



概率论与数理统计

主 编 鲁立刚 许志强 于葭



哈尔滨工程大学出版社

概率论与数理统计

主 编 鲁立刚 许志强 于 蔚
主 审 荆广珠

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/鲁立刚,许志强,于蒨主编. —哈尔滨:
哈尔滨工程大学出版社,2004
ISBN 7-81073-599-3

I. 概… II. ①鲁…②许…③于… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063235 号

内 容 简 介

本书内容包括事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及其中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析和试验设计共十章。每章均有小结和习题,书后有可供查阅的附录、附表。本书作为高校的教材使用,也可供有关人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 850mm×1168mm 1/32 印张 14 字数 354 千字
2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—4 100 册
定价:18.00 元

前 言

根据 21 世纪素质教育的具体要求,结合浙江万里学院教学改革后专业及课程调整的新情况,我们对大纲进行全面的探讨和大胆的改革。按《概率论与数理统计》课程的教学基本要求,为培养 21 世纪具有专业特色的应用人才编写本书。本书主要具有以下特点。

1. 淡化理论,强化应用,简化统计方法。既不过分追求学科的系统性和理论的严谨性,又不失教材本身的系统性和科学性。对于极为重要的概念、理论和方法,尽量多方面给出解释及应用。对于相对次要的枝节部分,或略或删,以便引入专业性、应用性强的新知识。

2. 拓宽了知识面和教材的使用范围,更加适应当前专业调整的新局面。

3. 增加了许多工业、经济等方面的具体实例,通俗易懂、联系实际,旨在激发读者的学习积极性,重视课程的实用价值。

4. 每节后设有“思考与讨论”,着重引导读者讨论该课程中的主要概念与基本思想。在该课程教学中鼓励将习题课过渡到课堂讨论。

5. 每章之末各有一简短小结,或概括要点,或纵横联系,或提请警戒。

6. 基于统计方法的普遍适用性和重要性,本书给出了主要统计学术语对应的英文,以利于日后的文献阅读和写作。

7. 本书在若干易产生混乱的内容处通过“评注”的形式进一步答疑解惑,力求突出内容的实质。

8. 本书对于在统计学部分有重要基础地位的“小概率与临界

值”问题单独编为一节,深入浅出地给出了比较详尽的讨论。

9. 在第十章中,除“正交设计”外,还编入了目前在科研及生产中应用极为广泛的新的试验设计方法——均匀试验设计及其应用。

本书可作为工科、经济、计算机专业的教材或参考书;也可以作为从事工业、经济、计算机等方面的教学及科研人员的参考书。在本书的编写过程中,得到了浙江万里教育集团和浙江万里学院领导的热忱支持,有关同志提出了宝贵的意见和建议;宁波工程学院荆广珠教授主审并提出宝贵建议,黑龙江水利专科学校于荇副教授提供了有关资料并参加了编写工作,在此一并致以深切的谢意。

本书属教改教材,内容组织和叙述方法的更新幅度较大,缺点、错误在所难免,恳请使用本书的师生和广大读者批评指正。

编 者

2004 年 6 月于浙江万里学院

目 录

第一章 事件与概率	1
第一节 随机事件和样本空间	3
第二节 事件的关系与运算	4
第三节 频率与概率	7
第四节 古典概型	11
第五节 条件概率与乘法公式	14
第六节 独立性	19
第七节 重复独立试验与二项概率公式	22
本章小结	24
习题一	25
第二章 随机变量及其分布	29
第一节 随机变量	29
第二节 离散型随机变量的概率分布	30
第三节 随机变量的分布函数	38
第四节 连续型随机变量的概率密度及其分布函数	41
第五节 随机变量的函数的分布	51
本章小结	56
习题二	56
第三章 多维随机变量及其分布	61
第一节 二维随机变量	61
第二节 边缘分布	67
第三节 条件分布	71
第四节 相互独立的随机变量	77
第五节 二维随机变量的函数的分布	80

本章小结	85
习题三	86
第四章 随机变量的数字特征	92
第一节 数学期望	92
第二节 方差	99
第三节 几种重要分布的数学期望与方差	106
本章小结	110
习题四	110
第五章 大数定律及中心极限定理	114
第一节 大数定律	114
第二节 中心极限定理	117
本章小结	122
习题五	123
第六章 数理统计的基本概念	125
第一节 导论	125
第二节 总体、样本和统计量	128
第三节 抽样分布	131
第四节 小概率与临界值	135
本章小结	145
习题六	146
第七章 参数估计	147
第一节 点估计	147
第二节 估计量的评选标准	153
第三节 区间估计	156
第四节 正态总体参数的区间估计	162
第五节 0-1 分布参数的区间估计	168
第六节 单侧置信区间	169
本章小结	171
习题七	172

第八章 假设检验	176
第一节 假设检验的基本思想.....	176
第二节 单个正态总体的假设检验.....	182
第三节 两个正态总体的假设检验.....	200
第四节 样本容量的选取.....	213
第五节 正态分布的偏度、峰度检验法	219
第六节 离散型总体参数的假设检验.....	222
第七节 关于拟合优度的 χ^2 检验	227
第八节 列联表的 χ^2 检验	236
本章小结.....	245
习题八.....	247
第九章 方差分析及回归分析	253
第一节 单因素试验的方差分析.....	253
第二节 双因素试验的方差分析.....	267
第三节 一元线性回归.....	284
第四了 多元线性回归.....	301
本章小结.....	307
习题九.....	308
第十章 试验设计	313
第一节 试验设计的原则与类型.....	313
第二节 正交试验设计.....	323
第三节 均匀试验设计.....	341
本章小结.....	369
习题十.....	370
附录	373
附录 1 单因素试验的方差分析 BASIC 语言程序	373
附录 2 双因素试验的方差分析 BASIC 语言程序	376
附录 3 一元线性回归分析 BASIC 语言程序	379
附录 4 多元线性回归分析 BASIC 语言程序	382

附表	388
附表 1 几种常用的概率分布	388
附表 2 标准正态分布表	391
附表 3 泊松分布表	392
附表 4 t 分布表	394
附表 5 χ^2 分布表	395
附表 6 F 分布表	397
附表 7 均值的 t 检验的样本容量	405
附表 8 常用正交表	407
附表 9 常用均匀设计表	415
附表 10 正态总体均值、方差的检验法(显著性 水平为 α)	420
习题答案	422
参考文献	436

第一章 事件与概率

引 言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学分支,什么是随机现象呢?让我们先做两个简单的试验。

试验 1 一个盒子中有十个完全相同的白球,搅匀后从中任意摸取一球。

试验 2 一个盒子中有十个相同的球,但五个是白色的,另外五个是黑色的,搅匀后从中任意摸取一球。

对于试验 1,在球没有取出之前,我们就能确定取出的必定是白球。这种试验,根据试验开始时的条件,就可以确定试验的结果。而对于试验 2 来说,在球没有取出以前,我们从试验开始时的条件,不能确定试验的结果(即取出的球)是白的还是黑的。也就是说,一次试验的结果,出现白球还是出现黑球,在试验之前是无法确定的。对于这一类试验,骤然一看,似乎没有什么规律可言,但是,实践告诉我们,如果从盒子中反复多次取球(每次取出一球,记录球的颜色后仍把球放回盒子中并且搅匀),那么总可以观察到这样的事实:当试验次数 n 相当大时,出现白球的次数 $n_{\text{白}}$ 和出现黑球的次数 $n_{\text{黑}}$ 是很接近的,比值 $\frac{n_{\text{白}}}{n}$ (或 $\frac{n_{\text{黑}}}{n}$) 会逐渐稳定于 $\frac{1}{2}$ 。出现这个事实是完全可以理解的,因为在盒子中白球数等于黑球数,从中任意摸取一个球,取得白球或黑球的“机会”应该是平等的。

于是,我们面对着两种类型的试验。试验 1 所代表的类型,在

试验之前就能断定它有一个确定的结果,这种类型的试验所对应的现象,称为确定性现象。确定性现象非常广泛,例如:

“早晨,太阳必然从东方升起。”

“苹果,不抓住必然往下掉。”

“边长为 a 、 b 的矩形,其面积必为 $a \cdot b$ 。”

“一个质点在 t 秒钟沿直线移动的距离为 $s(t)$,则此质点移动的速度必定是 $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ 。”

.....

过去我们所学的各门数学课程基本上都是用来处理和研究这类确定性现象的。

试验 2 所代表的类型,它有多于一种可能的试验结果,但是在一次试验之前不能肯定试验会出现哪一个结果,就一次试验而言,看不出有什么规律。但是,“大数次”地重复这试验,试验结果又遵循某些规律,这种规律称之为“统计规律”。这一类试验称为随机试验,试验所代表的现象称为随机现象。在客观世界中随机现象是极普遍的,例如:

“某地区的年降雨量”

“检查流水生产线上的一件产品,是合格品还是不合格品?”

“某电话交换站在单位时间内收到用户呼唤的次数”

“打靶射击时,弹着点离靶心的距离”

.....

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的数学学科,由于随机现象的普遍性,使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用。近年来,一方面它为科学技术、工农业生产等现代化建设做出了重要的贡献;另一方面,广泛的应用也促进概率论与数理统计本身的极大发展。

第一节 随机事件和样本空间

我们在引言中已经介绍了随机试验,现在进一步明确它的含义。一个试验如果满足下述条件:

- (1) 试验可以在相同的情形下重复进行;
- (2) 试验的所有可能结果是明确可知道的,并且不止一个;
- (3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现那一个结果。

就称这样的试验是一个随机试验,为方便起见,也简称为试验。

随机试验的每一个可能的结果,称为基本事件。因此随机试验的所有结果是明确的,从而所有的基本事件也是明确的,它们的全体,称做样本空间,通常用字母 Ω 表示, Ω 中的点,即基本事件,有时也称做样本点,常用 ω 表示。例如:

E_1 : 投掷一枚硬币,观察其出现正面或反面的情况;

E_2 : 记录医院在一天内接待急诊病人的人数;

E_3 : 从一批产品中随意抽取 10 件产品,记录其中次品的件数;

E_4 : 在一批灯泡中,任取一只测试其寿命。

$E_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 的样本空间 Ω_k :

$\Omega_1 = \{\text{正面向上,反面向上}\}$

$\Omega_2 = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\Omega_3 = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

$\Omega_4 = \{t \mid t \geq 0\}$

要注意的是:样本空间的元素是由试验的目的所确定的,当试验的目的不同时,其样本空间也不一样。

在随机试验中,可能发生也可能不发生的结果称为随机事件,简

称事件。通常用大写字母 A 、 B 、 C … 表示,它是样本空间 Ω 的子集。

我们把基本空间 Ω 也作为一个事件。因为在每次试验中必然出现 Ω 中的某个样本点,亦即 Ω 必然发生,所以常称 Ω 为必然事件。我们把空集 $\emptyset$ (它不包含任何点) 也作为一个事件,它在每次试验中都不会发生,称为不可能事件。必然事件与不可能事件可以说不是随机事件,为研究的方便,我们还是把它们作为随机事件的两个极端情形来统一处理。

第二节 事件的关系与运算

事件是一集合,因而我们可以按照集合之间的关系与运算来建立事件之间的关系与运算。现在我们采用概率论的专门术语来叙述。

一、包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A ,或称事件 A 含于事件 B ,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 。例如,事件 B 表示灯泡能使用 1 000 小时以上,事件 A 表示灯泡能使用 1 500 小时以上,由于能使用 1 500 小时的灯泡,必然能使用 1 000 小时以上,故有 $A \subset B$,图 1-1。

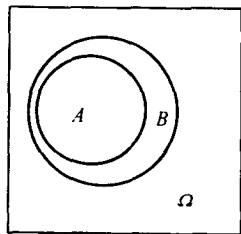


图 1-1

二、相等关系

若 $A \subset B$ 和 $A \supset B$ 同时成立,或者说 A 和 B 中的基本事件完全相同,则称 $A = B$ 。

三、事件的和

“事件 A 和 B 至少有一个发生”这样的事件,称为事件 A 与事

件 B 的和,记为 $A \cup B$,图 1-2。

类似地,“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生”这样的事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件,记作

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

四、事件的积

“事件 A 与 B 同时发生”这样的事件称为事件 A 与 B 的积,记作 $A \cap B$ 或 AB ,图 1-3。

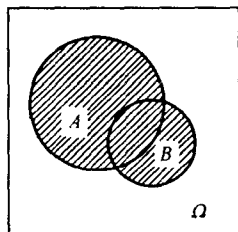


图 1-2

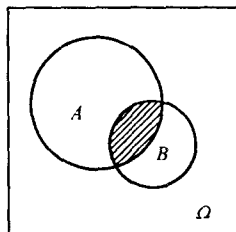


图 1-3

类似地,称 $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件。

五、事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这样的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A - B$,图 1-4。

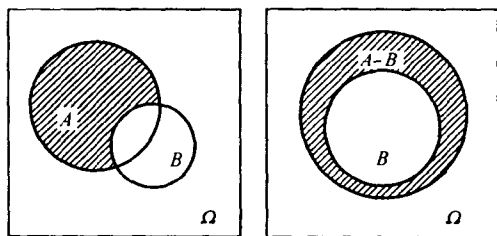


图 1-4

六、不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相容, 例如基本事件中任何两个事件均互不相容, 图 1-5。

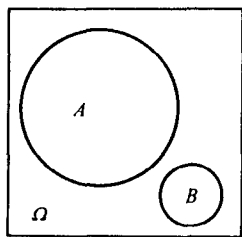


图 1-5

七、对立事件

若 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互为逆事件, 又称事件 A 与 B 互为对立事件, 这指的是对每次试验而言, 事件 A 和事件 B 中必有一个发生, 且仅有一个发生。 A 的对立事件记为 $\bar{A}$, $\bar{A} = \Omega - A$ 。图 1-6, 图 1-7。

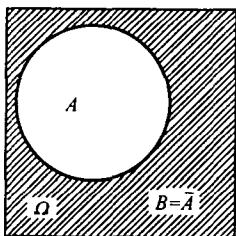


图 1-6

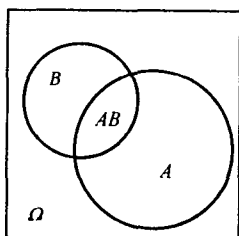


图 1-7

在进行事件运算时, 经常要用到下述定律:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- (4) 德·摩根律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

例 1-1 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取

出的产品不放回),事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i = 1, 2, 3$)。试用事件的运算符号表示下列事件:三次都取到了合格品;三次中至少有一次取到合格品;三次中恰有两次取到合格品;三次中最多有一次取到合格品。

解 三次全取到合格品: $A_1 A_2 A_3$;

三次中至少有一次取到合格品: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

三次中恰有两次取到合格品: $A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$;

三次中至多有一次取到合格品: $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_2 \bar{A}_3$ 。

思考与讨论

1. 下列各式说明什么包含关系:

(1) $AB = A$

(2) $A + B = B$

(3) $A + B + C = C$

2. 何谓互不相容事件?何谓对立事件?事件“ A 或 B ”和“ A 且 B ”各是什么含义?

第三节 频率与概率

对于一个事件(除必然事件和不可能事件外)来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生。我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大。例如:为了确定水坝的高度,就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小,我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小。为此,首先引入频率,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性

大小的数——概率。

一、频率

在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,并记成 $f_n(A)$ 。

显然,在 n 次试验中,任一事件的频数(n_A)介于 0 与 n 之间,必然事件的频数为 n ,不可能事件的频率为 0。所以,由定义易见频率具有下列性质:

$$(1) 0 \leq f_n(A) \leq 1$$

$$(2) f_n(\Omega) = 1$$

(3) 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k)$$

$$(4) f_n(\emptyset) = 0$$

容易看出,随机事件的频率近似地反映了该事件在一次试验中发生的可能性的多少。

为了揭示隐藏在随机现象中的固有规律性,历史上有人做过重复投掷硬币的试验,其结果记录如表 1-1。

表 1-1

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数 n_A	频率 $f_n(A)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表中可以看出,在 n 次重复试验中,事件 A 的频率虽然不