,6\}.$$

用集合 $A=\{3\}$ 表示掷出 3 点，则 A 是 Ω 的子集. 我们称 A 是事件. 掷出 3 点，就称事件 A 发生，否则称事件 A 不发生. 用集合 $B=\{2,4,6\}$ 表示掷出偶数点， B 是 Ω 的子集，我们也称 B 是事件. 当掷出偶数点，称事件 B 发生，否则称事件 B 不发生. 事件 B 发生和掷出偶数点是等价的.

事件：设 Ω 是试验 S 的样本空间. 当 Ω 只含有限个元素时，称 Ω 的子集为事件，通常用大写字母 A,B,C,D 或 $A_1,A_2,\cdots,B_1,B_2,\cdots$ 等表示.

按照上述约定，子集符号 $A\subset\Omega$ 表示 A 是事件. 当试验的样本点 (试验结果) ω 落在 A 中，称事件 A 发生，否则称 A 不发生.

用 $\overline{A}=\Omega-A$ 表示集合 A 的余集. 则事件 A 发生和样本点 $\omega\in A$ 是等价的，事件 A 不发生和样本点 $\omega\in\overline{A}$ 是等价的.

空集 $\emptyset$ 是 Ω 的子集. 由于 $\emptyset$ 中没有样本点，永远不会发生，所以称 $\emptyset$ 是**不可能事件**. Ω 也是样本空间 Ω 的子集，包含了所有的样本点，因而总会发生. 我们称 Ω 是**必然事件**.

例 1.1　一个电视台要招聘播音员，现在有三位符合条件的女士和两位符合条件的男士前来应聘.

(1) 写出招聘男女播音员各一名的样本空间和样本点;

(2) 写出招聘两名播音员的样本空间 Ω 和事件 A="招聘到两名女士".

解 本"试验"是招聘播音员. 用 W_1, W_2, W_3 分别表示第 1,2,3 位女士, 用 M_1, M_2 分别表示第 1, 2 位男士. 用 W_1M_1 表示招聘到第 1 位女士和第 1 位男士, 用 W_1M_2 表示招聘到第 1 位女士和第 2 位男士, $\cdots\cdots$.

(1) 招聘男女播音员各一名时，样本空间是

$$\Omega = \{W_1M_1, W_1M_2, W_2M_1, W_2M_2, W_3M_1, W_3M_2\}.$$

Ω 中的元素是样本点.

(2) 招聘两名播音员时，样本空间是

$$\Omega = \{ W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3, W_1M_1, W_1M_2, W_2M_1,$$
$$W_2M_2, W_3M_1, W_3M_2, M_1M_2\}.$$

招聘到两名女士的事件 $A = \{W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3\}$.

明显，当 A, B 都是事件，则

$$A \cap B,\quad A \cap B,\quad A - B = A\overline{B}$$

都是事件. 也就是说事件经过集合运算得到的结果还是事件.

我们也用 AB 表示 $A \cap B$. 当 $AB = \emptyset$ 时，也用 $A + B$ 表示 $A \cup B$.

当事件 $AB = \emptyset$ 时，称事件 A, B **不相容**. 特别称 $\overline{A}$ 为 A 的**对立事件或逆事件**. 如果多个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不相容： $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$, 就称它们**互不相容**.

事件的运算符号和集合的运算符号是相同的，例如：

(1) $A = B$ 表示事件 A, B 相等;

(2) $A \cup B$ 发生等价于至少 A, B 之一发生;

(3) $A \cap B$ (或 AB) 发生等价于 A 和 B 都发生;

(4) $A - B = A\overline{B}$ 发生等价于 A 发生和 B 不发生;

(5) $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ 发生表示至少有一个 A_j $(1 \le j \le n)$ 发生;

(6) $\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j$ 发生表示所有的 A_j $(1 \le j \le n)$ 都发生.

事件的运算公式就是集合的运算公式，例如：

(1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) $A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$, $A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$;

(3) $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) $A\cup B=A+\overline{A}B$, $A=AB+A\overline{B}$;

(5) 对偶公式： $\overline{\bigcup_{j=1}^{n}A_j}=\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A}_j$, $\overline{\bigcap_{j=1}^{n}A_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A}_j$.

其中的公式 (4) 和 (5) 是值得牢记的.

练 习 1.1

(1) 证明事件的运算公式

$$A\cup B=A+\overline{A}B,\quad A=AB+A\overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n}A_j}=\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A}_j,\quad \overline{\bigcap_{j=1}^{n}A_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A}_j.$$

(2) 用集合的运算表达以下事件：

(a) A 发生、B 和 C 不发生； (b) A 不发生、B 和 C 发生；

(c) A,B,C 都不发生； (d) 仅有 A,B,C 之一发生；

(e) A,B,C 之一发生.

§1.2 古 典 概 型

概率是介于 0 和 1 之间的数，其概念形成于 16 世纪，与当时用投掷骰子进行赌博有密切的关系.

用 $^{\#}A$, $^{\#}\Omega$ 分别表示事件 A 和样本空间 Ω 中样本点的个数. 以下的概率模型由费马 (Fermat) 和帕斯卡 (Pascal) 在 1654 年提及.

定义 2.1 设试验 S 的样本空间 Ω 是有限集合， $A\subset\Omega$. 如果 Ω 的每个样本点发生的可能性相同，则称

$$P(A)=\frac{^{\#}A}{^{\#}\Omega}\tag{2.1}$$