



课程学习辅导

初中代数第四册
课程学习辅导

湖南教育出版社



课程学习辅导

初中代数第四册 课程学习辅导

肖江汉 编

湖南教育出版社

初中代数第四册

课 程 学 习 辅 导

肖 江 汉 编

责任编辑：程承斌

湖南教育出版社出版（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

1983年1月第1版第1次印刷

字数：122,000 印张：6 印数：1—469,000

统一书号：7284·131 定价：0.47元

《初中代数课程学习辅导》是供初中同学学习部编代数教材时使用的参考书。本书分“预习与思考”、“词语解释”、“疑难解析”、“学习参考资料”、“复习建议”五个方面逐章（节）进行辅导。“预习与思考”通过典型事例的启发，引入本章（节）的重点和难点，“词语解释”是有选择地对一些容易混淆的词语进行辨析和解释，“疑难解析”是根据教材难点逐条进行分析和解答，“学习参考资料”提供与本章（节）有关的科学知识，供同学们学有余力时参看，“复习建议”着重介绍学好本章（节）的方法和注意事项。

本书亦可供在职青年自学初中代数使用。

目 录

关于代数的知识(代绪论).....	(1)
一 代数发展史简介.....	(1)
二 为什么要学习代数.....	(3)
三 初中代数的内容与学习的要求.....	(5)
四 如何学好代数.....	(6)
第一章 直角坐标系.....	(8)
第二章 解三角形.....	(27)
一 三角函数.....	(27)
二 解直角三角形.....	(38)
三 解斜三角形.....	(54)
第三章 函数及其图象.....	(86)
一 函数.....	(86)
二 正比例和反比例函数.....	(96)
三 一次函数的图象和性质.....	(103)
四 二次函数的图象和性质.....	(109)
五 一元一次不等式组和一元二次不等式.....	(137)
第四章 统计初步.....	(163)

关于代数的知识

(代 绪 论)

我们已经在小学里学过算术，现在要开始学习数学中的另一门学科——代数。那么，什么是代数，为什么要学代数，初中代数包括哪些内容，怎样学习代数呢？这些是我们在学习代数之前必须要搞清楚的问题。

一 代数发展史简介

代数的发展是和方程分不开的，长期以来，它被理解为关于方程的科学。代数萌芽于远古时代，约在四千年前，巴比伦学者就会解二次方程和其中一个是二次方程的联立方程。不过，当时他们不是现代代数中所采用的文字符号，而是用语言形式把方程写下来的。

我国古代对数学的发展作出了卓越的贡献，其中对代数的发展在世界上占有相当重要的地位。现存最早、最有名的数学著作《九章算术》就产生在公元纪元前后的汉朝，书中有关负数、分数计算，联立一次方程的解法都是具有世界意义的成就，其中一元二次方程的数字解法，联立一次方程组的解法要比欧洲同

类算法早一千五百年左右。我国魏晋时期的杰出数学家刘徽曾对《九章算术》作过理论性探讨，于公元263年注《九章算术》九卷，提出了许多超出原著的新理论，其中在代数部分提出了正负数概念和有理数的加减法法则，这比国外最早出现的负数概念要早八、九百年。

公元二世纪到三世纪，古希腊数学家基奥法特最先使用简写的符号代表未知数。九世纪末，生于花拉子模的乌兹别克学者穆罕默德编写了代数著作《还原和对立的书》。他把减数从方程的一边移到另一边而成为加数的移项叫“还原”；而将未知数和已知数分别归并在方程两边的运算称为“对立”。按照阿拉伯文，“还原”叫做“al-Jabr”，译成拉丁文为“Algebra”，因此，“代数”一词便由此得名。

公元十一世纪，我国北宋数学家贾宪曾著有“开方作法本源”图（指数为正整数的二项式的系数表）。随后，我国南宋数学家杨辉于1261年著《详解九章算术》，书中根据贾宪的方法清楚地将指数为正整数的二项式的系数排列成一个三角形（即高中代数中称之的杨辉三角形）。贾宪、杨辉的这一伟大成就导致后来高次方程求实根的一整套方法。贾宪的“开方作法本源”图比国外所称的帕斯卡三角形（1654年）不仅更为合理，而且要早600年。

十二世纪末到十三世纪，我国元代数学家李冶所著《测圆海镜》是流传至今的最早天元术著作，其方法是先立“天元”来表示所求的未知数，再依据问题所给的数据立出两个数量相等的多项式，然后相减，构成一个一端为零的方程。随后，元代

数学家朱世杰著有《四元玉鉴》三卷，该书集前贤之大成，用天、地、人、物表示四个未知数，建立了四元高次方程理论。

十六世纪末，法国数学家韦达首先用文字符号表示未知数和已知数，但代数中的符号具有和现在很接近的形式，是在十七世纪中叶开始的，这应归功于法国数学家笛卡尔。

十八世纪末，德国数学家高斯证明了代数学的基本定理，即每一个代数方程必具有一个复数形式的根。

十九世纪初，挪威数学家阿贝尔证明了五次代数方程一般不能用根式求解，由此引起可交换群（即“阿贝尔群”）的概念。后来，法国数学家伽罗华解决了多年不能解决的用根式解代数方程的可能性的判断问题，创立了“伽罗华理论”，并为群论的建立、发展和应用奠定了基础。

上面仅仅是对代数发展史的简单介绍。应该指出的是：科学的发展是与一定的历史条件、社会生产的发展密切联系着的，由于生产和科学技术的发展，代数所研究的对象已由数扩大到向量、矩阵，这就使得研究更为一般的代数运算的规律和性质成为近世代数学的重要目标，从而推动了近世代数的发展，形成群论、环论、伽罗华理论、线性代数等许多分支。代数还和其他数学分科相结合，产生新的数学学科，如代数几何、代数数论、代数拓扑、李群等。

二 为什么要学习代数

代数是数学的一门分科，是算术的继续。和算术一样，代

数是研究数量运算规律的科学。

代数和算术虽是两门学科，但它们却是紧密相连的，算术里的许多内容都是学习代数时经常用到的。代数和算术的主要区别，就在于前者引入未知量，根据问题的条件列出方程，然后解方程求未知量的值，而后者研究的是数之间的关系，是具体的数字运算。算术中的加、减、乘、除运算是有理数加、减、乘、除运算的特例；在算术中两数之和一定大于其中一个加数，但在有理数的计算中就不能这样断言；在算术中两数乘、除的结果仍是正数，但在有理数的乘、除法计算中，就必须注意符号法则。这里我们只作了一点简单的介绍，在学习过程中还希望同学们作进一步的比较、总结。

和算术一样，代数在生活和生产中经常用到，同时在其他学科，如物理、化学、天文及现代技术中也有广泛的应用。

四千年前巴比伦学者就是利用二次方程及一个是二次方程的两个联立方程解决了测地学、建筑学和军事上的多种问题。

九世纪花拉子模的穆罕默德和他以后的一些学者就曾经把代数广泛应用到交易和财务的计算上。

十二世纪代数在欧洲各国开始发展起来，出现了未知数和简写符号，从而解决了跟商业有关的一系列问题。

虚数在代数中出现后(虚数将在高中代数部分学到)，建立了复变函数理论，成为解决许多技术问题的工具。例如，茹可夫斯基关于机翼上升力的基本定理就是以这个理论为根据来证明的，这个理论在解决堤坝渗水问题时也显示了它的作用。再如，为了解决计算机的电路是否为最佳的问题时，人们就是用

“逻辑代数”来进行理论检查的。另外，代数在社会科学方面的使用也被重视起来了。

由此不难看出，学好代数对我们来说是十分重要的了。

三 初中代数的内容与学习的目的要求

初中代数的主要内容包括四个方面：数的概念的扩张、恒等变形、方程和不等式以及函数。

学习初中代数的目的与要求在于：

1. 学习代数的基础知识，包括概念、定义、公理、定理、法则等，能迅速而正确地进行代数式的恒等变形，会列方程和解方程，能应用所学的代数知识解决物理、化学和实际中的简单问题。

2. 培养运算能力和逻辑思维能力，对代数运算中所包括的数的计算、式的恒等变形、方程和不等式的变形、初等函数的求值和运算等，要做到运算确切有据，结果正确无误，对基本运算法则不仅要熟而且要快。

3. 学习辩证唯物主义思想，培养辩证唯物主义观点。数学本身具有丰富的辩证唯物主义的因素，初中所学代数有很多内容反映着辩证唯物主义思想，如数的概念是从现实世界中得来的，加法和减法、乘法和除法在一定条件下都可以互相转化，等等。因此，学代数时，我们要充分利用这个有利条件，通过数与式及具体运算的分析，加深对于人的认识过程“一个是由

特殊到一般，一个是由一般到特殊”的理解，培养辩证唯物主义观点。通过揭示方程中“已知数”和“未知数”这对矛盾的对立统一关系，特别是它们“互相联系着，不但在一定条件之下处于一个统一体中，而且在一定条件下互相转化”的关系，学习对立统一的辩证观点；通过“等与不等”、“解方程与解不等式”的对比，进一步认识“对立统一规律是宇宙的根本规律”以及对立的双方在一定条件之下的互相转化，学习辩证唯物主义。

四 如何学好代数

要学好代数应该注意以下几点：

1. 一定要听好课，搞清基本概念。要注意老师是如何引入新概念的，特别要搞清概念引入的背景，它能解决什么问题，要结合直观解释理解概念，消除对概念的畏惧心理，避免对概念的死记硬背，只有这样，才能做到记忆持久，运用灵活。

2. 不仅要对学过的概念与知识经常进行复习、对比，而且要养成多看数学课本的良好习惯。重要的概念、公式、法则、定理是需要记忆的，如能用自已的语言表达就更好了。要把学习新知识当作复习旧知识的开始，这样才能学得积极主动、生动活泼。

3. 认真做习题，巩固、应用和检查所学的知识。习题一般分为两类：一类是基本题，目的在于熟悉、巩固所学的基本概念、公式和法则；另一类是综合练习题，目的在于训练解题技巧，综合运用知识。对后一类习题要特别注意分析比较、归纳对比、

总结转化及一题多解。这样，即使做的习题数量不是很多，也可学得主动，易于发现自己掌握知识的薄弱方面，做到举一反三，触类旁通，执一驭万。另外，做习题时要克服下列偏向：对有关问题涉及到的知识不能只对近期所学的内容想得多，而对过去所学的知识想得少；对与题有直接关系的想得多，对间接的、较隐蔽的关系想得少；只愿意直接套公式，而不善于综合运用公式。

总之，一定要加强基础知识和基本技能的学习和训练，对习题不仅要适量的练，更重要的是要多想，特别是遇到难点时，要能够从正面、反面，各个角度去思考，只有这样，才能使所学的知识融会贯通，才能把所学的知识得心应手地应用到实际中去。

第一章 直角坐标系

我们以前学习过数轴，知道数轴上的点和实数具有一一对应的关系。那么，平面上的点是否也能建立某种关系，使平面上的点和实数对一一对应呢？这正是本章要回答的问题。这一章就是在学习数轴的基础上，首先引进直角坐标系，使得坐标平面内的点和有序实数对建立一一对应的关系。这样，就把平面几何中研究的基本对象——点与代数中研究的基本对象——数联系起来，从而使形和数相结合，于是，我们就可以用代数的方法来研究几何问题。因此，本章的重点是直角坐标系。当我们开始接触到用坐标法来研究几何图形，如两点间的距离和线段的定比分点这些新的概念时，在思考方法上与以前有些不同，就需要有个适应过程，因此，线段的定比分点也是本章的难点。

【预习与思考】

我们已经知道，数轴上的每一点都有一个唯一的实数与它对应，在生产和生活实际中，只有这种知识是不够的，我们经常还需要表示平面内点的位置问题。如剧院里就是用第几排，第几号这一对实数来确定某个座位的，为此，就得事先规定什么叫做排，什么叫做号，从哪里开始是第一排，从哪里开始是第一号。例如，第5排第9号，我们就可以将5和9这一对有

序实数记作 $(5, 9)$,这对有序实数就唯一确定了一个座位。所谓“有序”是指在规定了顺序以后,这对实数的位置就不能调换,如上面的5和9的位置就不能调换,如果写成 $(9, 5)$ 就表示另一个位置了,即第9排第5座。在实际生活中的这类平面问题,都要求用一对实数来确定某点的位置,这样就抽象出直角坐标系内点的坐标的概念。本章就是这样从实际问题中引入坐标系的概念、点的坐标的概念的。预习时,首先要把这些概念搞清楚,同时还可以思考下列问题:

1. 平面直角坐标系是怎样构成的? 什么叫做点的坐标?
2. 什么叫有向线段? 它与我们以前学过的线段有何区别? 什么叫有向线段的数量? 如何求有向线段的数量?
3. 两点间的距离公式是怎样得出来的? 熟记这一重要公式。
4. 线段的定比分点公式是怎样得出来的? 熟记线段的定比分点公式及线段的中点坐标公式。
5. 怎样建立直角坐标系? 如何运用代数的方法来研究几何图形及其性质?

【词语解释】

平面直角坐标系 平面内有公共原点而且互相垂直的两条数轴,即构成了平面直角坐标系。如图1—1水平的数轴 x' 叫做 x 轴或横轴,向右的方向为正;铅直的数轴 y' 叫做 y 轴或纵轴,向上的方向为正。它们的交点 O 叫做坐标原点。两坐标轴的长度单位要一致。

点的坐标 建立了平面直角坐标系后,对于平面内的任意

一点，都有一对有序实数和它对应。这对有序实数称为该点的坐标。如图1—1，和点A对应的有序实数对，称为点A的坐标，记作 $A(2,4)$ 。其中第一个数叫做点A的横坐标，第二个数叫做点A的纵坐标。注意这个顺序不能调换。如M点的坐标是 $(4,2)$ 。 $(2,4)$ 与 $(4,2)$ 是两对不同的有序实数，它们在坐标平面内表示不同的两点 $A(2,4)$ ， $M(4,2)$ 。这就是说不同的有序实数对在坐标平面内表示不同的点，

反过来，在坐标平面内不同的点，有不同的有序实数对与它对应。如有序实数对 $(-3,3)$ ， $(-4,-2)$ ， $(4,-5)$ ， $(5,-4)$ 在图1—1中分别表示B、C、D、E各点。在坐标平面内的每一个点有唯一确定的一对有序实数 (a,b) 与

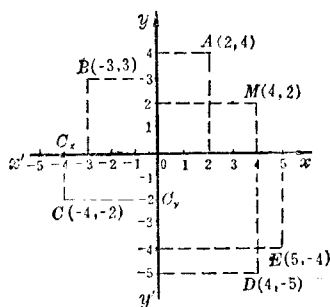


图1—1

它对应，任意一对有序实数都可以在坐标平面内找到唯一确定的一点与它对应，不同的点对应的有序实数对也不同。一般来说 (a,b) 和 (b,a) 表示的是不同的点（只有当 $a=b$ 时才表示同一点）。

有向线段 规定了方向的线段叫有向线段。

定比分点 P点分有向线段 P_1P_2 所成的比，用希腊字母 λ 表示，就是 $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$ 。称P是分线段 P_1P_2 为定比 λ 的定比分点。

【疑难解析】

1. 怎样由已知点求坐标？由已知有序实数对定点？

如图1—2由已知点A引 y 轴的平行线交 x 轴于 A_x ，对应的数是4，引 x 轴的平行线交 y 轴于 A_y ，对应的数是3，知A点的坐标是(4,3)，同样可以求得其余各点的坐标。如 $B(-3,4)$ ， $C(-2,-3)$ ， $D(0,-4)$ 。已知有序实数对(3,-4)，首先在 x 轴上找到对应3的点作 y 轴的平行线，在 y 轴上找到对应-4的点作 x 轴的平行线，这两条直线的交点P就是和有序实数对(3,-4)对应的点，如图1—2，同样由已知实数对(2,0)、(3,1)、(1,3)，在坐标平面内可以找到唯一确定的点Q、R、S分别与之对应。

点的坐标还有下列规律，掌握这些规律对于由坐标找点，由点求坐标都比较方便，这些规律是：

(1) 横坐标为正的点在第一象限或第四象限；纵坐标为正的

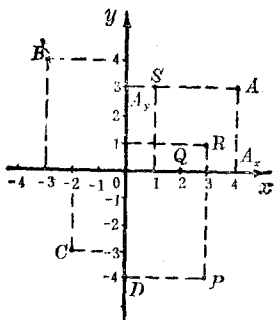


图1—2

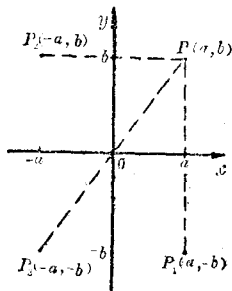


图1—3

点在第一象限或第二象限。横坐标为零的点在纵轴上；纵坐标

为零的点在横轴上。

(2) 已知 P 点的坐标 (a, b) ，它关于 x 轴对称的点是 $P_1(a, -b)$ ；关于 y 轴对称的点是 $P_2(-a, b)$ ；关于原点对称的点是 $P_3(-a, -b)$ 。即关于 x 轴对称的点横坐标相同，纵坐标是互反数；关于 y 轴对称的点纵坐标相同，横坐标是互反数；关于原点对称的点，它们的横坐标和纵坐标都分别为互反数。如图 1—3。

2. 如何正确理解有向线段？

在实际生活中，我们常遇到由 A 到 B 和由 B 到 A ，这一具有相反意义的线段，这就是说要考虑线段的方向。例如在物理学中反映物体的位移，这是既有大小又有方向的量。仅用线段 AB 表示位移时，就不能准确表示它位移的方向，因此，不仅要指出线段的长度，而且还要指出线段的方向。这样，就必须引进新的概念——有向线段。如图 1—4，由 A 到 B 是正方向的；由 B 到 A 是负方向的。

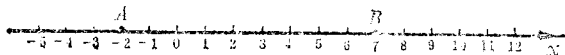


图 1—4

有向线段的数量是指这条线段的长度，连同表示它的方向的正负号。如有向线段 AB 的数量是 $+9$ ，记作 $AB = +9$ ；有向线段 BA 的数量是 -9 ，记作 $BA = -9$ 。一般情况： $AB = OB - OA = x_B - x_A$ 。在平面几何中线段 AB 与 BA 是一致的，但在解析几何中 $AB = -BA$ ；在平面几何中线段 AB 与它的长度都用 AB 表示；而在解析几何中有向线段 AB 的长度用 $|AB|$ 表示，这就是